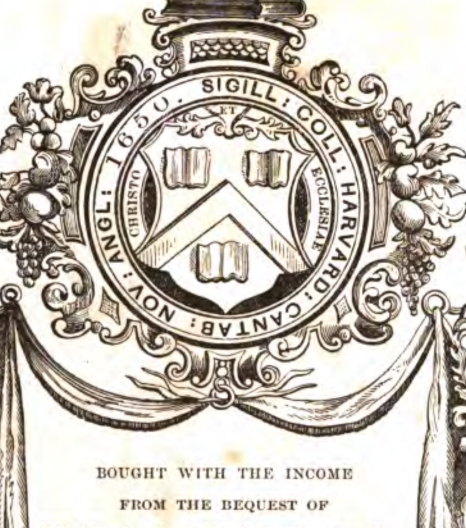
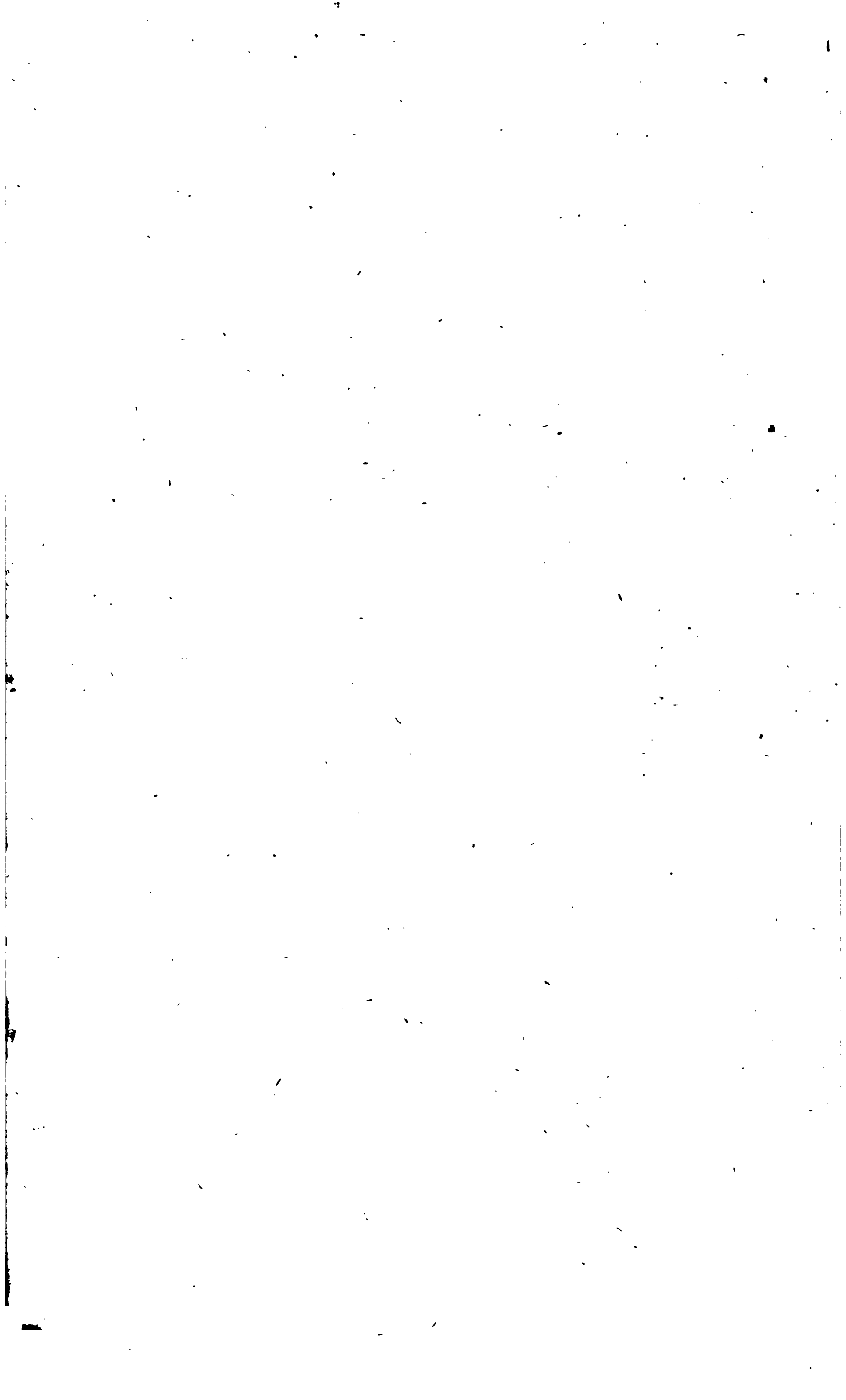



SIGILL: COLL: HARVARD: CANTAB: NOV: ANGL: 1650.
CHRISTO ET ECCLESIAE



ZEITSCHRIFT

FÜR

PHYSIK

UND

MATHEMATIK.

Herausgeber:

A. Baumgartner und A. v. Ettingshausen,

ordentliche Professoren an der k. k. Universität zu Wien.

Vierter Band.

Mit vier Kupfertafeln.

WIEN.

Gedruckt und im Verlage bei *Carl Gerold.*

1828.

Inhalt.

I. Heft.

II. Heft.

III. Heft.

IV. Heft.

ZEITSCHRIFT
FÜR
PHYSIK UND MATHEMATIK.

I.

Über eine einfache practische Methode, das Vergröfserungsverhältnifs bei Mikroskopen zu bestimmen.

Vom
Freiherrn von *Jacquin*.

Wenn der Naturforscher bei einer mikroskopischen Besichtigung die Hauptzwecke derselben: den Bau und die Bildung des Gegenstandes seiner Untersuchung, so weit er es zu seinem Zwecke bedarf, klar und bestimmt zu erkennen, erreicht hat, so ergeben sich demselben noch zwei Fragen zur Beantwortung:

Erstens. Welches ist die natürliche Gröfse des besichtigten Gegenstandes und seiner einzelnen Theile?

Zweitens. Wie stark war die Vergröfserung, welche sein optisches Werkzeug während der Anschauung hervorgebracht hat?

Beide Fragen gehören unter jene, in der Naturkunde leider oft vorkommende Kathegorie, deren Lösung theoretisch sehr leicht und bestimmt angegeben wird, bei practischer Anwendung dieser Theorie aber vielfältige, oft unüberwindlich scheinende Schwierigkeiten darbietet. Die erste ist indessen in der neuesten Zeit sowohl durch die erreichte Vollkommenheit der Mikrometer, und die zu ihrem zweckmäfsigen Gebrauche erfundenen Handgriffe, als insbesondere durch die

von *Young*, *Dollond*, *Amici*, *Fraunhofer* und *Wollaston* angegebenen und ausgeführten trefflichen Vorrichtungen zur hinlänglichen Befriedigung gelöset worden, so dafs ich mir nur vorbehalte, bei einer anderen Gelegenheit einige auf eigene Erfahrungen gegründete Bemerkungen über diesen Punct mitzutheilen. Die Beantwortung der zweiten Frage könnte dem Naturforscher oft gleichgültig bleiben, wenn es nicht seine Pflicht forderte, bei Mittheilung seiner Beobachtung den erwähnten Umstand so genau als möglich anzugeben, damit andere Naturforscher in den Stand gesetzt werden, seine Untersuchung unter ganz gleichen Umständen zu wiederholen, zu würdigen, zu bestätigen oder zu berichtigen.

Wenn die Brennweiten sowohl der Objectivlinse als der den Ocularapparat zusammensetzenden Gläser bei einem dioptrischen Mikroskope, dann auch noch des Spiegels bei einem katadioptrischen Werkzeuge der Art genau bekannt sind, so findet man in jedem Elementarbuche der Physik die theoretische Angabe, wie die vergröfserte Ansicht daraus entstehen mufs, und die Formeln, um ihr Verhältnifs auf das Genaueste zu berechnen. Allein eben in dieser practischen Bestimmung der Brennweiten der fertigen einzelnen Gläser mit einer so grofsen Genauigkeit, als diese Daten nothwendig erfordert werden, um bei der complicirten Berechnung nicht in grobe Irrungen zu verfallen, liegt die bisher unüberwundene Schwierigkeit, die Jeder, der Versuche dieser Art selbst gemacht hat, wohl kennet *). Die Verfertiger optischer Werkzeuge fingen daher an, aus der

*) Eine der gröfsten Schwierigkeiten ist die unerläfsliche, höchst genaue Bestimmung der Dicke der Gläser, genau an ihrer Axe, um die Hälfte davon der, von der Oberfläche an gemessenen Focallänge zu addiren.

ihnen bekannten Gestalt ihrer Schleifschalen die Gestalt und daraus, nach möglichst genauer Bestimmung des Durchmessers, die Brennweite ihrer Linsen zu bestimmen. Und so geben mehrere berühmte Optiker die verschiedenen Vergröſserungsverhältnisse der von ihnen verfertigten Mikroskope an. *Fraunhofer* bediente sich bekanntlich dazu der Radiuslänge seiner Schleifvorrichtungen.

Allein abgerechnet, daſs, wie gesagt, die kleinste Abweichung oder Irrung bei diesen Messungen in der darauf gegründeten Rechnung bedeutende Fehler hervorbringt, so sind die Besitzer der Mikroskope nie im Stande, diese Angaben selbst zu controliren, indem diese Methode bei schon fertigen Werkzeugen gar nicht mehr anwendbar ist. Es haben sich daher seit längerer Zeit Optiker und Naturforscher häufig mit einer empirischen Methode begnügt, die Vergröſserung der Mikroskope zu bestimmen, oder vielmehr zu schätzen, welche darin bestehet, zwei sehr kleine, aber gleich groſse Linear-Entfernungen oder Flächen mit einem Auge unter dem Mikroskope, mit dem anderen Auge auſser demselben zu vergleichen, und auf diese Weise die Vergröſserung zu *schätzen*; denn eine Schätzung bleibt es immer nur, selbst wenn die hierbei nur zu oft vernachläſsigte Rücksicht auf die mittlere Sehweite genau beachtet wird, und man sich eines Mikrometers und des Zirkels dabei bedient, so zwar, daſs mehrere Personen, welche die Beobachtung zugleich anstellen, selten in ihrer Schätzung genau übereinstimmen. Daſs aber einzelne, eingeübte Optiker eine bedeutende Fertigkeit in dieser Art Schätzung besitzen, und der Wahrheit gewöhnlich sehr nahe kommen, nützet der groſsen Menge ein Mikroskop gebrauchender Naturforscher nicht. Mein verlorener, berühmter Freund *Vega* hat sich vormahls

lange vergeblich bemüht, dieser Methode mehr Bestimmtheit zu geben.

Von meinem Knabenalter an zu mikroskopischen Beobachtungen veranlaſst und eingeübt, dabei im Besitze und in Benützung der vortrefflichsten Werkzeuge dazu, war eine sichere, vergleichbare und bequeme Methode zur Lösung der besprochenen Aufgabe von jeher mein Lieblingswunsch, der in den neuesten Zeiten durch die von dem unvergeſslichen *Fraunhofer* ausgegangene groſse Verbesserung der dioptrischen Mikroskope, und die darauf gegründete, alle bisherigen Leistungen übertreffende Ausführung derselben durch unsern trefflichen Optiker *Plöſsl* neuerdings um so mehr angeregt worden ist, als alle Gelehrten des Faches im In- und Auslande, die ich darüber zu Rathe zog, mich nur auf das eben Vorgetragene, unter Anerkennung der dabei obwaltenden Schwierigkeiten, zu verweisen vermochten.

Die sinnreichen Angaben des Hrn. Prof. *Amici*, um mit Hülfe des Mikroskopes zu zeichnen und die wahre Gröſse der im Mikroskope gesehenen Objecte zu bestimmen, und die glückliche Vereinfachung und Beseitigung mancher Schwierigkeiten bei diesem Verfahren durch Vertauschung der *Camera lucida* gegen den so vielseitig brauchbaren, und noch viel zu wenig bekannten und benützten Spiegelchen-Apparat des Herrn Dr. *Sömmering* Sohn zu diesem Zwecke, brachten mich, unter Benüzzung der von diesen Gelehrten schon angegebenen Handgriffe und Winke, nach und nach auf ein einfaches und sicheres Verfahren, die verschiedenen Vergröſserungen bei jedem fertigen, einfachen oder zusammengesetzten, dioptrischen oder katadioptrischen Mikroskope genau und vergleichbar practisch zu bestimmen.

Da nun diese Methode den Beifall so vieler Sachverständigen und geübten Beobachter des In- und Aus-

landes, denen ich solche mitgetheilt und vorgezeigt habe, erhalten hat, so füge ich mich dem Ansinnen meines hochverehrten Herrn Collegen, Prof. *Baumgartner*, mit Vergnügen, solche hier zu beschreiben.

Der *Sömmering*'sche Spiegelchen-Apparat findet sich von dem Erfinder selbst (*Dingler's* polytechn. Journal, B. 7) so gut und umständlich beschrieben, dafs es wohl überflüssig wäre, die Beschreibung hier zu wiederholen, und ich nur bemerken will, dafs ich meine ersten Versuche mit einem von Hr. Dr. *Sömmering* selbst erhaltenen Apparate mit Stahlspiegelchen, wie solcher von ihm (a. a. O. T. VIII. Fig. 9) abgebildet worden ist, angestellt habe, und dann erst Hr. Opticus *Plöfsl* solche Apparate mit einigen kleinen Verbesserungen und etwas gröfseren Metallspiegelchen verfertiget hat, deren Metallmasse ich durch Zusammenschmelzen von silberplattirten Kupferblechschnitzeln, worin das Silberverhältnifs $^1/_{20}$ war, mit Zusatz der Hälfte reinen Zinnes, erhalten habe, und worin das Verhältnifs der drei sehr reinen Metalle: Kupfer 190, Zinn 100, Silber 10 ist *). Hr. Dr. *Sömmering* erwähnt schon, die *Amici*'sche Methode, um die Gröfse des Gegenstandes bei seinem Mikroskope zu finden, könne auch zur Bestimmung des Vergröfserungsverhältnisses angewendet werden, ohne sich jedoch näher darüber zu erklären; *Amici* selbst erwähnt dieser Anwendung gar nicht.

Die zu beantwortende Aufgabe mufs practisch folgender Mafsen ausgedrückt werden: Genau zu bestimmen, um wie viel Male man eine bekannte Längen- oder Flächenausdehnung durch das Mikroskop gröfser sieht,

---

*) Hr. *Plöfsl*, neue Wieden, Salvatorgasse, Nro. 321, liefert diesen vielseitig nützlichen kleinen Apparat in Futteral von Maroquin um 6 fl. C. M.

als wenn dieselbe mit freiem Auge in der angenommenen mittleren Sehweite von 8 Zoll W. M. angesehen wird? Wenn man es daher dahin bringt, die Bilder zweier ganz gleichen Maſsstäbe genau unter den bedingten Umständen so über einander dargestellt zu sehen, daſs man solche in einander passen, und das Gröſsenverhältniſs ihrer Eintheilung genau vergleichen kann, so ist die Aufgabe gelöset. Um nun dieses bequem zu bewerkstelligen, verfahre ich bei dioptrischen zusammengesetzten Mikroskopen auf folgende Art:

Auf einem einfachen hölzernen Gestelle (Fig. 1), dessen Tafel *a* groſs genug seyn muſs, jedes Mikroskop so darauf zu stellen, daſs der Mittelpunct der Ocularlinse 8 Wiener Zoll oder 2 Decimeter von dem aufgerichteten schmalen Schirme *b b* entfernt bleibt, wird das zu untersuchende Mikroskop *c* genau in dieser, mit einem senkrecht auf den Schirm gehaltenen Zollstabe zu bestimmenden Entfernung von dem Ocular gestellt; der Reflectionsspiegel durch eine darneben stehende Wachskerze oder Lampe *d* beleuchtet, und ein auf Glas gravirter Mikrometer, mit einer Lineartheilung der Wiener Duodecimal-Linie in 30 oder 60 Theile, auf dem Objecttisch zur deutlichsten Ansicht gebracht. Dem Ocular horizontal gegenüber befindet sich an dem Schirme *b* des Gestelles ein Blatt dickes, glattes Kartenpapier, das in den an beiden Rändern des Schirmes angebrachten Falzen sich hoch und nieder schieben läſst, um den verschiedenen Höhen verschiedener Mikroskope angepaſst zu werden. Auf diesem mit schwarzem Grunde bemahlten Kartenpapiere befinden sich mit weiſser Farbe 25 feine Linien horizontal genau in der Entfernung einer Wiener Duodecimal-Linie gezogen. Dieser Maſsstab *e e* wird durch eine seitwärts angebrachte, kleine, mit einem Reflectionsschirme versehene Lampe, oder einer

Wachskerze in Federkapsel *f* beleuchtet, welche ebenfalls höher und niedriger angepafst werden kann, nachdem der Mafsstab selbst nach der Höhe des Mikroskopes höher oder niedriger stehen mufs. An dem Ocularapparat des Mikroskopes wird nun der *Sömmering*'sche Spiegelchenapparat mit seinem Ringe und Stellschrauben befestiget, und das Spiegelchen *g* an dem Platze des Auges, unter einem Winkel von 45° gegen dasselbe so gestellt, dafs das Bild des Objectes (nämlich des Mikrometers) in die Mitte desselben fällt, und mit dem horizontal genäherten Auge genau eben so im Spiegelchen gesehen wird, als unmittelbar durch das Ocular.

Da man nun, *mit demselben Auge*, zugleich den Mafsstab an dem Schirme *in der normalen Sehweite* so sieht, als läge das Mikrometerbild auf demselben, so lassen sich, wenn man durch Drehen des Mikrometers mit der Hand, oder den an dem Objecttische angebrachten Stellschrauben, die Linien desselben genau parallel mit jenen des Mafsstabes an dem Schirme gerichtet hat, die gegenseitigen Theilungen genau vergleichen, und daraus die Vergröfserungsstufe leicht bestimmen.

Ein Theil des Mafsstabes äquivalirt bei einer Theilung der Linie in 30 Theile auch 30 Theilen des Mikrometers; wenn daher z. B. eine Mikrometertheilung ($^1/_{30}$) genau eine Theilung des Mafsstabes ($^{30}/_{30}$) deckt, so ist die Vergröfserung 30 Mal linear, und folglich 900 Mal Quadrat; decken 3 Theile des Mikrometers 4 Theile des Mafsstabes, so werden $^3/_{30}$ so grofs gesehen als $^{120}/_{30}$, und die Vergröfserung ist 40 Mal linear, oder 1600 Mal Quadrat. Decken aber 3 Theile des Mikrometers nur 2 Theile des Mafsstabes, so decken 3 Theile 60 Theile, und die Vergröfserung ist nur 20 Mal linear, oder 400 Mal Quadrat. Decken 3 Mikrometertheile 7 Mafsstabtheile, welche 210 Mikrometertheilen äquivaliren, so ist

die Vergrößserung 70 Mal linear, und 4900 in Quadrat. Decket 1 Mikrometertheil 15 Maſsstabtheile = 450 Mikrometertheile, so ist die Linear-Vergröſserung auch eben so groſs. Decken 8 Mikrometertheile 9 Maſsstabtheile = 270 Mikrometertheile, so ist die Vergröſserung = 33,75 Mal linear, u. s. f.

Die Tafel *a* des Gestelles muſs groſs genug seyn, daſs der Fuſs des gröſsten Mikroskopes zur Noth darauf Platz hat, und der Schirm *b* so hoch seyn, daſs selbst bei den höchsten Mikroskopen der Maſsstab auf die Höhe des Oculars geschoben werden kann. Mein Apparat hat eine Tafel von 14 Zoll im Quadrat, und der Schirm ist 2 Schuh hoch, und 5 Zoll breit. Darauf sind die gröſsten und kleinsten bisher bekannten Londoner, Münchner und Wiener Instrumente mit Bequemlichkeit untersucht und bestimmt worden. Statt eines solchen Gestelles kann man sich auch wohl bloſs eines beweglichen Schirmes bedienen, der an jedem Tische mittelst einer Zwingschraube befestiget werden kann, oder im Nothfalle auch einen kleinen Tisch an die Wand schieben, und den Maſsstab unmittelbar an derselben befestigen.

Ein Hauptumstand bei diesem Verfahren ist die Beleuchtung sowohl des Mikrometers als des Maſsstabes, welche nicht nur hinlänglich, sondern auch im genau bemessenen gegenseitigen Verhältnisse stehen muſs; denn ist das Mikrometerbild gegen den Maſsstab, oder umgekehrt, der letztere gegen das erstere zu grell beleuchtet, so wird das eine oder der andere undeutlich, oder wohl gar unsichtbar. Auch muſs das Auge nach Umständen vor dem Lichte durch wohl angebrachte Schirme vor Blendung verwahrt werden. Daher denn auch diese Untersuchung bei Tageslicht, wo man die Beleuchtung nicht so in seiner Gewalt hat, kaum ausführbar ist.

Die erwähnte Mikrometertheilung bis auf $^1/_{20}$ Wien. Duodecimal-Linie ist für die meisten Vergröſserungen hinreichend, nur muſs immer wenigstens ein ganzer Mikrometertheil in der Mitte des Gesichtsfeldes des Mikroskopes deutlich sichtbar seyn. Nur bei sehr starken Vergröſserungen, die schon bis 300 Mal linear reichen, muſs man oft zu Mikrometern steigen, die auf $^1/_{60}$ bis $^1/_{100}$ Linie linear getheilt sind. Besonders tritt dieser Fall bei den Schattenbildern der übertriebenen Vergröſserungen nicht achromatischer und katadioptrischer Mikroskope ein.

Die jedesmalige, sorgfältige Berichtigung der normalen Sehweite ist zur Erreichung wahrer, comparativer Bestimmungen unerläſslich, und die Vernachläſsigung dieses Umstandes war wahrscheinlich schon bei den älteren Messungsversuchen dieser Art, die Quelle mancher auffallend unrichtig und übertrieben angegebener Vergröſserungen. Eine Vergröſserung, welche mit der Ansicht in normaler Sehweite von 8 Zoll linear 30 beträgt, wird bei Verlängerung der Sehweite nur auf 10'' schon 35 scheinen, und unter gleichen Umständen eine von linear 240 bei einer Sehweite von 12 Zoll wie 360, und endlich bei 24 Zoll wie 540 scheinen.

Bei katadioptrischen Mikroskopen, welche horizontal stehen, wird das Spiegelchen eben so am Ocular angebracht, aber der Maſsstab unter das Ocular auf den Tisch gelegt, dabei aber wieder genau die normale Entfernung von 8'' hergestellt. Die Beleuchtung des Maſsstabes wird dabei durch ein darneben stehendes Kerzen- oder Lampenlicht bewirkt.

Auf dieselbe Art kann auch die Vergröſserung einfacher Linsen oder Loupen bestimmt werden, wenn man sie nur, sie seyen senkrecht oder horizontal befestiget, zu dem Zwecke unmittelbar oder reflectirt hinlänglich

beleuchten kann, um ein deutliches Bild des Mikrometers in dem Spiegelchen zu geben. Der Spiegelchenapparat muſs in diesem Falle, wenn er nicht an das Mikroskop selbst befestiget werden kann, darneben auf einem eigenen Fuſse angebracht werden. Wegen des kurzen Focus und Mangel an Lichtstärke sind die stärkeren Vergröſserungen der älteren zusammengesezten, nicht achromatischen und katadioptrischen Mikroskope am schwierigsten zu bestimmen.

Daſs man sich statt der Wiener Duodecimal-Linien als Maſsstab eben so gut der Decimal-Linien, Pariser- und Londoner-Linien, oder Millimeter bedienen könne, wenn nur die Mikrometertheilung übereinstimmend ist, bedarf wohl keiner Erinnerung. Da man sich gewöhnlich nach dem schon vorhandenen Mikrometer richtet, so muſs der Werth desselben genau bekannt seyn, um den Maſsstab darnach zu verfertigen. Linear-Mikrometer oder sogenannte Leitern sind deutlicher, obgleich man auch sehr gut Netz-Mikrometer brauchen kann. Vollkommen genau getheilt muſs sowohl der Maſsstab als der Mikrometer zu diesem Zwecke auf jeden Fall seyn, und dieses Verfahren ist zugleich eine strenge Untersuchung für letzteren.

Zum Beschlusse folget eine Auswahl vergleichender Bestimmungen der Vergröſserungen einiger vorzüglichen Mikroskope, welche hier in Wien vorhanden sind, nebst Angabe der Gesichtsfelder im Durchmesser, bei der schwächsten und stärksten Vergröſserung, in Duodecimal-Linien des Wien. Fuſs.

I. Dioptrisch, achromatisch.

1. Mikroskop von *Plössl*, des k. k. Universitätsgartens.

Ocular N. I. mit Objectiv	N. 1.	Lin. 27	Quadr.	729
	» 2.	» 40	»	1600.
	» 3.	» 60	»	3600.
	» 4.	» 90	»	8100.
Ocular N. II. mit Objectiv	N. 1.	Lin. 30	Quadr.	900.
	» 2.	» 60	»	3600.
	» 3.	» 110	»	12100.
	» 4.	» 120	»	14400.
Ocular N. III. mit Objectiv	N. 1.	Lin. 45	Quadr.	2025.
	» 2.	» 90	»	8100.
	» 3.	» 150	»	22500.
	» 4.	» 225	»	50625

Sehefeld. Ocul. I. Object. 1. = 2,9‴.
» II. » 4. = 0,55‴.

2. Mikroskop von *Plössl*, des Hrn. Dr. *Vivenot*.

Ocular N. I. mit Objectiv	N. 1.	Lin. 25	Quadr.	625.
	» 2.	» 50	»	2500.
	» 3.	» 67	»	4489.
	» 4.	» 90	»	8100.
Ocular N. II. mit Objectiv	N. 1.	Lin. 45	Quadr.	2025.
	» 2.	» 70	»	4900.
	» 3.	» 120	»	14400.
	» 4.	» 150	»	22500.

Sehefeld. Ocul. I. Object. 1. = 3‴.
» II. » 4. = 0,55‴.

3. Mit diesem Mikroskope stimmt jenes desselben Künstlers, dem Hrn. von *Pittoni* gehörig, beinahe ganz überein.

4. **Mikroskop von *Plöſsl*, auf Gestelle von *Hooke*.** Mein Eigenthum.

Nur ein einfaches Ocular.

Objectiv N.	1.	Lin.	270	Quadr.	72900
»	2.	»	150	»	22500.
»	3.	»	120	»	14400.
»	4.	»	30	»	900.

Sehefeld. Objectiv N. 1. = 0,6‴.
» 4. = 1,6‴.

5. Groſses Mikroskop von *Plöſsl*, des Hrn. Prof. Dr. *Czermak*.

Ocular N. I. mit Objectiv N.	1.	Lin.	15	Quadr.	225.
	»	2.	»	30	»	900.
	»	3.	»	40	»	1600.
	»	4.	»	60	»	3600.
	»	5.	»	90	»	8100.
	»	6.	»	150	»	22500.
Ocular N. II. mit Objectiv N.	1.	Lin.	30	Quadr.	900.
	»	2.	»	37,5	»	1406,25.
	»	3.	»	60	»	3600.
	»	4.	»	90	»	8100.
	»	5.	»	150	»	22500.
	»	6.	»	240	»	57600.

Ocular N. I. und II., vereinigt mit Objectiv N. 6.
Lin. 300 Quadr. 90000.

Sehefeld. Ocular I. mit Objectiv 1. = 3,75‴.
» II. » » 6. = 0,45‴.
» I. u. II. » » 6. = 0,40‴.

6. Mit diesem Mikroskope stimmt jenes desselben Künstlers im k. k. physikal. Universitäts - Museum, bis auf kleine Abweichungen, überein.

7. **Mikroskop von *Voigtlaender*, des k. k. physikal. Universitäts-Museums.**

Ocular, nur eines. Mit Objectiv N. 1.	Lin. 12	Quadr.	144.
» 2.	» 30	»	900.
» 3.	» 50	»	2500.
» 4.	» 90	»	8100.

Sehefeld. N. 1. = 2,65‴.

8. **Mikroskop von *Fraunhofer*, auf Gestelle und mit Meſsvorrichtung von *Starke*, des k. k. physikal. Universitäts-Museums.**

Ocular N. I. mit Objectiv N. 1.	Lin. 18	Quadr.	319.
» 2.	» 25	»	625.
» 3.	» 60	»	3600.
» 4.	» 90	»	8100.
Ocular N. II. mit Objectiv N. 1.	Lin. 30	Quadr.	900.
» 2.	» 37,5	»	1406,25.
» 3.	» 90	»	8100
» 4.	» 120	»	14400.

Sehefeld. Ocul. I. Objectiv 1. = 3,15‴.
» II. » 4. = 0,875‴.

9. Groſses Mikroskop von *Fraunhofer*, des Freiherrn von *Kielmannsegge*.

Ocular N. I. mit Objectiv N. 1.	Lin. 12	Quadr.	144.
» 2.	» 17,1	»	289.
» 3.	» 25,7	»	676.
» 4.	» 40	»	1600.
» 5.	» 55	»	3025.
» 6.	» 70	»	4900.
Ocular N. II. mit Objectiv N. 1.	Lin. 15	Quadr.	225.
» 2.	» 22,1	»	488,4.
» 3.	» 36	»	1296.
» 4.	» 45	»	2025.
» 5.	» 60	»	3600.
» 6.	» 82,5	»	6806,5.

Ocular N. III. mit Objectiv N.	1.	Lin.	30	Quadr.	900.
	» 2.	»	32	»	1024.
	» 3.	»	60	»	3600.
	» 4.	»	75	»	5625.
	» 5.	»	105	»	11025
	» 6.	»	120	»	14400.

Sehefeld Ocular I. Objectiv 1. = 6,5'''.
» III. » 6. = 0,4'''.

II. Dioptrisch, nicht achromatisch.

10. Mikroskop von *Ramsden*, des k. k. Universitätsgartens.

Ocular nur eines. Object. N.	1.	Lin.	240	Quadr.	57600.
	» 2.	»	60	»	3600.
	» 3.	»	45	»	2025
	» 4.	»	39	»	1521.
	» 5.	»	30	»	900.
	» 6.	»	20	»	400.

Sehefeld. Objectiv N. 1. = 0,3'''
» » 6. = 3,85'''

11. Mikroskop von *Adams*, des k. k. physikal. Universitäts-Museums.

Ocular nur eines. Objectiv N.	1.	Lin.	90	Quadr.	8108.
	» 2.	»	60	»	3600
	» 3.	»	37,5	»	1306,25.
	» 4.	»	26,6	»	707.
	» 5.	»	18	»	324.
	» 6.	»	17,6	»	309,76.

Sehefeld. Objectiv N. 1. = 0,93'''.
» » 6. = 5'''.

12. Mikroskop von *Adams*, des Hrn. von *Pittoni* (vormals Graf *Fries*).

Ocular nur eines.	Object.	N. 0.	Lin.	270	Quadr.	72900.
	»	1.	»	90	»	8100.
	»	2.	»	60	»	3600.
	»	3.	»	50	»	2500.
	»	4.	»	40	»	1600.
	»	5.	»	30	»	900.
	»	6.	»	15	»	225.

Sehefeld. Objectiv N. 0. = 0,2‴
» » 6. = 3,6‴

13. Mikroskop von *Hooke*, mein Eigenthum.

Ocular nur eines.	Object.	N. 0.	Lin.	210	Quadr.	44100.
	»	1.	»	95	»	9025.
	»	2.	»	60	»	3600.
	»	3	»	50	»	2500.
	»	4.	»	30	»	900.
	»	5.	»	27	»	729.
	»	6.	»	22,5	»	506,25.

Sehefeld. Objectiv N. 0. = 0,47‴.
» » 1. = 1‴.
» » 6. = 6‴.

III. Katadioptrisch.

14. Mikroskop von *Amici*, Sr. königl. Hoheit des Erzherzogs *Maximilian* von Este.

Ocular	N. 1.	Lin.	30	Quadr.	900.
»	2.	»	45	»	2025.
»	3.	»	120	»	14400.
»	4.	»	150	»	22500.
»	5.	»	180	»	32400.
»	6.	»	240	»	57600.

Sehefeld. Ocular N. 1. = 1,44‴.
» 6. = 0,37‴.

15. Mikroskop von *Amici*, Sr. Durchlaucht des Fürsten von *Metternich*.

Ocular N.	1.	Lin.	30	Quadr.	900.
»	2.	»	45	»	2025.
»	3.	»	75	»	5625.
»	4.	»	240	»	57600.
»	5.	»	330	»	108900.
»	6.	»	540	»	291600.

Sehefeld. Ocular N. 1. = 2,23‴.
» » 4. = 0,43‴
» » 5. = 0,26‴.
» » 6. = 0,13‴.

16. Mikroskop von *Plössl* (nach *Amici*), des k. k. physikal. Universitäts-Museums.

Ocular N.	1.	Lin.	30	Quadr.	900.
»	2.	»	60	»	3600.
»	3.	»	75	»	5625.
»	4.	»	150	»	22500.

Sehefeld. Ocular N. 1. = 2″.
» 4. = 0,7‴.

IV. Einfache Linsen.

Mein Eigenthum.

1. Linse mit Lieberkühn, von *Hooke*. Lin. 18, Quadr. 324.
2. Dergleichen, von *Hooke*. Lin. 37,5, Quadr. 1406,25.
3. Linse von *Hooke*. Lin. 60, Quadr. 3600.
4. Linse von *Voigtlaender*. Lin. 105, Quadr. 11025.
5. Dergleichen. Lin. 120, Quadr. 14400.
6. Dergleichen. Lin. 210, Quadr. 44100.
7. Dergleich. von *Abbé Mazzola*. Lin. 210, Quadr. 44100.

II.

Über die astronomischen Oculare bei Fernröhren;

von

I. I. Littrow.

Man versteht unter dieser Benennung bekanntlich diejenigen Oculare, welche aus einer oder mehreren convexen Linsen bestehen, und nur ein einziges wahres Bild im Fernrohre geben. Ich beschränke mich hier auf diejenigen dieser astronomischen Oculare, welche aus zwei Linsen zusammengesetzt sind, da die mit einer einzigen Linse zu einfach sind, um noch einer Erläuterung zu bedürfen, und da die mit drei und mehr Linsen zu groſsem Lichtverluste ausgesetzt sind, und daher in der Anwendung nicht gebraucht werden.

Um den folgenden Betrachtungen eine gröſsere Ausdehnung zu geben, wollen wir überhaupt die *Theorie der Fernröhre mit drei convexen Linsen* zu entwickeln suchen, in welcher dann die des astronomischen Doppeloculars bloſs als ein specieller Fall enthalten seyn wird.

Seyen a und α die beiden zusammen gehörenden Vereinigungsweiten der ersten Linse oder des Objectivs des Fernrohres, welches ich hier als ein doppeltes, von beiden Abweichungen der Kugelgestalt und der Farbenzerstreuung bereits befreites, voraussetze. Die Brennweite desselben sey p, der Öffnungshalbmesser z und $z = p\,\omega$. Für die zweite und dritte Linse wollen wir diese Gröſsen mit einem und mit zwei Strichen bezeichnen. Die Vergröſserungszahl des Fernrohres soll m, und der Halbmesser des Gesichtsfeldes φ heiſsen. Die-

ses vorausgesetzt, hat man aus den ersten optischen Gründen die bekannten Gleichungen

$$\alpha\alpha' = a'a''.m, \quad p'\omega' = (\alpha + a')\varphi, \quad \omega'' - \omega' = (m-1)\varphi$$

$$\text{und} \quad \frac{1}{p'} = \frac{1}{a'} + \frac{1}{\alpha'},$$

auf welchen die ganze Theorie der Fernröhre mit drei Linsen beruht. Da übrigens bei jedem Fernrohre die auf das Objectiv fallenden sowohl, als die aus dem letzten Oculare austretenden Strahlen unter sich sehr nahe parallel seyn müssen, so ist in den vorhergehenden Ausdrücken $\alpha = p$ und $a'' = p''$. Endlich ist, da wir in dem Fernrohre nur ein wahres Bild voraussetzen, die Gröfse m negativ.

Um zuerst jenen Gleichungen eine zu unserem Zwecke bequemere Gestalt zu geben, wollen wir $\omega'' = \theta . \omega'$ und $a' = k . \alpha'$ annehmen, wodurch man erhält

$$\left.\begin{array}{l} p' = -\frac{p}{h}(\theta - 1), \quad p'' = \frac{p}{km}, \\ a' = -\frac{p}{h}(\theta-1)(k+1) \text{ und } \alpha' = -\frac{p(\theta-1)(k+1)}{hk} \end{array}\right\} \ldots \text{(A)}$$

wo der Kürze wegen $h = \theta - m + (\theta - 1)k$ gesetzt worden ist.

Kennt man so die Gröfsen a', α' und p'', so hat man auch die Distanzen der Linsen von einander. Es ist nämlich die Entfernung der beiden ersten

$$\Delta = \alpha + a' = -\frac{p(m-1)}{h},$$

und die der beiden letzten

$$\Delta' = \alpha' + a'' = \frac{p}{mhk}\Big[\theta - m + (\theta - 1)[(1-m)k - m]\Big],$$

wo bekanntlich diese beiden Distanzen Δ und Δ' positiv, so wie $\omega' > (1+k)\frac{z}{p}$ und $\omega'' > \frac{kz}{p}$ seyn müssen. Endlich hat man für den Ort des Auges hinter der drit-

ten Linse den Ausdruck $\frac{p\,\omega''}{m^2 \Delta \varphi}$, der daher ebenfalls positiv seyn mufs, wenn anders das Auge das ganze Gesichtsfeld übersehen soll.

Aus dem Vorhergehenden folgt, dafs unsere Aufgabe, die Bestimmung eines Fernrohres von drei Linsen, eine unendliche Menge von Auflösungen zulasse, selbst wenn wir, wie wir hier voraussetzen, die Linsen alle convex, oder die drei Gröfsen p, p', p'' alle positiv annehmen. Diese Unbestimmtheit des Problems folgt aus der Willkür, mit welcher die beiden Gröfsen k und θ angenommen werden können. Doch ist auch wieder die Willkür dieser Annahme durch die Natur des Gegenstandes, mit welchem sich das Problem beschäftiget, beschränkt, und es ist daher nothwendig, zuerst die *Grenzen* aufzusuchen, zwischen welche jene Gröfsen fallen müssen.

Nehmen wir zuerst an, dafs das Gesichtsfeld des Fernrohres so grofs als möglich seyn soll, worin allerdings eine der Hauptforderungen besteht, die an jedes gute Fernrohr gemacht werden sollen, so wird man $\omega'' = -\omega'$, das heifst $\theta = -1$ setzen, und dann gehen die vorhergehenden Gleichungen in folgende über:

$$\left.\begin{array}{l} p' = \frac{2p}{h},\ p'' = \frac{p}{km},\ \alpha' = \frac{2p}{h}(k+1),\ \alpha' = \frac{2p(k+1)}{hk} \\ \text{und } \Delta = -\frac{p}{h}(m-1),\ \Delta' = \frac{p}{hkm}(m-1)(2k+1), \end{array}\right\} \ldots \text{(I)}$$

wo $h = -1 - m - 2k$ ist.

Da ferner $\omega' > (1+k)\frac{z}{p}$, und bei allen guten Fernröhren ω' höchstens $\frac{1}{4}$, und $\frac{z}{p}$ nahe 0.05 ist, so zeigt die letzte Gleichung, dafs $k < 4$ seyn mufs, so wie aus der Gleichung $p'' = \frac{p}{km}$ folgt, dafs k eine negative

Gröſse ist. Ferner hat man

$$\Delta' = -\frac{p\,(m-1)\,(2k+1)}{k\,m\,(1+m+2k)};$$

und da Δ' immer positiv, Am aber, nach dem Vorhergehenden, so wie $-p\,(m-1)$, positiv, und $1+m+2k$ negativ ist, so folgt, daſs $(2k+1)$ eine negative Gröſse, daſs also auch das negative $k > \frac{1}{2}$ seyn muſs. Es fällt also immer k zwischen die beiden Grenzen $-\frac{1}{2}$ und -4.

Aber schon die erste Bemerkung, daſs nämlich die Gröſse $k = \frac{a'}{\alpha'}$ an sich negativ ist, ohne über die absolute Gröſse derselben etwas näher zu bestimmen, führt auf einen sehr wesentlichen Unterschied dieser Fernröhre, auf *zwei Classen* derselben, deren jede für sich betrachtet werden muſs. Es ist nämlich erstens entweder a' positiv, also a' negativ, und dann fällt das wahre Bild des Fernrohres zwischen die beiden letzten Linsen, und man erhält so diejenigen Oculare, welche man an die Fernröhre anzubringen pflegt, welche bloſs zum Sehen, *aber nicht zum Messen*, bestimmt sind. Oder es ist zweitens a' positiv, also a' negativ, und dann fällt das wahre Bild zwischen die beiden ersten Linsen des Fernrohrs, wodurch man die Oculare erhält, welche man an den mit Mikrometern versehenen, und zum Messen bestimmten Fernröhren anbringt, damit nämlich die Rectification des Instrumentes und die Stellung der Fäden des Mikrometers nicht durch jede, oft nöthige Verstellung des Oculars, geändert werde.

Erste Classe von Doppelocularen.

$\theta = -1$, a' positiv und a' negativ.

Das wahre Bild fällt zwischen die zwei letzten Linsen.

Nimmt man die Vergröſserungszahl m bedeutend groſs an, wie dieses bei allen astronomischen Fernröh-

ren der Fall ist, so geben die vorhergehenden Gleichungen

$$a' = -\frac{2p}{m}(k+1) \quad \text{und} \quad \Delta' = -\frac{p}{km}(2k+1).$$

Da aber m, k und a' negativ, und Δ' positiv seyn soll, so folgt aus diesen Gleichungen, daſs das negative $k > 1$ seyn muſs. Es fällt daher k zwischen die Grenzen -1 und -4, und jede Annahme der Gröſse k zwischen diesen Grenzen constituirt gleichsam eine neue Art von diesen Doppelocularen der ersten Classe.

Erste Art. Sey $k = -\frac{(3m+1)}{2(m+1)}$, so geben die vorhergehenden Gleichungen (I.) für die Einrichtung des Doppeloculars

$$p' = -\frac{2p(m+1)}{m(m-1)}, \quad p'' = -\frac{2p(m+1)}{m(3m+1)},$$

$$\Delta = \frac{p(m+1)}{m}, \quad \Delta' = -\frac{4p(m+1)}{m(3m+1)},$$

$$a' = +\frac{p}{m} \quad \text{und} \quad a' = -\frac{2p(m+1)}{m(3m+1)}.$$

Ganz dieselben Ausdrücke findet auch Hr. Director *Prechtl* in seiner *Dioptrik*, und er erkennt diese schon früher von *Klügel* (*Anal. Diopt.* S. 183) gegebene Einrichtung des Doppeloculars als eine sehr brauchbare.

In der That gibt auch dieser Werth von k die Gröſse $a' = p''$, das heiſst, das wahre Bild fällt genau in die Mitte zwischen die beiden letzten Linsen, also in die vortheilhafteste Stelle. Je näher überhaupt die Gröſse k an $-\frac{3}{2}$ genommen wird, desto näher fällt das Bild zur Mitte der beiden Linsen: und je näher k an der Grenze -1 genommen wird, desto näher fällt das Bild an die zweite Linse, welcher letzte Fall daher vermieden werden muſs, weil sonst der Staub oder die Streifen dieser zweiten Linse zu sichtbar werden.

Zweite Art. $k = -\frac{3}{2}$ gibt

$$p' = -\frac{2p}{m-2}, \quad p'' = -\frac{2p}{3m},$$

$$\Delta = \frac{p(m-1)}{m-2}, \quad \Delta' = -\frac{4p(m-1)}{3m(m-2)},$$

$$\alpha' = \frac{p}{m-2} \text{ und } \alpha' = -\frac{2p}{3(m-2)};$$

eine Einrichtung, die nahe eben so brauchbar ist, als die der ersten Art.

Für alle diese Oculare ist die Entfernung des Auges von der letzten Linse gleich $\frac{p(m-1)}{2m^2 k}$, und der Halbmesser des Gesichtsfeldes $\varphi = \frac{2\omega'}{m-1}$. Nimmt man daher, wie gewöhnlich, $\omega' = \frac{1}{4}$, so hat man

$$\varphi = \frac{1719}{m-1} \text{ Minuten.}$$

Für ein besonderes Beispiel sey $k = -1.6$, $p = 60$ Zolle und $m = -30$, so wie $z' = 0.93$ gegeben, so findet man für die Construction des Oculars

$$p' = 3.727 \text{ Zolle}, \quad \Delta = 57.76,$$
$$p'' = 1.250, \quad \Delta' = 2.647.$$

Ferner ist $\omega' = \frac{z'}{p'} = \frac{1}{4} = -\omega''$, also auch der Öffnungshalbmesser der dritten Linse $z'' = p''\omega'' = 0.312$, und das halbe Gesichtsfeld $\varphi = \frac{1719}{31} = 55.4$ Minuten. Diese Einrichtung stimmt sehr nahe mit jener, welche *Ramsden*, *Dollond*, *Fraunhofer* u. a. ihren Doppelocularen der ersten Classe für astronomische Fernröhre gegeben haben.

Sey für ein zweites Beispiel, um bei einer schwachen Vergröfserung ein desto gröfseres Gesichtsfeld zu erhalten, $k = -1.6$, $p = 25$, $m = 10$ und $z' = 1.15$ gegeben, so findet man

$$p' = 4.098, \quad \Delta = 22.541,$$
$$p'' = 1.562, \quad \Delta' = 3.099,$$
$$\omega' = \frac{z'}{p'} = 0.286 \text{ und } z'' = p''\omega'' = p''\omega' = 0.447,$$
so wie $\varphi = 178.8$ Minuten,

und diese Einrichtung stimmt ebenfalls sehr nahe mit derjenigen überein, die *Fraunhofer* seinen sogenannten Kometensuchern gegeben hat.

Endlich lassen sich noch mehrere andere Voraussetzungen für k aufstellen, die an sich interessante, aber für die Ausübung unbrauchbare Resultate herbeiführen. So gibt $k = -1$ die erste Distanz $\Delta = p$, und die zweite $\Delta' = p''$, oder hier steht die zweite Linse genau in dem gemeinschaftlichen Brennpuncte der beiden anderen, daher auch das Bild auf die zweite Linse selbst fällt. Für $K = \frac{-1}{m+2}$ hat man $\Delta = \Delta'$, oder die zweite Linse steht in der Mitte der beiden übrigen; ein Fall, der übrigens aufser unsere Betrachtung fällt, da nach dem Vorhergehenden $k > -1$ seyn soll. Soll ferner das Bild in die letzte Linse selbst fallen, so ist $k = -\frac{1}{2}(m+1)$, ein ganz unbrauchbarer Fall, da er auf eine unendliche Länge des Rohrs führt. Setzt man endlich $k = -\frac{1}{2}$, so ist $\Delta' = 0$, oder die beiden letzten Linsen fallen in eine einzige zusammen; ein Fall, der nicht mehr in diese erste Classe der Oculare gehört, da er $a' = -\frac{p}{m}$ positiv gibt, oder da für ihn das Bild zwischen die beiden ersten Linsen fällt, u. s. w.

Zweite Classe von Doppelocularen.

$\theta = -1$, α' negativ und a' positiv.

Das wahre Bild fällt zwischen die zwei ersten Linsen.

Diese Classe von Ocularen sucht man vergebens in *Euler's* zahlreichen optischen Schriften, in *Klügel's* anal.

Dioptrik, oder in sonst einem Schriftsteller über diesen Gegenstand. Der erste, der sie bei den astronomischen Instrumenten practisch einführte, war *Ramsden*, der auch in den *Philos. Transact.* f. 1783, pag. 94, die Theorie derselben aufzustellen versuchte. Er erkannte, wie es von einem Künstler seiner Art zu erwarten ist, die Nachtheile der Oculare der ersten Classe für messende Instrumente sehr wohl, indem er bemerkt, dafs jede kleine Verrückung des Oculars, die wegen den verschiedenen Augen der Beobachter, wegen der Reinigung der Linsen, u. s. w. oft unvermeidlich ist, die Rectification des ganzen Instrumentes störe; dafs zweitens das Collectivglas oder die zweite Linse das von dem Objective erzeugte Bild *verkleinere*, daher die Brennweite der dritten Linse wieder bedeutend kürzer gemacht werden müsse, wodurch selbst die feinsten Fäden des Mikrometers viel zu dick erscheinen, um noch bei sehr feinen Messungen mit Sicherheit gebraucht werden zu können, und dafs endlich bei den Ocularen der ersten Classe gleiche Intervalle der Fäden oder gleiche Anzahl der Schraubenumgänge nicht auch gleichen Intervallen des beobachteten Objectes entsprechen. Diesen Nachtheilen wollte er anfangs durch ein Zurückgehen auf die früher gebrauchte einfache Ocularlinse begegnen, wodurch aber wieder ein beinahe um die Hälfte vermindertes Gesichtsfeld eingeführt wurde, welches viele Gattungen astronomischer Beobachtungen, z. B. die Messung des Durchmessers der Sonne und des Mondes, unmöglich machte. Später suchte er diese einfache Linse, nach Art der Objective, doppelt zu machen, und aus einer convexen und concaven Linse zusammen zu setzen, fand aber bald, dafs solche Oculare eine zu grofse Öffnung fordern, einen grofsen Lichtverlust verursachen, und überdiefs von der Kugelabweichung nur schwer zu be-

freien sind. Endlich verfiel er auf den Bau solcher Oculare, für welche das Bild zwischen das Objectiv und die Collectivlinse fällt, und von denen hier, als von den Ocularen der zweiten Classe, die Rede ist. Er war mit dem Erfolg seiner zu diesem Zwecke angestellten practischen Versuche sehr zufrieden, aber nicht eben so mit dem, was er die Theorie desselben nennt, indem er sich am Ende seiner Abhandlung dahin äufsert: *that to give a proper demonstration, would require more leisure, that is consistent with the situation of one not very conversant with mathematics, and therefore the whole is only given in hopes, that some person of more abilities in the science of optics will favour us with a general theorem, in order that its application may be more universal.* Dieses offene, den grofsen Künstler ehrende Selbstgeständnifs mag die erst kürzlich aufgestellte Behauptung eines neueren optischen Schriftstellers erläutern, der es lächerlich findet, bei den ersten optischen Künstlern Englands nicht auch zugleich die ersten und höchsten Kenntnisse der Mathematik vorauszusetzen.

Gehen wir wieder auf unsere vorhergehenden Ausdrücke zurück, so hat man, wenn man m bedeutend grofs annimmt:

$$a' = -\frac{2p}{m}(k+1) \quad \text{und} \quad \Delta' = -\frac{p}{km}(2k+1).$$

Diese zwei Gleichungen bestimmen sofort die zwei sehr nahe liegenden Grenzen, zwischen welche für diese Oculare der zweiten Classe die Gröfse k fallen mufs. Da nämlich m und k negativ, und Δ' und a' positiv seyn sollen, so zeigt die erste Gleichung, dafs $k < -1$, und die zweite, dafs $k > -\frac{1}{2}$ ist, so dafs also k zwischen die Grenzen -1 und $-\frac{1}{2}$ fällt. Zugleich folgt aus der ersten Gleichung, dafs a' desto kleiner seyn, oder dafs

das Bild desto näher an die zweite Linse fallen wird, je näher k der ersten Gröfse -1 genommen wird.

Dieses vorausgesetzt, ist die von *Ramsden* gesuchte Theorie dieser zweiten Classe von Ocularen unmittelbar wieder durch die vorhergehenden Gleichungen (I.) gegeben, wenn man in ihnen k zwischen -1 und $-\frac{1}{2}$ nimmt, während für die erste Classe $k > -1$ genommen werden mufste.

Erste Art. Nimmt man den Werth von k in der Mitte zwischen jenen beiden Grenzen oder $k = -\frac{3}{4}$, so hat man für die Einrichtung des Oculars

$$p' = -\frac{4p}{2m-1}, \quad p'' = -\frac{4p}{3m},$$

$$\Delta = \frac{2p(m-1)}{2m-1}, \quad \Delta' = -\frac{4p(m-1)}{3m(2m-1)},$$

$$a' = -\frac{p}{2m-1} \text{ und } \alpha' = \frac{4p}{3(2m-1)}.$$

Zweite Art. Für $k = -\frac{10}{11}$ erhält man

$$p' = \frac{22p}{9-11m}, \quad p'' = -\frac{11p}{10m},$$

$$\Delta = -\frac{11p(m-1)}{9-11m}, \quad \Delta' = \frac{99p(m-1)}{10m(9-11m)},$$

$$a' = \frac{2p}{9-11m} \text{ und } \alpha' = -\frac{22p}{10(9-11m)}.$$

Für einen besonderen Fall der zweiten Art sey $p = 60$, $m = -30$ und $z' = 0.9735$, so hat man

$$p' = 3.894, \quad p'' = 2.200, \quad \Delta = 60.36, \quad \Delta' = 1.811,$$
$$\omega' = \frac{z'}{p'} = \frac{1}{4}, \quad z'' = p''\omega' = 0.55 \text{ und } \varphi = 55.45 \text{ Minuten}.$$

Eben so gibt $k = -\frac{10}{13}$, $p = 60$, $m = -100$ und $z' = 0.298$ für die Einrichtung des Oculars

$$p' = 1.193, \quad p'' = 0.780, \quad \Delta = 60.28, \quad \Delta'' = 0.422,$$
$$\omega' = \frac{1}{4}, \quad z'' = 0.195 \text{ und } \varphi = 17.02 \text{ Minuten}.$$

Beide Beispiele stimmen sehr nahe mit den Doppelocu-

laren überein, welche *Fraunhofer* an seinen Mittagsröhren und Meridiankreisen anzubringen pflegte.

Nähme man für k den einen Grenzwerth dieser Gröſse, oder $k = -1$, so erhält man $\Delta = p$ und $\Delta' = p'' = -\frac{p}{m}$, oder die zweite Linse steht in dem gemeinschaftlichen Brennpuncte der beiden anderen, und das Bild fällt in die zweite Linse. Für die andere Grenze $k = -\frac{1}{2}$ wird $\Delta' = 0$, oder die beiden letzten Linsen fallen zusammen, auch sind ihre Brennweiten gleich, da $p' = p'' = -\frac{2p}{m}$ ist.

Nimmt man endlich die Vergröſserungszahl m überhaupt sehr groſs gegen die Einheit, wie dieses bei den Fernröhren mit solchen Ocularen meistens der Fall ist, so gehen die Gleichungen (I.) in folgende einfachere über:

$$p' = -\frac{2p}{m}, \quad p'' = \frac{p}{km}, \quad \Delta' = -\frac{p(1+2k)}{km},$$

$$a' = -\frac{2p}{m}(1+k) \quad \text{und} \quad \alpha' = -\frac{2p}{km}(1+k).$$

Setzt man in diesem besonderen Falle für ein einzelnes Beispiel $k = -\frac{9}{10}$, so erhält man

$$p' = -\frac{2p}{m}, \quad p'' = -\frac{10p}{9m}, \quad \Delta' = -\frac{8p}{9m},$$

$$a' = -\frac{p}{5m} \quad \text{und} \quad \alpha' = +\frac{2p}{9m},$$

welche Einrichtung Hr. Director *Prechtl* in seiner Dioptrik zur Verfertigung dieser Oculare vorschlägt.

Alles Vorhergehende setzt $\theta = -1$ oder $\omega'' = -\omega'$ voraus, wodurch nämlich das Gesichtsfeld so groſs als möglich, und daher eine der wesentlichsten Bedingungen eines jeden guten Fernrohres erfüllt wird. Es gibt aber ohne Zweifel auch noch andere Voraussetzungen für θ, welche, wenn man sich zu besonderen Absichten

ein kleineres Gesichtsfeld gefallen läſst, andere Vorzüge des Fernrohres mit sich führen, und daher einer näheren Betrachtung nicht unwürdig sind.

Dritte Classe.

Setzt man $\theta = \infty$ oder $\omega' = 0$, so gehen die ersten oben gegebenen Gleichungen in folgende über:

$$p' = -\frac{p}{k+1}, \quad p'' = \frac{p}{km}, \quad \Delta = 0, \quad \Delta' = -\frac{(m-1)p}{km},$$

$$a' = -p \quad \text{und} \quad a' = -\frac{p}{k}.$$

Alle Fernröhre dieser dritten Classe mit drei Linsen geben also, wegen $\Delta = 0$, ein *doppeltes Objectiv*.

Nimmt man, wie bisher immer vorausgesetzt wurde, alle Brennweiten positiv, so zeigt der Ausdruck für Δ', daſs k eine negative Zahl seyn müsse, die gröſser als die Einheit ist. Die Vergröſserung dieser Fernröhre ist $m = \frac{p}{kp''}$, also kleiner als bei den gemeinen astronomischen Fernröhren mit zwei Linsen, so wie auch das Gesichtsfeld $\varphi = \frac{3438\,\omega''}{m-1}$ um die Hälfte kleiner, als bei den Fernröhren der zwei ersten Classen, daher wir uns nicht weiter bei ihnen aufhalten wollen.

Vierte Classe.

Setzt man $\theta = 0$ oder $\omega'' = 0$, so kann die Öffnung der letzten Linse so klein als möglich seyn, und man erhält

$$p' = -\frac{p}{k+m}, \quad p'' = \frac{p}{km},$$

$$a' = -\frac{p(k+1)}{k+m}, \quad a' = -\frac{p(k+1)}{k(k+m)},$$

$$\Delta = \frac{p(m-1)}{k+m} \quad \text{und} \quad \Delta' = -\frac{p(m-1)}{m(k+m)},$$

wo wieder k negativ und kleiner als 4 seyn muſs. Für

$k = -1$ hat man $\Delta = p$ und $\Delta' = p''$, oder die zweite Linse steht in dem gemeinschaftlichen Brennpuncte der beiden anderen, u. s. w.

Fünfte Classe.

Setzt man $\theta = m$, so ist $\varphi = \omega' = 859$ Minuten für $\omega' = \frac{1}{4}$, und man hat $\omega'' = \frac{m}{4}$, oder die Öffnung der letzten Linse sehr groſs, und zur Bestimmung des Fernrohres

$$p' = -\frac{p}{k}, \quad p'' = \frac{p}{km},$$

$$\Delta = -\frac{p}{k}, \quad \Delta'' = [k(1-m) - m] \cdot \frac{p}{k^2 m};$$

$k = -1$ gibt wieder $a' = \alpha' = 0$, $p' = \Delta$ und $p'' = \Delta'$, so wie $p' = p$, wie zuvor.

* * *

Ohne diesen Gegenstand weiter zu verfolgen, wird es angemessener seyn, zu bemerken, daſs alle vorhergehenden Betrachtungen noch gar keine Rücksicht auf denjenigen Theil der Farbenzerstreuung, der von den Ocularen entsteht, genommen haben, denn die Zerstreuung des Objectivs wurde durch die Annahme einer Doppellinse bereits als aufgehoben vorausgesetzt. Da aber dem ungeachtet die in den beiden ersten Classen gefundenen Oculare schon so nahe mit denen von *Dollond*, *Ramsden*, *Fraunhofer* u. a. übereinstimmend waren, so folgt schon daraus, daſs die Farbenzerstreuung der *Oculare* wohl nur sehr wenig auf die Brauchbarkeit des Fernrohres nachtheilig einwirken, und daher öfters, wenn wesentlichere Vortheile berücksichtiget werden, ohne merkbaren Fehler gänzlich vernachlässiget werden könne. Dort aber, wo diese Rücksicht, ohne anderen Forderungen zu nahe zu treten, genommen werden kann, wird es auch nicht mehr erlaubt seyn, sie zu übergehen, und

es ist daher zur Vervollständigung dieses Gegenstandes noch übrig, die zweckmäſsigste Einrichtung der *achromatischen* Doppeloculare jener beiden ersten Classen zu suchen.

Die vorhergehenden Gleichungen (A) geben

$$\frac{p''}{\alpha'} = \frac{-[\theta - m + (\theta - 1)\,k]}{m\,(\theta - 1)\,(k + 1)},$$

wo $k = \frac{a'}{\alpha'}$ und $\theta = \frac{\omega''}{\omega'}$ angenommen wurde.

Die Vernichtung des farbigen Randes des Bildes aber wird nach bekannten optischen Gründen durch die Bedingungsgleichung gegeben:

$$0 = \omega' + \frac{p''\omega''}{\alpha'} \quad \text{oder} \quad \frac{p''}{\alpha'} = -\frac{1}{\theta}.$$

Setzt man daher diese beiden Werthe von $\frac{p''}{\alpha'}$ einander gleich, so erhält man

$$\frac{\theta - m + (\theta - 1)\,k}{m\,(\theta - 1)\,(k + 1)} = \frac{1}{\theta},$$

und durch diese Gleichung, die also den vorhergehenden Gleichungen (A) als die Bedingung der Farbenlosigkeit noch hinzugesetzt werden muſs, wird zugleich die Gröſse k, die jetzt nicht mehr willkürlich ist, bestimmt, so daſs man hat

$$k = \frac{2m\theta - \theta^2 - m}{(\theta - 1)\,(\theta - m)}.$$

Substituirt man daher diesen Werth von k in den allgemeinen Gleichungen (A), so erhält man für die Construction der achromatischen Doppeloculare die Ausdrücke:

$$\left.\begin{array}{l}
p' = -\frac{p(\theta-1)(\theta-m)}{m\,(m-1)},\quad \Delta = -\frac{p(\theta-m)}{m},\quad \alpha' = -\frac{p\theta}{m} \\[2ex]
p'' = -\frac{p\,(\theta-1)\,(\theta-m)}{m\,(\theta^2 - 2m\theta + m)},\quad \Delta' = \frac{p\,(\theta-1)^2.\,(\theta-m)}{m\,(\theta^2 - 2m\theta + m)}, \\[2ex]
\qquad a' = \frac{p\,\theta\,(\theta-1)\,(\theta-m)}{m\,(\theta^2 - 2\,m\,\theta + m)}
\end{array}\right\}\ldots\text{(II.)}$$

Diese allgemeinen Gleichungen gehören für beide Classen der Oculare, oder vielmehr für alle Gattungen von Fernröhren mit drei Linsen. Um daher auch hier wieder die vorzüglichsten Classen derselben besonders zu betrachten, so hat man für die

Erste Classe

α' positiv und a' negativ.

Das Bild fällt zwischen die zwei letzten Linsen.

Hier werden also, da die unbestimmte Gröſse k nicht mehr vorkömmt, die Eintheilungen nach den Werthen von θ geordnet werden müssen, und da für diese erste Classe a' negativ und p positiv, so wie m eine an sich negative Gröſse ist, so muſs θ negativ seyn. Da ferner für groſse m der Werth von $\alpha' = -\frac{p\theta(\theta-1)}{m(1-2\theta)}$ positiv seyn soll, so muſs auch $\frac{\theta(\theta-1)}{1-2\theta}$ positiv seyn, woraus folgt, daſs θ zwischen die Grenzen $\theta = 0$ und $\theta = -\infty$ fällt. Allein diese Grenzen müssen noch viel enger zusammen gezogen werden; denn ist ω' die gröſste der beiden Gröſsen ω' und ω'', so soll immer $\omega'' < \omega'$, oder doch höchstens $\omega'' = \omega'$, das heiſst, höchstens $\theta = -1$ seyn, daher für diese erste Classe die Gröſse θ zwischen die Grenzen 0 und -1 fallen muſs.

Erste Art. Sey $\theta = -1$, so hat man durch die Gleichungen (II.)

$$p' = -\frac{2p(m+1)}{m(m-1)}, \quad \Delta = \frac{p(m+1)}{m}, \quad \alpha' = \frac{p}{m},$$

$$p'' = -\frac{2p(m+1)}{m(3m+1)}, \quad \Delta' = -\frac{4p(m+1)}{m(3m+1)}, \quad a' = -\frac{2p(m+1)}{m(3m+1)},$$

also auch $a' = p''$ und $\Delta' = 2p''$.

Es ist merkwürdig, daſs diese Ausdrücke durchaus mit jenen identisch sind, welche wir schon oben für die

erste Art der ersten Classe gefunden haben, so dafs durch die blofse Stellung des Bildes in der Mitte zwischen den beiden letzten Linsen die Farbenlosigkeit des Bildes von selbst erreicht wird. Noch hat diese erste Art den Vortheil, dafs sie das gröfstmögliche Gesichtsfeld, nämlich $\varphi = \frac{6876\,\omega'}{m-1}$ Minuten gibt.

Sey für einen besonderen Fall $\theta = -1$, $p = 70$, $m = -100$ und $z' = 0.3$, so erhält man
$p' = 1.372$, $\Delta = 69.300$, $\omega' = 0.219 = -\omega'$,
$p'' = 0.463$, $\Delta' = 0.927$, $z'' = 0.101$
und $\varphi = 14.91$ Minuten, ganz mit *Dollond*, *Fraunhofer* u. a. übereinstimmend. Andere Werthe von θ zwischen o und -1 geben andere Einrichtungen, die aber alle, wenn ein grofses Gesichtsfeld gefordert wird, dieser ersten Art nachstehen.

Zweite Classe.

α' negativ und a' positiv.

Das Bild fällt zwischen die zwei ersten Linsen.

Ein positives a' gibt auch ein positives θ, und ein negatives α' gibt auch $\frac{\theta(\theta-1)}{1-2\theta}$ negativ, also soll θ zwischen o und $+\infty$ fallen. Da aber, nach dem Vorhergehenden, die Gröfse θ nie gröfser als die Einheit seyn soll, so mufs θ zwischen o und $+1$ fallen. Ja selbst diese Grenzen müssen noch enger zusammen gezogen werden. Da nämlich $\frac{\theta(\theta-1)}{1-2\theta}$ negativ seyn soll, so darf θ nicht zwischen $+\frac{1}{2}$ und $+1$ fallen, also fallen alle Werthe von θ zwischen o und $+\frac{1}{2}$.

Bei dieser Rücksicht auf die Farbenzerstreuung ist also, für die Doppeloculare der zweiten Classe, der für die Gröfse des Gesichtsfeldes günstigste Fall $\theta = -1$ ganz *unmöglich*, oder wenn man bei diesen Ocularen

den farbigen Rand wegbringen will, so kann dieses *nur auf Kosten des Gesichtsfeldes* geschehen, da selbst die Grenze $\theta = \frac{1}{2}$ schon auf unmögliche Resultate führt.

Erste Art. $\theta = \frac{1}{4}$ gibt nach den Gleichungen (II.)

$$p' = \frac{3p(1-4m)}{16m(m-1)}, \quad \Delta = -\frac{p(1-4m)}{4m}, \quad a' = -\frac{p}{4m},$$
$$p'' = \frac{3p(1-4m)}{m(1+8m)}, \quad \Delta' = \frac{9p(1-4m)}{4m(1+8m)}, \quad \alpha = -\frac{3p(1-4m)}{4m(1+8m)},$$

also für nur etwas gröſsere m sogar $p' < p''$. Solche Dopploculare aber, für welche die Brennweite der zweiten Linse kleiner, als die der dritten ist, kennt weder *Fraunhofer*, noch sonst einer der übrigen Künstler, weil sie auch in der That den vorhergehenden in Beziehung auf die Ausübung weit nachstehen, und man sich immer eine kleine, für unsere Sinne noch unmerkliche Farbenzerstreuung gefallen lassen wird, um nur das Gesichtsfeld nicht zu sehr zu verkleinern. Daraus folgt also, daſs die Oculare der zweiten Classe, wenn sie nicht ein kleineres Gesichtsfeld geben sollen, von der Farbenabweichung nicht befreit werden können, und daſs auch die besten Künstler bei der Verfertigung derselben keine Rücksicht auf diese Farbenabweichung genommen haben, eben so wenig als auf die noch viel geringere Abweichung wegen der sphärischen Gestalt der Ocularlinsen, wie schon daraus folgt, daſs diese Linsen durchaus *planconvex* sind, da doch die letztgenannte Abweichung nur durch zwei verschiedene Krümmungshalbmesser der Linsen weggebracht werden kann.

Ganz anders aber würde sich die Sache verhalten, wenn von solchen Fernröhren mit drei convexen Linsen die Rede ist, welche *zwei* wahre Bilder haben, und für welche daher die Gröſse $k = \frac{a'}{\alpha'}$ positiv ist, während sie bisher immer negativ vorausgesetzt wurde. Solche

Fernröhre mit drei Linsen und zwei wahren Bildern wurden bisher noch nicht von den Künstlern ausgeführt, und wir wollen daher zum Schlusse dieses Gegenstandes die Gründe aufsuchen, welche sie an dieser Ausführung gehindert haben mögen.

Die dritte der Gleichungen (A) zeigt, daſs das positive $\theta > 1$ seyn müsse, da für gröſsere Werthe von m die Gröſse h negativ, und da das positive $k < 4$ und a' ebenfalls positiv seyn soll. Aus $\theta > + 1$ folgt aber, daſs das Gesichtsfeld dieser Fernröhre immer nur *sehr klein* seyn kann. Ferner ist aus bekannten optischen Gründen der Halbmesser R der Kugelabweichung, wenn man die *Euler*'sche Bedeutung der Gröſsen μ, ν und λ beibehält:

$$R = \frac{mx^3}{4p^3}\left[\mu\lambda + \frac{\mu' p' (k+1)^2}{k^4 p} \cdot [\lambda (k+1)^2 + \nu k] + \frac{\mu'' \lambda''}{k^3 m}\right].$$

Da aber in diesem Ausdrucke alle durch μ, μ' und μ'' multiplicirten Gröſsen durchaus *positiv* sind, so kann R nie gänzlich verschwinden, und es bleibt daher, um wenigstens den Werth von R sehr klein zu machen, nichts übrig, als die Gröſse p sehr groſs zu nehmen, wodurch aber die Länge des Fernrohres ebenfalls sehr groſs, und zum Gebrauche unbequem wird. Endlich hat man zur Vernichtung der Farben die Bedingungsgleichung

$$\frac{p''}{a'} + \frac{1}{\theta} = 0,$$

der aber auch nicht genug geschehen kann, da die in ihr enthaltenen Gröſsen p', a' und θ, nach der Voraussetzung, sämmtlich positiv sind. Diese Gattung von Fernröhren muſs daher verworfen werden, da sie bei einer viel zu groſsen Länge doch nur ein sehr kleines Gesichtsfeld geben, und überdieſs weder von der Abweichung wegen der Gestalt der Linsen, noch von der Farbenzerstreuung befreit werden können.

III.
Über die Integration der sogenannten linearen Differenzialgleichung der n^{ten} Ordnung mit constanten Coefficienten, wenn die dabei zu gebrauchende Hülfsgleichung gleiche Wurzeln darbietet;

von

Karl Lamla.

Das sinnreiche und gegenwärtig wohl allgemein bekannte Verfahren, durch welches *Lagrange* das vollständige Integral der Differenzialgleichung

$$(1)\quad \frac{d^n y}{dx^n} + P_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + P_2 \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \ldots$$
$$\ldots + P_{n-1} \frac{dy}{dx} + P_n y = X,$$

worin P_1, P_2, ... P_{n-1}, P_n und X gegebene Functionen der Variablen x bedeuten, und dx constant gedacht wird, aus n particulären, auf die Form $y = f(x)$ gebrachten, unter einander in keinem beständigen Verhältnisse stehenden Integralien

$$y = Y_1,\quad y = Y_2,\quad y = Y_3,\quad \ldots\quad y = Y_n$$

der einfacheren Differenzialgleichung

$$(2)\quad \frac{d^n y}{dx^n} + P_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + P_2 \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \ldots$$
$$\ldots + P_{n-1} \frac{dy}{dx} + P_n y = 0$$

darzustellen gelehrt hat, erfordert blofs (man sehe *Ettingshausen's* Vorlesungen, Bd. I., S. 391) die Bestimmung der Unbekannten X_1, X_2, X_3, ... X_n aus den n Gleichungen des ersten Grades:

$$(3)\quad \begin{aligned} &Y_1 X_1 + Y_2 X_2 + Y_3 X_3 + \ldots + Y_n X_n = 0 \\ &\frac{dY_1}{dx} X_1 + \frac{dY_2}{dx} X_2 + \frac{dY_3}{dx} X_3 + \ldots + \frac{dY_n}{dx} X_n = 0 \\ &\frac{d^2Y_1}{dx^2} X_1 + \frac{d^2Y_2}{dx^2} X_2 + \frac{d^2Y_3}{dx^2} X_3 + \ldots + \frac{d^2Y_n}{dx^2} X_n = 0 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\frac{d^{n-2}Y_1}{dx^{n-2}} X_1 + \frac{d^{n-2}Y_2}{dx^{n-2}} X_2 + \frac{d^{n-2}Y_3}{dx^{n-2}} X_3 + \ldots \\ &\qquad\qquad \ldots + \frac{d^{n-2}Y_n}{dx^{n-2}} X_n = 0 \\ &\frac{d^{n-1}Y_1}{dx^{n-1}} X_1 + \frac{d^{n-1}Y_2}{dx^{n-1}} X_2 + \frac{d^{n-1}Y_3}{dx^{n-1}} X_3 + \ldots \\ &\qquad\qquad \ldots + \frac{d^{n-1}Y_n}{dx^{n-1}} X_n = X. \end{aligned}$$

Hat man diese gefunden, so ist

$$(4)\quad y = Y_1 \int X_1\, dx + Y_2 \int X_2\, dx + Y_3 \int X_3\, dx + \ldots \\ \ldots + Y_n \int X_n\, dx,$$

worin jedes der Integralien $\int X_1\, dx$, $\int X_2\, dx$, etc. eine unbestimmte Constante mit sich führt, das allgemeine Integral der Differenzialgleichung (1).

Will man diese Methode auf die Integration der Differenzialgleichung

$$(5)\quad \frac{d^n y}{dx^n} + A_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + A_2 \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \ldots \\ \ldots + A_{n-1} \frac{dy}{dx} + A_n y = X,$$

worin A_1, A_2, ... A_{n-1}, A_n beständige Gröſsen sind, und X die frühere Bedeutung hat, anwenden, so handelt es sich zuerst um die Auffindung von n particulären Integralien derjenigen Gleichung, in welche (5) übergeht, wenn man die Nulle statt X setzt. Substituirt man zu diesem Ende in die genannte Gleichung für y den Ausdruck e^{ux}, wobei e die Grundzahl des natürlichen Logarithmensystems, und u eine noch unbestimmte Constante ist, so zeigt sich sogleich, daſs $y = e^{ux}$ durch

alle Werthe von u, welche der Gleichung

$$(6)\quad u^n + A_1 u^{n-1} + A_2 u^{n-2} + \ldots + A_{n-1} u + A_n = 0$$

Genüge leisten, in eine Auflösung der Differenzialgleichung (5) für $X = 0$ verwandelt wird, und man hat demnach, wenn a_1, a_2, a_3, ... a_n die n Wurzeln der Gleichung (6) vorstellen, in dem gegenwärtigen Falle

$$Y_1 = e^{a_1 x},\ Y_2 = e^{a_2 x},\ Y_3 = e^{a_3 x},\ \ldots Y_n = e^{a_n x}.$$

Was die Auflösung der Gleichungen (3) betrifft, so läſst sie sich für diese Werthe der Gröſsen

$$Y_1,\ Y_2,\ Y_3,\ \ldots\ Y_n$$

sehr leicht auf dem in *Ettingshausen's* Vorlesungen, I. Bd. S. 176 betretenen, ebenfalls von *Lagrange* zuerst gewiesenen Wege zu Stande bringen. (Man sehe unter andern auch *Lacroix Traité du calc. diff. et du calc. intégral*, *T. II. pag.* 330). Bezeichnet man das Polynom

$$n u^{n-1} + (n-1) A_1 u^{n-2} + (n-2) A_2 u^{n-3} + \ldots + A_{n-1}$$

durch $\varphi(u)$, so findet man

$$X_1 = \frac{X e^{-a_1 x}}{\varphi(a_1)},\ X_2 = \frac{X e^{-a_2 x}}{\varphi(a_2)},\ \ldots X_n = \frac{X e^{-a_n x}}{\varphi(a_n)},$$

mithin

$$(7)\quad y = \frac{e^{a_1 x}}{\varphi(a_1)} \int X e^{-a_1 x} dx + \frac{e^{a_2 x}}{\varphi(a_2)} \int X e^{-a_2 x} dx + \ldots$$
$$\ldots + \frac{e^{a_n x}}{\varphi(a_n)} \int X e^{-a_n x} dx$$

für das allgemeine Integral der Differenzialgleichung (5).

Statt $\varphi(a_1)$, $\varphi(a_2)$, ... $\varphi(a_n)$ kann man auch die Producte

$$(a_1 - a_2)(a_1 - a_3) \ldots (a_1 - a_n)$$
$$(a_2 - a_1)(a_2 - a_3) \ldots (a_2 - a_n)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$(a_n - a_1)(a_n - a_2) \ldots (a_n - a_{n-1})$$

setzen, welchen die genannten Gröſsen gleich kommen.

Die Formel (7) ist in ihrer gegenwärtigen Gestalt unbrauchbar, wenn einige der Wurzeln $a_1, a_2, a_3, \ldots$ der Hülfsgleichung (6) einander gleich sind; ich will versuchen, dieselbe durch eine einfache Umstaltung auf den erwähnten Fall auszudehnen. Ich nehme an, r der Gröfsen $a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots$ z. B. die r ersten derselben seyen einander gleich, und beschäftige mich defshalb blofs mit dem Theile

$$(8) \quad \frac{e^{a_1 x}}{\varphi(a_1)} \int X e^{-a_1 x}\, dx + \frac{e^{a_2 x}}{\varphi(a_2)} \int X e^{-a_2 x}\, dx + \ldots$$
$$\ldots + \frac{e^{a_r x}}{\varphi(a_r)} \int X e^{-a_r x}\, dx = T,$$

auf den dieser Umstand Einflufs hat. Um seinen Werth für den Fall $a_1 = a_2 = a_3 = \ldots = a_r$ kennen zu lernen, lasse ich vor der Hand die Gröfsen

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots\ a_r$$

eine arithmetische Progression bilden, deren Differenz $-w$ ist; d. h. ich setze

$$a_2 = a_1 - w,\quad a_3 = a_1 - 2w,\quad a_4 = a_1 - 3w,\ \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ a_r = a_1 - (r-1)w,$$

und stelle die r Producte

$$(a_1 - a_{r+1})(a_1 - a_{r+2}) \ldots\ldots (a_1 - a_n)$$
$$(a_2 - a_{r+1})(a_2 - a_{r+2}) \ldots\ldots (a_2 - a_n)$$
$$(a_3 - a_{r+1})(a_3 - a_{r+2}) \ldots\ldots (a_3 - a_n)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(a_r - a_{r+1})(a_r - a_{r+2}) \ldots\ldots (a_r - a_n)$$

durch $\psi(a_1), \psi(a_2), \psi(a_3), \ldots \psi(a_r)$ vor, so wird, wie eine leichte Überlegung lehrt:

$$\varphi(a_1) = \quad (r-1)!\, \psi(a_1) \,.\, w^{r-1},$$
$$\varphi(a_2) = -(r-2)!\, \psi(a_2) \,.\, w^{r-1},$$
$$\varphi(a_3) = +\, 2!\,(r-3)!\, \psi(a_3) \,.\, w^{r-1},$$
$$\varphi(a_4) = -\, 3!\,(r-4)!\, \psi(a_4) \,.\, w^{r-1},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\varphi(a_{r-1}) = (-1)^{r-2}(r-2)!\,\psi(a_{r-1})\,.\,w^{r-1},$$
$$\varphi(a_r) = (-1)^{r-1}(r-1)!\,\psi(a_r)\,.\,w^{r-1},$$

wobei im Allgemeinen nach der von *Kramp* eingeführten Bezeichnung $\rho!$ statt des Productes $1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\ldots(\rho-1)\rho$ steht.

Der Ausdruck (8) erhält hiedurch, wenn man zugleich den Factor $e^{a_r x}$ von demselben absondert, und der Kürze wegen U statt $Xe^{-a_1 x}$ schreibt, die Gestalt

$$T = \frac{e^{a_r x}}{w^{r-1}}\Big[\frac{e^{(r-1)wx}}{(r-1)!\,\psi(a_1)}\int U\,dx$$
$$-\frac{e^{(r-2)wx}}{1!\,(r-2)!\,\psi(a_2)}\int Ue^{wx}\,dx + \frac{e^{(r-3)wx}}{2!\,(r-3)!\,\psi(a_3)}\int Ue^{2wx}\,dx$$
$$\ldots + \frac{(-1)^{r-1}}{(r-1)!\,\psi(a_r)}\int Ue^{(r-1)wx}\,dx\Big];$$

oder, wenn man noch jedes Glied rechter Hand des Gleichheitszeichens mit $(r-1)!$ multiplicirt, und im Allgemeinen den Binomialcoefficienten

$$\frac{(r-1)!}{\rho!\,(r-\rho)!} = \frac{(r-1)(r-2)\ldots(r-\rho)}{1\,.\,2\ldots\ldots\rho}$$

durch das Symbol $\binom{r-1}{\rho}$ vorstellt, die Gestalt

$$(9)\quad T = \frac{e^{a_r x}}{(r-1)!\,\psi(a_1)}\Big[\left(\frac{e^{wx}}{w}\right)^{r-1}\int U\,dx$$
$$-\frac{\psi(a_1)}{\psi(a_2)}\,.\binom{r-1}{1}\left(\frac{e^{wx}}{w}\right)^{r-2}\int U\left(\frac{e^{wx}}{w}\right)dx$$
$$+\frac{\psi(a_1)}{\psi(a_3)}\,.\binom{r-1}{2}\left(\frac{e^{wx}}{w}\right)^{r-3}\int U\left(\frac{e^{wx}}{w}\right)^2 dx$$
$$-\ldots + (-1)^{r-1}\,.\,\frac{\psi(a_1)}{\psi(a_r)}\,.\int U\left(\frac{e^{wx}}{w}\right)^{r-1}dx\Big].$$

Entwickelt man die Quotienten $\frac{\psi(a_1)}{\psi(a_2)}, \frac{\psi(a_1)}{\psi(a_3)}, \ldots$ sämmtlich nach den steigenden Potenzen von w, so wird T in eine nach denselben Potenzen geordnete Reihe umgestaltet, deren erstes Glied T' offenbar aus dem rech-

ter Hand des Gleichheitszeichens in (9) befindlichen Ausdrucke hervorgeht, wenn man daselbst die Quotienten $\frac{\psi(a_1)}{\psi(a_2)}$, $\frac{\psi(a_1)}{\psi(a_3)}$, ... wegläſst. Da ich im Folgenden, dem Zwecke gegenwärtiger Untersuchung gemäſs, ohnehin $w = 0$ setzen werde, wodurch sich der Ausdruck T auf genanntes erste Glied reducirt, so ist bloſs nöthig, dieses weiter zu transformiren, wozu folgende Bemerkung behülflich seyn wird.

Sind Y und Z beliebige Functionen von x; A was immer für eine constante Gröſse, und m eine ganze positive Zahl, so ist

$$\alpha) \qquad \int U(A-Z)^m\, dx =$$

$$= A^m \int U dx - \binom{m}{1} A^{m-1} \int UZ\, dx + \binom{m}{2} A^{m-2} \int U Z^2\, dx$$
$$- \ldots, + (-1)^m \int U Z^m\, dx.$$

Aber es ist auch

$$A - Z = A - K - (Z - K);$$

folglich, wenn man, in so ferne K constant ist, in der Gleichung α) $A-K$ statt A, und $Z-K$ statt Z schreibt:

$$\beta) \qquad \int U(A-Z)^m\, dx =$$

$$= (A-K)^m \int U\, dx - \binom{m}{1}(A-K)^{m-1} \int U(Z-K)\, dx$$
$$+ \binom{m}{2}(A-K)^{m-2} \int U(Z-K)^2\, dx$$
$$- \ldots, + (-1) \int U(Z-K)^m\, dx.$$

Die in den Gleichungen α) und β) rechter Hand des Gleichheitszeichens sich befindenden Gröſsen müssen als geschlossene Entwickelungen eines und desselben Integrales nothwendig identisch seyn, d. h. die zweite muſs sich nach gehöriger Entwickelung der Potenzen von $Z-K$ genau auf die erste reduciren, was auch immer A bedeute: da nun A hinter dem Integralzeichen gar nicht erscheint, so muſs die Indentität beider Aus-

drücke auch noch bestehen, wenn man A irgend eine Function von x bedeuten läfst, wofern nur K constant bleibt. Es ist also für jedes variable V

$$\gamma)\quad V^m \int U\,dx - \binom{m}{1} V^{m-1} \int U Z\,dx + \binom{m}{2} V^{m-2} \int U Z^2\,dx - \dots \dots + (-1)^m \int U Z^m\,dx =$$

$$= (V-K)^m \int U\,dx - \binom{m}{1} (V-K)^{m-1} \int U(Z-K)\,dx + \binom{m}{2} (V-K)^{m-2} \int U(Z-K)^2 dx - \dots \dots + (-1)^m \int U(Z-K)^m\,dx.$$

Setzt man nun in γ)

$$V = Z = \frac{e^{wx}}{w}, \quad m = r - 1, \quad K = \frac{1}{w},$$

so hat man

$$(10)\quad T' = \frac{e^{a_r x}}{(r-1)!\,\psi(a_1)} \Big[\left(\frac{e^{wx}-1}{w}\right)^{r-1} \int U\,dx - \binom{r-1}{1} \left(\frac{e^{wx}-1}{w}\right)^{r-2} \int U \left(\frac{e^{wx}-1}{w}\right) dx + \binom{r-1}{2} \left(\frac{e^{wx}-1}{w}\right)^{r-3} \int U \left(\frac{e^{wx}-1}{w}\right)^2 dx - \dots \dots + (-1)^{r-1} \int U \left(\frac{e^{wx}-1}{w}\right)^{r-1} dx \Big].$$

Läfst man hier w verschwinden, wodurch bekanntlich $\frac{e^{wx}-1}{w}$ in x übergeht, so hat man, weil jetzt zwischen den Wurzeln $a_1, a_2, a_3, \dots a_r$ kein Unterschied besteht, wenn man wieder $X e^{-a_1 x}$ an die Stelle von U bringt:

$$(11)\quad T = \frac{e^{a_1 x}}{(r-1)!\,\psi(a_1)} \Big[x^{r-1} \int X e^{-a_1 x}\,dx - \binom{r-1}{1} x^{r-2} \int X x e^{-a_1 x}\,dx + \binom{r-1}{2} x^{r-3} \int X x^2 e^{-a_1 x}\,dx - \dots \dots + (-1)^{r-1} \int X x^{r-1} e^{-a_1 x}\,dx \Big];$$

welche Formel man sich auch erlauben darf kürzer so zu schreiben:

$$(12)\quad T = \frac{e^{a_1 x}}{(r-1)!\,\psi(a_1)} \int X e^{-a_1 x} (A-x)^{r-1} + e^{a_1 x}(C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \ldots + C_r x_r),$$

wobei A bei der Verrichtung der Integration als constant behandelt, nach der Integration aber mit x vertauscht werden muſs, und dem Integral wegen der Anwesenheit der r Constanten C_0, C_1, C_2, ... C_r keine Constante mehr beizufügen ist. Der richtige Gebrauch der abgekürzten Formel (12) erheischt jedoch, daſs man die Formel (11) stets im Auge behalte.

IV.

Ein neuer galvanischer Multiplicator;

von

Dr. *Stephan Marianini* *).

Alle Physiker, welche die schöne Erfahrung *Oersted's* über die Einwirkung der Electricität auf einen Magnet wiederholt haben, erkannten, daſs sich die Magnetnadel zum Messen der Stärke electrischer Ströme anwenden lasse, und der vortreffliche Physiker *Schweigger* wurde zuerst durch den Umstand, daſs ein Metalldraht, dessen beide Enden mit den Polen eines Electromotors in Verbindung stehen, in jedem Querschnitte gleich stark auf einen Magnet einwirkt, auf den glücklichen Gedanken geleitet, den Verbindungsdraht mehrere Male über und unter einer Magnetnadel vorbeigehen zu

*) Vom Herrn Verfasser in italienischer Sprache mitgetheilt, und vom Herausgeber *A. B.* übersetzt.

lassen, um den Effect zu steigern. Da man nun eine Magnetnadel mit einem über oder unter ihr vorbeigehenden Metalldraht Voltimeter oder Galvanometer genannt hat, so erhielt das *Schweigger*'sche Instrument den Namen *multiplicirender Voltimeter* oder *Galvanometer* *).

Von dem Wunsche beseelt, einiger Erfahrung, über die ich schon öfter den gelehrten Verein zu unterhalten die Ehre hatte, eine gröfsere Ausdehnung zu geben, verschaffte ich mir von Mailand einen Multiplicator, erkannte aber bald, dafs er an Güte die einfachen von mir bisher gebrauchten Galvanometer nur wenig übertraf. Als ich über seine Einrichtung näher nachdachte, glaubte ich zu bemerken: 1) dafs der Metalldraht nicht so angebracht sey, um seine ganze Wirkung äufsern zu können; 2) dafs im Allgemeinen eine solche Verbindung der Drähte da, wo es sich um etwas genaue Beobachtungen handelt, nicht den besten Dienst leiste.

1. Die Anordnung des Leitungsdrahtes, der wie der Aufzug zu einem Gewebe über und unter der Nadel angebracht ist, so dafs alle auf die Magnetnadel einwirkenden Theile unter einander und zur Axe der Magnetnadel parallel, oder doch nahe so liegen, ist gewifs nicht die beste, um durch ein bestimmtes Drahtstück die gröfste Ablenkung der Magnetnadel hervorzubringen. Denn im ersten Augenblicke, wo die Nadel vom electrischen Strome afficirt wird, sind die Theile des Drahtes, welche sich mit der Axe der Magnetnadel in einerlei verticaler Ebene befinden, die einzigen, welche eine directe Wirkung darauf ausüben, während alle anderen nur schief einwirken, und daher weniger vermögen, indem nach dem *Biot*'schen Gesetze die Wirkung

---

*) Ich habe statt dieser Benennung lieber die in Deutschland übliche »Multiplicator« beibehalten. *B.*

des Elementartheilchens des Drahtes auf jedes südliche oder nördliche Elementartheilchen der Nadel desto kleiner ist, je mehr das Quadrat der Entfernung wächst, und je gröſser der Sinus des Winkels ist, den diese Entfernung mit der Richtung des Fadens macht. Sobald sich aber die Magnetnadel zu bewegen anfängt, wirken alle Fäden ohne Ausnahme schief auf dieselbe.

Aus diesem Grunde glaubte ich besser zu thun, wenn ich den Verbindungsdraht so anordnete, daſs sich alle Fäden, sie mögen unter der Nadel vorbeigehen oder über derselben, in der Mitte durchkreuzen, so daſs es ober und unter der Magnetnadel einen Draht gibt, der mit ihr parallel läuft, und in einerlei verticalen Ebene mit ihrer Axe liegt, wenn sie ihre natürliche Richtung hat; eben so einen anderen, der mit ihr parallel steht, wenn sie z. B. um einen Grad abgelenket worden ist; und einen dritten, wenn die Ablenkung drei Grade beträgt, u. s. f. Verfährt man auf diese Art, so gibt es immer einen Draht, der mit seiner ganzen Stärke auf die Magnetnadel wirkt, wie auch immer ihre Ablenkung beschaffen seyn mag, wenn sie nur nicht aus den Windungen ganz heraustritt; alle anderen Drähte wirken aber schief darauf ein.

2. Das *Schweigger*'sche Instrument kann nicht am besten zum Ziele führen, wenn es sich darum handelt, mit gehöriger Genauigkeit die durch einen electrischen Strom bewirkte Ablenkung zu messen. Sieht man auf die Magnetnadel, indem man das Auge vertical darüber hält, so ist die Windung häufig im Sehen hinderlich; will man ihr ausweichen, so hält es schwer, die Ablenkung richtig abzusehen, indem sich die Nadel in einer Ebene bewegt, die von der Ebene des getheilten Bogens etwas absteht; entfernt sich der beobachtete Punct vom Auge, so scheint er weiter zu gehen, als er wirk-

lich geht; bewegt sich die Nadel in entgegengesetzter Richtung, so erscheint die Abweichung dem Auge kleiner.

Um diesen Übelstand zu heben, glaubte ich gut zu thun, dafs ich die Theilung seitwärts anbrachte, und am Mittelpuncte der Nadel eine kleine Borste befestigte, die sich mit derselben bewegt und ihre Ablenkung anzeigt.

Der Hauptheil meines Instrumentes ist ein kleiner messingener Rahmen von nahe 14 Centimeter (5,3 W. Z.) Länge und 11 Centim. (4,2 W. Z.) Breite. Jede der zwei breiteren Seiten besteht aus zwei Leisten, einer unteren und einer oberen, die um 8 Min. (3 L.) von einander abstehen; die zwei kleineren bestehen aus verticalen Messingstreifen, die kreisförmig gebogen sind. Da über diese der Metallfaden gewickelt wird, so müssen sie genau mit einem Seidenfaden umwunden werden, damit der Leitungsdraht das Messing nicht berühre, und die Windungen desselben fester an ihrem Platze bleiben.

Die mit Seide übersponnenen Kupferdrähte, die man bei den gewöhnlichen Multiplicatoren braucht, wenigstens jene, die ich erhalten konnte, fand ich so spröde, dafs ich sie nicht gehörig über den Rahmen spannen konnte. Ich bediente mich daher eines versilberten und überfirnifsten Silberdrahtes, und wand ihn so um den Rahmen, dafs alle Windungen, sie mögen unter oder über der Nadel vorbeigehen, sich in der Mitte durchkreuzen.

In der Mitte von einer der längeren Seiten des Rahmens ist eine kleine darauf senkrechte messingene Leiste angebracht, die bis zum Vereinigungspunct der Drähte reicht, und den Stift trägt, auf dem die Magnetnadel sich bewegt. Diese ist mit einer Borste versehen, die an ihrem Mittelpuncte befestigt ist, und mit ihrer Axe einen rechten Winkel macht, so dafs die östlichen und

westlichen Ablenkungen der Magnetnadel durch nördliche und südliche der Borste angezeigt werden. Da diese nur von einer Seite über die Nadel herausreicht, so ist sie durch ein Stückchen Wachs auf der entgegengesetzten Seite im Gleichgewicht erhalten.

An der zweiten gröfseren Seite des Rahmens ist ein Bogen aus Elfenbein angebracht, der in 60° getheilt wurde, wovon 30 an der Nordseite, 30 an der Südseite liegen, so dafs das Ende der Borste dem mittleren Theilstriche oder dem Nullpuncte der Theilung entspricht, wenn die Längenseite der Rahme mit der Magnetnadel parallel läuft.

Die Leiste, welche die Magnetnadel trägt, ist nicht fest gemacht, sondern läfst sich verschieben, so dafs die Magnetnadel aufser den Windungen zu stehen kommt, und man sie wegnehmen und mit einer anderen ersetzen kann, die mehr oder weniger wiegt. Mit dieser Einrichtung wird das Instrument geschickt, nicht blofs vorige Anzeigen zu geben, sondern mit Genauigkeit die Wirkungen des schwächsten electrischen Stromes so wie die eines starken zu messen.

Das Instrument ist in eine kreisrunde hölzerne Büchse mit einem Glasdeckel eingeschlossen, um es gegen die Bewegung der Luft zu schützen. Die Drähte reichen nahe 2 F. lang aus der Büchse hervor, und haben am Ende Zinnblättchen, um sie leicht mit den Platten des Electromotors in Verbindung setzen zu können. Drei Schrauben, auf denen die Büchse steht, dienen zum Stellen des Instrumentes. Die Figuren 3, 4, 5 zeigen es perspectivisch von oben und von der Seite.

Nachtrag vom Herausgeber *A. B.*

Ich habe, gleich nachdem ich von *Marianini's* Einrichtung des Multiplicators Kenntnifs erhielt, ein solches

Instrument verfertigen lassen, und mich von seiner grofsen Empfindlichkeit und Zweckmäfsigkeit sattsam überzeugt.

Wiewohl der mit Seide übersponnene Kupferdraht nur 21 $^1/_2$ Mal gewunden war, so brachte doch ein electrischer Strom, der durch eine Kupfer- und eine Zinkplatte von 12 Q. Linien Oberfläche in sehr stark verdünnter Schwefelsäure erregt wurde, an einer 2635 Milligramm schweren Magnetnadel eine Ablenkung von 45° hervor.

V.

Ungewöhnlich hoher Barometerstand im Monate Jänner 1828;

beobachtet in Prag

vom

Professor *Hallaschka.*

Obgleich seit dem 8. Jänner l. J. die Quecksilbersäule im Barometer bei meistens veränderlicher Atmosphäre bedeutend herabsank, so dafs sie am 15ten um 11 Uhr Vormittags nur eine Höhe von 27″ 0‴,44 hatte, also um 6‴,26 unter der mittleren Höhe stand; — das Réaum. Thermometer, das im Schatten der freien Luft ausgesetzt ist, vom 12ten bis zum 15. Jänner stets mehrere Grade über dem Frostpuncte zeigte; — der Wind meistens eine süd-süd-westliche Richtung bei verschiedener Stärke hatte, und demnach eine länger anhaltende laue, trübe, feuchte und unangenehme Witterung zu vermuthen war: so änderte sich doch nicht allein die Temperatur der atmosphärischen Luft, welche schon

am 15ten um 8 Uhr Abends — 10° R. war, sondern auch der Druck der Atmosphäre nahm am nämlichen Tage mit jeder Stunde zu, so dafs die Quecksilbersäule des Barometers, welche am nämlichen Tage um 11 Uhr Vormittags = 27″ 0‴,44 war, in der darauf folgenden Nacht um 12 Uhr eine Höhe von 27″ 6‴,85 erreichte.

Am 16ten, 17ten, 18ten und 19. Jänner bis 10 Uhr Vormittags stieg die Kälte fortwährend, und die Quecksilbersäule erhob sich allmählich weit über die mittlere Höhe. Die Atmosphäre heiterte sich am 16ten aus, blieb bis zum 18ten heiter, wo sie sich trübte, und Nebel, Schnee und Hagelregen sich einstellten, während am zuletzt genannten Tage die Quecksilbersäule den hohen Stand von 28″ 3‴,72 bei einer Lufttemperatur von — 12″,5 R. erreichte.

Da dieser hohe Stand hier seltener beobachtet wird, und seit mehreren Jahren nur von jenem, welcher am 8. Februar 1821 = 28″ 5‴,59 verzeichnet wurde, übertroffen wird, so dürfte es nicht ohne Nutzen seyn, die zu verschiedenen Stunden des 17ten, 18ten und 19. Jänners l. J. angestellten Beobachtungen selbst anzuführen, um aus der Vergleichung gleichzeitiger Beobachtungen anderer Orte die gewünschten Resultate ziehen zu können.

Die Barometer-Scala ist nach dem alten Pariser Fufs getheilt, und gibt mittelst der Nonien $^{1}/_{100}$ der Pariser Linie an. Sämmtliche Barometerbeobachtungen sind auf 0° R. reducirt. Die Lufttemperatur wurde nach dem 80theiligen Thermometer beobachtet.

1828, den 17. Jänner.	Barometerstand, auf 0° R. reducirt.	Lufttemp. Therm. R.	Richtung d. Windes	Anmerkungen.
8 U. Morg.	28″ 0‴.54	— 12°.1	OgN.	Der Wind schwach, die Atmosphäre ganz heiter während allen Beobachtungsstunden.
10 » »	1‴.03	— 9°.7	OgN.	
12 » Mittags	1‴.22	— 9°.0	OgN.	
3 » Nachm.	1‴.56	— 10°.2	OgN.	
5 » »	2‴.85	— 11°.0	OgN.	
6 » »	1‴.97	— 11°.6	OgN.	
7 » »	2‴.17	— 11°.1	OgN.	
8 » »	2‴.23	— 11°.2	OgN.	
9 » »	2‴.23	— 11°.8	OgN.	
10 » »	2‴.43	— 11°.8	OgN.	
18. Jänner.				
6 U. Morg.	28″ 2‴.88	— 13°.7	NOO.	Wind schw.; Höhenrauch.
8 » »	3‴.05	— 13°.2	NOO.	Wind schw.; Höhenrauch.
10 » »	3‴.39	— 12°.5	NOO.	Wind schw.; Höhenrauch.
11 » »	3‴.20	— 11°.9	NOO.	Wind schw.; Höhenrauch.
12 » Mittags	3‴.13	— 11°.1	OgN.	Wind schwach.
1 » Nachm.	3‴.03	— 11°.1	OgN.	Wind schwach.
2 » »	2‴.83	— 10°.6	OgN.	Wind schwach.
3 » »	2‴.71	— 10°.6	NO.	Wind schwach; dunstig.
4 » »	2‴.75	— 11°.1	NO.	Wind schwach; g. trüb.
5 » »	2‴.65	— 11°.4	NO.	Wind schwach; g. trüb.
6 » »	2‴.58	— 11°.7	NO.	Wind schwach; g. trüb.
7 » »	2‴.39	— 11°.8	NO.	Wind schwach; g. trüb.
8 » »	2‴.32	— 11°.9	NO.	Wind schwach; g. trüb.
9 » »	2‴.34	— 12°.5	NO.	Wind schwach; g. trüb.
10 » »	2‴.24	— 12°.4	NO.	Wind schwach; g. trüb.
19. Jänner.				
6 U. Morg.	28″ 1‴.06	— 11°.2	NO.	Mittelm. stark; trüb.
7 » »	1‴.08	— 10°.9	NO.	Mittelm. stark; trüb.
8 » »	1‴.06	— 10°.3	NO.	Mittelm. stark; Hagelreg.
10 » »	0‴.85	— 10°.7	NO.	Mittelm. stark; Hagelreg.
11 » »	0‴.69	— 7°.6	SO.	Mittelm. stark; Nebel.
12 » Mittag	0‴.23	— 6°.7	OgN.	Mittelm. stark; Nebel.
2 » Nachm.	27″ 11‴.90	— 5°.2	O.	Schwach; Nebel.
4 » »	11‴.77	— 5°.1	OgN.	Schwach; Nebel.
10 » »	11‴.61	— 5°.1	OgN.	Schwach; Nebel.

Das *Daniell*'sche Hygrometer, nach Fahrenheit getheilt, zeigte um 12 Uhr Mittags:

		Lufttemp.	Condensation.	Diff.
Am 16.	Jänner:	+ 22°,3	+ 3°,0	19°,3
» 17.	»	+ 15°,0	+ 4°,0	11°,0
» 18.	»	+ 11°,0	+ 3°,0	8°,0
» 19.	»	+ 14°,0	+ 6°,0	8°,0
» 20.	»	+ 25°,0	+ 25°,0	0°,0
» 21.	»	+ 31°,5	+ 30°,5	7°,0.

Am 21sten und die folgenden Tage des Monates zeigte das Réaum. Thermometer stets einige Grade Luftwärme bei meistens trüber Atmosphäre und ziemlich hohem Barometerstande.

VI.

Über Hygrometer, nach des Ritters v. *Bürg* Beobachtungen;

von

A. Baumgartner.

---

1. Unter den Instrumenten, welche zur Bestimmung des Zustandes der atmosphärischen Luft oder einer anderen Gasart angewendet werden, hat in der neueren Zeit dasjenige die Physiker am meisten beschäftiget, welches die Feuchtigkeit derselben anzugeben bestimmt ist. Es that aber auch keinem mehr Noth als diesem, weil man zu der Zeit, als man schon ohne viele Mühe ziemlich gut übereinstimmende Thermometer und Barometer bekommen konnte, selbst von den Händen übrigens anerkannt braver Künstler keine harmonirenden Hygrometer zu erhalten im Stande war; und doch ist

Übereinstimmung in den Anzeigen mehrerer zu demselben Zwecke bestimmter Instrumente die erste und unerläſslichste Eigenschaft derselben, wenn sie überhaupt brauchbar seyn sollen, aber nicht die einzige. Es ist überdieſs noch nothwendig, daſs solche Instrumente eine verständige Sprache reden, und hierin hat man an die Hygrometer gröſsere Forderungen gemacht, als an viele andere Instrumente. Beim Thermometer z. B. ist man so ziemlich allgemein von der Forderung abgestanden, daſs es die absoluten Wärmemengen angeben, und daſs der Nullpunct seiner Scale dem Zustande der gänzlichen Abwesenheit aller Wärme entsprechen soll; vom Hygrometer verlangt man aber, daſs es die Dunstmenge, welche in einem gegebenen Luftvolumen enthalten ist, angebe, und das mit Recht, indem die Anzeigen dieses Instrumentes sich auf etwas beziehen, dessen Materialität nicht bezweifelt wird, und das sich wirklich dem Gewichte nach bestimmen läſst, während die Anzeigen des Thermometers von einem Agens abhängen, das nicht der Schwere unterliegt, wenigstens noch nicht gewogen werden konnte, ja dessen Materialität noch starken Zweifeln ausgesetzt ist.

2. Der hygrometrische Zustand einer Luftmasse ist bekannt, wenn man das Verhältniſs der Spannkraft der in ihr vorhandenen Wasserdünste zu derjenigen Dunstmenge kennt, welche bei der gerade bestehenden Temperatur Statt finden kann. Daraus kann man nämlich abnehmen, wie weit die Luft noch von ihrem sogenannten Sättigungspuncte an Feuchtigkeit entfernt sey, und um wie viele Grade die Temperatur sinken müſste, um die Dünste auf das Maximum ihrer Spannkraft zu bringen, und auch sogar die absolute, in einem gegebenen Volumen derselben enthaltene Dunstmenge bestimmen; obiges Verhältniſs soll darum auch die Scale eines Hy-

grometers angeben. Drückt man den Zustand, worin die Dünste die gröfste Spannkraft haben, welche ihnen bei der bestehenden Temperatur zukommt, durch 100 aus, d. h. bezeichnet man den Punct der gröfsten Feuchtigkeit eines Hygrometers mit 100, den der gröfsten Trockenheit (wo gar kein Dunst vorhanden ist) mit 0, so sollte das Hygrometer den 50sten Feuchtigkeitsgrad angeben, wenn die Spannkraft der Dünste in der Luft nur die Hälfte derjenigen beträgt, die vorhanden seyn kann, oder den 20sten, wenn die bestehende Expansivkraft nur $^1/_5$ von der ist, welche Statt finden kann, u. s. w. Ich will für die Folge die von einem solchen Hygrometer angezeigte Spannkraft die *relative* Spannkraft der Dünste nennen. Bis jetzt kennt man kein Hygrometer, welches unmittelbar solche Anzeigen lieferte, ja unter der grossen Anzahl der in Vorschlag gebrachten oder wirklich ausgeführten Instrumente dieser Art sind nur wenige, welche Bestimmungen liefern, aus denen sich die Hygrometergrade im vorher bestimmten Sinne durch Rechnung ableiten lassen. Man kann unter diese Zahl wohl nur das Haarhygrometer, das Fischbeinhygrometer, *Leslie's* Hygrometer (oder wenigstens nach demselben Grundsatze eingerichtete hygrometrische Verfahren), und das von *Daniell* zuerst angegebene, von *Körner*, *Döbereiner* etc. vereinfachte Instrument zählen; ja von den zwei ersteren ist es noch bei weitem nicht ausgemacht, ob sie mit Recht in diese Classe gesetzt werden. Besonders gilt dieses vom Fischbeinhygrometer, das überhaupt von den Naturforschern weniger studirt wurde, als das Haarhygrometer. Seine Anzeigen sind weniger auf einen wissenschaftlichen Sinn gebracht, auch ist die Verfertigung desselben und die Zubereitung und Auswahl des hygroscopischen Körpers mehreren Schwierigkeiten un-

terwerfen, als bei *Saussure's* vielfach geprüftem Instrumente.

3. Über den Werth eines physikalischen Instrumentes kann man nur aus Versuchen sprechen. Selbst wenn man verschiedene Verfahrungsweisen, die zu demselben Ziele führen sollen, aus theoretischen Gründen für gleich richtig erkennt, so ist es doch räthlich, die durch sie erhaltenen Resultate mit einander zu vergleichen, und aus dem Grade ihrer Übereinstimmung, und der Leichtigkeit, womit man sie erlangt, über ihren Werth zu urtheilen. Das Verfahren, welches man bei *Daniell's* oder *Körner's* Hygrometer (Schwefelätherhygrometer) anwendete, führt, unseren theoretischen Ansichten gemäfs, zur Kenntnifs der Spannkraft des in einer Luftmasse enthaltenen Wasserdunstes; die Beobachtung des Unterschiedes im Stande zweier Thermometer, die derselben Temperatur ausgesetzt sind, wovon aber eines eine mit Wasser benetzte, das andere eine trockene Kugel hat, oder was dasselbe ist, die Anzeigen eines *Leslie*'schen Hygrometers führen zu demselben Ziele. Allein letztere leisten dieses nur mittelst einer Rechnung, der noch weitere empirische Daten zum Grunde liegen. Es ist daher nothwendig, die Resultate dieser zwei Verfahrungsarten mit einander und mit einem Haarhygrometer zu vergleichen, wenn man über ihren relativen Werth urtheilen will. Der um die Astronomie hochverdiente österreichische Gelehrte, Herr Ritter von *Bürg*, hatte die Güte, mir seine Beobachtungen und Berechnungen mitzutheilen, die sich auf diesen Gegenstand beziehen, und eine Vergleichung der oben genannten Bestimmungsarten des hygrometrischen Zustandes der Luft möglich machen. Die Tabelle, welche die Resultate seiner Beobachtungen und Rechnungen enthält, folgt hier. Es bedeuten

T Temperatur der Luft,
t die einer befeuchteten Kugel, } Réaumur.
τ jene einer bethauten »

T', t', τ' die gleichnamigen Temperaturen am *Fahrenheit*'schen Thermometer, $\delta = T' - t'$.

b Barometerhöhe in englischen Zollen.

F gröfste Expansivkraft der Dünste im Mittel nach *Biot* und *Kämtz* in englischen Zollen.

f und f' berechnete Expansivkräfte der Dünste in der Luft.

φ berechnete Expansivkraft der Dünste für den Bethauungspunct.

φ' Expansivkraft der Dünste nach *Biot* und *Kämtz* für den beobachteten Bethauungspunct τ.

Jahr 1827.	T	t	τ	b	F	f
23. Juli.	15.58	13.37	11.46	27.941	0.6477	0.5065
24. »	15.64	11.76	8.35	27.965	0.6505	0.4048
25. »	16.08	12.44	9.85	27.959	0.6720	0.4412
26. »	17.20	14.03	11.85	27.976	0.7305	0.5290
27. »	17.01	14.72	13.10	27.979	0.7200	0.5738
28. »	17.11	12.40	8.88	28.098	0.7256	0.4286
29. »	18.31	12.60	8.45	28.023	0.7930	0.4348
30. »	18.20	13.97	10.76	27.949	0.7865	0.5190
31. »	17.89	14.04	11.46	28.015	0.7686	0.5248
1. August.	17.61	14.36	12.07	28.047	0.7532	0.5467
2. »	18.15	15.06	13.08	27.916	0.7836	0.5871
3. »	17.56	15.00	13.64	27.920	0.7504	0.5871
4. »	17.97	15.82	14.15	27.872	0.7730	0.6379
5. »	17.01	14.96	13.81	27.957	0.7200	0.5889
6. »	16.15	14.05	12.83	27.904	0.6756	0.5414
7. »	15.69	10.82	7.39	27.956	0.6529	0.3460
8. »	15.55	11.62	8.62	27.963	0.6462	0.3974
9. »	15.98	12.99	11.00	27.883	0.6669	0.4763
10. »	16.18	12.24	9.50	27.773	0.6772	0.4286
11. »	15.55	13.03	11.25	27.652	0.6462	0.4854
12. »	14.62	11.11	8.43	27.660	0.6006	0.3798
13. »	12.67	10.05	7.00	27.756	0.5200	0.3541
14. »	13.03	9.93	7.33	27.839	0.5341	0.3368
15. »	14.72	12.44	10.47	27.754	0.6071	0.4614
16. »	16.08	12.63	9.35	27.712	0.6720	0.4531

P' Gewicht der Dünste in einem Kubikfuſse Luft bei der Temperatur τ.

P Gewicht der Dünste in einem Kubikfuſse Luft bei der Temperatur T.

H der beobachtete Grad an einem Haarhygrometer von *Huck*.

$$f = F + 5.586\,(1 - \sqrt{1 + 0.0103\,\delta}),\quad f' = F - \frac{b\,\delta}{1080 - 3\delta},$$

$$\varphi = \frac{f + f'}{2\,(1 + 0.002086\,(T' - \tau'))},$$

$$P' = \frac{(\varphi + \varphi')\,11.8437'}{2\,(1 + 0.002086\,(\tau' - 32))},\quad P = \frac{P'}{1 + 0.002086\,(T' - \tau')}.$$

f'	φ	φ'	P	H	Die Beobachtungen schienen
0.5173	0.5022	0.4741	5.383	86.7	zuverläſsig.
0.4188	0.3982	0.3728	4.248	70.5	ganz zuverläſsig.
0.4550	0.4353	0.4188	4.696	73.5	ziemlich zuverläſsig.
0.5421	0.5225	0.4884	5.533	79.5	gut.
0.5846	0.5688	0.5371	6.058	87	gut.
0.4415	0.4189	0.3884	4.419	69.3	ziemlich genau.
0.4472	0.4215	0.3758	4.340	63.6	unbezweifelt genau.
0.5355	0.5085	0.4494	5.218	72.8	nicht ganz verläſslich.
0.5384	0.5161	0.4742	5.403	72.5	nicht schlecht.
0.5594	0.5390	0.4966	5.657	79.1	vollkommen verläſslich
0.6004	0.5799	0.5362	6.082	81.5	sehr genau.
0.5991	0.5824	0.5597	6.241	86	sehr genau.
0.6464	0.6308	0.5815	6.613	88.7	genau.
0.5991	0.5852	0.5668	6.312	91.3	gut.
0.5520	0.5384	0.5263	5.857	90.0	sehr genau.
0.3603	0.3399	0.3459	3.778	67.1	gut.
0.4126	0.3922	0.3808	4.261	68.7	gut, jedoch H zweifelh.
0.4898	0.4721	0.4575	5.115	80	gut.
0.4436	0.4228	0.4078	4.566	75	genau.
0.4987	0.4823	0.4666	5.232	85.4	genau.
0.3957	0.3768	0.3752	4.163	72	nicht ganz zuverläſsig.
0.3667	0.3511	0.3353	3.833	73.7	etwas zweifelhaft.
0.3506	0.3347	0.3433	3.786	75	genau.
0.4734	0.4583	0.4395	4.968	83.3	etwas ungewiſs.
0.4685	0.4467	0.4031	4.673	75.6	gut.

Jahr 1827.	T	t	τ	b	F	f
17. August.	16.05	13.52	11.46	27.863	0.6705	0.5091
18. »	14.12	12.31	10.93	28.065	0.5802	0.4640
19. »	17.31	14.95	12.84	27.820	0.7366	0.5859
20. »	16.87	13.87	11.54	27.925	0.7128	0.5219
21. »	15.68	13.67	12.79	27.807	0.6525	0.5239
22. »	15.44	12.48	9.56	27.702	0.6409	0.4525
23. »	13.80	11.45	8.84	27.800	0.5664	0.4169
24. »	12.96	8.87	4.68	27.873	0.5313	0.2727
25. »	13.47	10.38	7.83	27.659	0.5526	0.3568
26. »	10.04	7.33	4.33	27.628	0.4250	0.2522
27. »	10.80	7.64	4.26	27.674	0.4507	0.2498
28. »	11.21	8.45	5.83	27.817	0.4651	0.2892
29. »	10.70	6.71	2.29	27.860	0.4473	0.1947
30. »	10.52	6.87	2.54	27.924	0.4412	0.2098
31. »	10.39	7.72	3.67	28.056	0.4368	0.2665
1. Septemb	10.73	8.56	6.00	28.153	0.4483	0.3096
2. »	11.20	9.09	6.46	28.088	0.4648	0.3298
3. »	11.28	9.57	7.62	28.000	0.4677	0.3580
4. »	11.30	9.80	7.96	27.914	0.4684	0.3720
5. »	11.76	9.84	7.69	27.902	0.4852	0.3623
6. »	12.05	10.02	8.04	27.924	0.4958	0.3650
7. »	12.32	10.46	8.02	27.931	0.5064	0.3871
8. »	12.10	9.95	7.74	27.879	0.4978	0.3603
9. »	11.94	9.09	6.08	27.952	0.4917	0.3097
10. »	11.46	7.97	4.35	28.118	0.4742	0.2527
11. »	11.72	9.47	7.08	28.106	0.4837	0.3400
14. »	12.42	10.22	7.83	27.841	0.5103	0.3697
15. »	12.22	9.58	6.74	27.938	0.5025	0.3342
16. »	11.55	9.49	7.42	27.935	0.4775	0.3465
17. »	11.67	9.48	7.00	27.996	0.4819	0.3418
19. »	11.67	9.05	6.50	27.752	0.4819	0.3172
20. »	9.80	7.32	4.62	27.624	0.4173	0.2590
21. »	8.19	5.89	2.72	27.663	0.3679	0.2208
22. »	9.69	7.47	4.48	27.748	0.4138	0.2721
23. »	10.25	8.37	6.21	27.810	0.4321	0.3117
24. »	10.87	9.04	6.75	27.840	0.4531	0.3358
25. »	11.05	9.01	6.42	27.872	0.4593	0.3288
26. »	11.77	9.93	7.71	27.849	0.4855	0.3671
27. »	11.93	10.12	7.92	27.859	0.4914	0.3755
28. »	12.00	10.56	9.28	27.879	0.4939	0.4016
29. »	12.52	10.83	9.01	27.719	0.5142	0.4059
30. »	12.03	9.47	6.69	27.728	0.4951	0.3318
1. October.	11.64	9.10	6.43	27.831	0.4808	0.3189

f'	φ	φ'	P	H	Die Beobachtungen schienen
0.5213	0.5043	0.4742	5.383	85	genau.
0.4733	0.4617	0.4551	5.089	90	vollkommen zuverläſs.
0.5978	0.5651	0.5267	5.974	85.8	genau.
0.5349	0.5155	0.4771	5.441	82.5	genau.
0.5346	0.5222	0.5247	5.770	91.0	etwas ungewiſs.
0.4669	0 4473	0.4097	4.737	82.7	genau.
0.4282	0 4119	0.3873	4.446	86.0	genau.
0.2876	0.2697	0.2793	3.062	68.0	sehr genau.
0.3711	0.3546	0.3579	3.965	75.4	genau.
0.2663	0.2525	0.2717	2.963	78.6	etwas zweifelhaft.
0.2650	0.2498	0 2702	2.930	73.5	genau.
0.3024	0.2885	0.3059	3.342	78.	vollkommen genau.
0.2097	0.1945	0.2308	2.397	65	gut.
0.2240	0 2091	0.2353	2.508	67	weniger genau.
0.2780	0.2639	0.2578	2.944	78	vollkommen genau.
0.3194	0 3077	0.3099	3.480	84	zweifelhaft.
0.3396	0.3282	0.3216	3.654	86.7	nicht schlecht.
0.3668	0.3562	0.3522	4.009	89	gut.
0.3800	0.3702	0 3615	4.122	91.7	unbezweifelt gut.
0.3722	0.3604	0.3541	4.085	87.7	unbezweifelt gut.
0.3761	0.3637	0.3638	4.075	89	unbezweifelt gut.
0.3968	0 3849	0.3749	4.245	91	vollkommen zuverläſs.
0.3712	0.3570	0.3555	3.974	87.5	gut.
0.3228	0.3078	0.3119	3.472	79.2	unbezweifelt gut.
0.2646	0 2503	0.2721	2.934	73.6	etwas ungewiſs.
0.3501	0 3331	0.3375	3.719	84.3	etwas zweifelhaft.
0.3809	0.3674	0.3579	4.056	88	ganz zuverläſsig.
0.3463	0.3317	0.3287	3.696	81.9	gut.
0.3562	0.3447	0 3468	3.826	87.4	unbezweifelt gut.
0.3523	0.3396	0.3353	3.787	85.5	etwas ungewiſs.
0.3280	0.3150	0 3226	3.577	83.8	unbezweifelt genau.
0.2723	0.2593	0.2780	3.040	84	weniger genau.
0.2333	0.2214	0.2389	2 645	81.5	ganz zuverläſsig.
0.2838	0.2713	0.2750	3.093	84.2	gut.
0 3219	0 3109	0.3152	3.536	88.8	unbezweifelt gut.
0.3457	0.3343	0.3289	3 734	90	unbezweifelt gut.
0.3393	0.3269	0.3206	3.643	89	ebenfalls.
0.3775	0.3653	0.3547	4.038	92	gut.
0.3852	0 3722	0.3604	3.917	92	hinreichend genau.
0.4095	0.4005	0.4008	4.519	94.8	gut.
0.4156	0.4041	0.3923	4.451	93.0	etwas zweifelhaft.
0.3448	0.3300	0.3274	3.682	84.7	gut.
0.3313	0.3173	0.3208	3.580	83.3	nicht ganz zuverläſsig.

Alle Formeln, nach denen die Rechnungen angelegt wurden, sind aus *Anderson's* Aufsatze entnommen, den die Leser dieser Zeitschrift aus dem ersten Bande derselben S. 44 u. f. kennen. Um Jeden in den Stand zu setzen, die Genauigkeit der Angaben, die der Rechnung zum Grunde gelegt wurden, beurtheilen zu können, glaube ich Folgendes anführen zu müssen:

Jede der Temperaturen T und t ist an zwei Thermometern beobachtet, deren Scalen grofs genug sind, um 0°.1 R. mit Gewifsheit angeben zu können; auch für die Temperatur τ brauchte Ritter von *Bürg* zwei Thermometer, an deren einem ebenfalls 0°.1 R. bemerkbar ist; jede Temperatur ist ferner das Mittel aus sechs Beobachtungen, wodurch die Angabe von Hunderttheilen eines Grades entstanden ist, deren Richtigkeit freilich nicht verbürgt werden kann, jedoch sind die Temperaturen T und t immer bis auf 0°.1 R. sicher.

A. Vergleichung des Schwefelätherhygrometers mit dem befeuchteten Thermometer.

4. Diese Tabelle enthält nun hinreichenden Stoff zur Vergleichung der oben genannten Hygrometer. Die Werthe von f und f' geben die Spannkraft der Dünste so, wie sie den Anzeigen entsprechen, welche ein befeuchtetes Thermometer in Vergleich mit einem trockenen lieferte. Die Werthe von f sind nach einer, die von f' nach der zweiten *Anderson*'schen Formel entwickelt. Beide Formeln führen sehr nahe zu einerlei Resultat, denn die gröfste Differenz zwischen zwei denselben Temperaturen entsprechenden Angaben derselben beträgt nicht mehr als 0.0165 Z. Diese Differenz könnte immer als innerhalb der Grenzen der unvermeidlichen Beobachtungsfehler liegend angesehen werden, wenn

nicht alle Differenzen ohne Ausnahme dasselbe Zeichen hätten; ein Umstand, der macht, dafs man in den Formeln selbst eine kleine Abweichung suchen mufs.

5. Der Mittelwerth aus f und f', auf die Temperatur reducirt, welche beim Beschlagen eines nach *Körner* eingerichteten Hygrometers Statt hat, ist durch φ bezeichnet, und durch φ' die Expansivkraft der Dünste, wie sie durch das Schwefelätherhygrometer für die Temperatur des Bethauens direct gefunden wurde. Die anfänglichen Werthe von φ sind fast durchaus etwas kleiner als die von φ', später aber gibt bald φ, bald φ' den gröfseren Werth. Überhaupt ist bei den angeführten 68 Resultaten φ 46 Mal gröfser und 22 Mal kleiner als φ'. Die gröfste Differenz beträgt 0.0591;

6 liegen zwischen 0.04 und 0.05,
8 » » 0.03 » 0.04,
5 » » 0.02 » 0.03,
19 » » 0.01 » 0.02,
29 sind kleiner als 0.01.

Man sieht daher, dafs beide hygrometrische Verfahrungsarten nahe zu demselben Resultate führen.

6. Wenn es sich darum handelte, ob dem Schwefelätherhygrometer oder dem befeuchteten Thermometer der Vorzug gebühre, würde ich mich ohne Anstand für letzteres erklären, und zwar aus folgenden Gründen: Am befeuchteten Thermometer bedarf es einer blofsen Beobachtung, keines erst anzustellenden Versuches, wenn das Factum ausgemittelt werden soll, das der Rechnung über den Feuchtigkeitszustand der Luft zum Grunde liegt; am Schwefelätherhygrometer ist hingegen ein Versuch nöthig. Der Stand eines befeuchteten Thermometers läfst sich, sobald nur zwischen der zur Verdünstung des Wassers verwendeten und von aufsen zufliefsenden Wärme Gleichgewicht eingetreten

ist (das stets Statt findet, wenn die Kugel immer feucht erhalten wird), gemächlich und zu wiederholten Malen beobachten und mit Schärfe ausmitteln; die Temperatur des Bethauens am Schwefelätherhygrometer muſs mit einem Blick geschätzt werden.

Herr Ritter v. *Bürg* bemerkte in einem Schreiben an mich, daſs man im Auftröpfeln des Äthers nicht behutsam genug seyn könne. »Trifft man das rechte Maſs, so entsteht das Beschlagen erst dann, nachdem das Quecksilber in der Röhre schon zum Stillstande gekommen ist; sinkt hingegen das Quecksilber noch ferner, wenn das Schälchen (an *Körner's* Hygrometer) schon beschlagen ist, so bin ich sehr geneigt, die Beobachtung für unbrauchbar zu halten. Es scheint mir nicht, daſs man sich in einem solchen Falle dadurch helfen kann, wenn man Acht hat, bei welcher Temperatur der Beschlag wieder verschwindet; dazu wird nach meiner Meinung eine um so höhere Temperatur nöthig seyn, je reichlicher das Schälchen bethaut wär, also je tiefer das Quecksilber vorher unter den wirklichen Bethauungspunct sank.« Von der Richtigkeit dieser Bemerkungen kann man sich überzeugen, wenn man das *Körner*'sche Hygrometer in kurzen Zwischenzeiten hinter einander beobachtet, wo sich die Luftfeuchtigkeit nicht geändert haben kann, und dabei bald reichlicher, bald sparsamer Schwefeläther zutröpfelt. Es ist demnach auch schwerer, mittelst des Schwefelätherhygrometers ein genaues Resultat zu erlangen, als mittelst eines befeuchteten Thermometers.

7. Man kann leicht aus theoretischen Gründen einsehen, daſs zwischen den Anzeigen eines befeuchteten Thermometers und den eines Schwefelätherhygrometers ein gewisses Verhältniſs Statt finden muſs. Dieses hat *Meikle* auf ganz theoretischem, *August* aber sowohl auf

theoretischem, als auf dem Wege der Erfahrung nachzuweisen gesucht. *Meikle* leitet aus *Yvory's* Berechnungen die Formel

$$\tau = T - \frac{\delta(\delta + 65)}{t + 18}$$

ab, in welcher τ die Temperatur des Bethauungspunctes eines Schwefelätherhygrometers nach der hunderttheiligen Scale, T die bestehende Lufttemperatur, t die Temperatur der befeuchteten Thermometerkugel bedeutet, und $\delta = T - t$ ist. Reducirt man sie auf die 80theilige Scale, so erhält man:

$$\tau' = T - \frac{\delta(\delta + 44)}{t + 14.4}.$$

Nach *August* ist die Temperaturdifferenz zwischen einem trockenen und befeuchteten Thermometer, wenn beide stationär geworden sind, halb so grofs als die zwischen einem bethauten Schwefelätherhygrometer und einem der Luft ausgesetzten Thermometer, oder es ist

$$T - \tau = 2\delta, \quad \text{mithin} \quad \tau = T - 2\delta.$$

In der folgenden Tabelle sind die Werthe, wie sie sich für den Bethauungspunct aus diesen Formeln ergeben, mit den beobachteten zusammengestellt, und ihre Differenz beigesetzt.

Beobachtungstag.	Bethauungspunct		Differenz.	Berechneter Bethauungspunct nach *August*.	Differenz.
	beobachteter.	berechneter nach *Meikle*.			
23. Juli.	11.46	11.90	—0.44	11.16	—0.30
24. »	8.35	8.54	—0.19	7.88	—0.47
25. »	9.85	9.62	0.23	8.80	—1.05
26. »	11.85	11.89	—0.04	10.86	—0.99
27. »	13.10	13.37	—0.27	12.43	—0.67

Beobachtungstag.	Bethauungspunct beobachteter.	berechneter nach *Meikle*.	Differenz.	Berechneter Bethauungspunct nach *August*.	Differenz.
28. Juli.	8.88	8.55	0.33	7.69	1.19
29. »	8.45	7.80	0.65	6.89	1.56
30. »	10.76	10.95	—0.19	9.74	1.02
31. »	11.46	11.41	0.05	10.19	1.27
1. Aug.	12.07	12.27	—0.20	11.11	0.96
2. »	13.08	13.21	—0.13	11.97	1.11
3. »	13.64	13.51	0.13	12.44	1.20
4. »	14.15	13.69	0.46	13.67	0.48
5. »	13.81	13.80	0.01	12.91	0.90
6. »	12.83	12.75	0.08	11.95	0.88
7. »	7.39	6.26	1.13	5.95	1.44
8. »	8.62	8.31	0.31	7.69	0.93
9. »	11.00	10.85	0.15	10.00	1.00
10. »	9.50	9.09	0.41	8.30	1.20
11. »	11.25	11.28	—0.03	10.51	0.74
12. »	8.43	8.08	0.35	7.62	0.81
13. »	7.00	7.68	—0.68	7.43	—0.43
14. »	7.33	7.03	0.30	6.83	0.50
15. »	10.47	10.88	—0.41	10.16	0.31
16. »	9.35	10.02	—0.67	9.18	0.17
17. »	11.46	11.83	—0.37	10.99	0.47
18. »	10.93	11.02	—1.09	10.50	0.43
19. »	12.84	10.79	2.05	10.59	2.25
20. »	11.54	11.88	—0.34	10.87	0.67
21. »	12.79	12.39	0.40	11.66	1.13
22. »	9.56	10.64	—1.08	9.52	0.04
23. »	8.84	9.59	—0.75	9.10	—0.26
24. »	4.68	4.51	0.17	4.78	—0.10
25. »	7.83	7.60	0.23	7.29	0.54
26. »	4.33	4.22	0.11	4.62	—0.29
27. »	4.26	4.13	0.13	6.48	—0.22
28. »	5.83	5.56	0.27	5.69	—0.14
29. »	2.29	1.63	0.66	2.72	—0.43
30. »	2.54	2.34	0.20	3.32	—0.78
31. »	3.67	4.76	—1.09	5.05	—1.38

Beobachtungstag.	Bethauungspunct beobachteter.	Bethauungspunct berechneter nach *Meikle*.	Differenz.	Berechneter Bethauungspunct nach *August*.	Differenz.
1. Sept.	6.00	6.37	—0.37	6.39	—0.39
2. »	6.46	7.06	1.40	6.98	—0.52
3. »	7.62	8.02	—0.40	7.86	—0.24
4. »	7.96	8.48	—0.52	8.30	—0.34
5. »	7.69	8.12	—0.43	7.92	—0.23
6. »	8.04	8.23	—0.19	7.99	0.05
7. »	8.02	8.85	—0.83	8.60	—0.58
8. »	7.74	8.03	—0.29	7.80	—0.06
9. »	6.08	6.30	—0.22	8.24	—2.16
10. »	4.35	4.05	0.30	5.76	—1.41
11. »	7.08	7.36	—0.28	7.22	—0.14
14. »	7.83	8.29	—0.46	8.02	—0.19
15. »	6.74	7.09	—0.35	6.94	—0.20
16. »	7.42	7.58	—0.16	7.43	—0.01
17. »	7.00	7.43	—0.43	7.29	—0.29
19. »	6.50	6.46	0.04	6.43	0.07
20. »	4.62	4.49	0.13	4.84	—0.22
21. »	2.72	2.92	0.20	3.59	—0.87
22. »	4.48	5.00	—0.52	5.25	—0.77
23. »	6.21	6.46	—0.25	6.49	—0.28
24. »	6.75	7.29	—0.54	7.21	—0.54
25. »	6.42	7.04	—0.62	6.97	—0.55
26. »	7.71	8.30	—0.59	6.09	0.62
27. »	7.92	8.55	—0.63	8.31	—0.39
28. »	9.28	9.38	—0.10	9.12	0.16
29. »	9.01	9.46	—0.45	9.14	—0.03
30. »	6.69	7.04	—0.35	6.91	—0.22
1. Oct.	6.43	5.61	0.82	6.56	—0.13

Man sieht hieraus, daſs die *Meikle*'sche Formel der Wahrheit näher kommt, als die *August*'sche; es muſs aber bemerkt werden, daſs *August* selbst seine Regel als bloſse Annäherung angibt.

8. Die hier gemachte Vergleichung zwischen dem Bethauungspuncte eines Schwefelätherhygrometers und dem Stande eines befeuchteten, der Luft ausgesetzten Thermometers schien mir darum nicht ohne Interesse zu seyn, weil man selbst in dem Falle, wo man sich des befeuchteten Thermometers bedient, doch auch jene Fragen zu beantworten im Stande ist, welche sich aus der Kenntniſs des Bethauungspunctes ergeben, ohne ein Schwefelätherhygrometer beobachten zu müssen. So z. B. kann an windstillen Tagen die Temperatur der Luft nicht unter den Bethauungspunct sinken, weil selbst beim Einwirken einer erkaltenden Ursache es höchstens so weit kommen kann, daſs die Dünste in tropfbaren Zustand übergehen, und sich dadurch eine Quelle der Erwärmung eröffnet, die der erkältenden Ursache das Gleichgewicht hält. Wenn man daher an einem ruhigen Abende wissen wollte, wie weit die Temperatur der Luft während der Nacht sinken kann, so müſste man eigentlich den Bethauungspunct mittelst eines Schwefelätherhygrometers finden. Kennt man aber obige Formeln, deren Annehmbarkeit die vorausgehende Tabelle darthut, so kann man auch mittelst eines befeuchteten Thermometers zum Ziele gelangen.

B. Vergleichung des Haarhygrometers mit dem befeuchteten Thermometer.

9. Die Anzeigen des Haarhygrometers lassen sich mit den Ergebnissen aus dem Stande eines befeuchteten und trockenen Thermometers dadurch am besten vergleichen, daſs man nach beiden die relative Spannkraft der Dünste berechnet. Bekanntlich hat *Gay-Lussac* die jedem Grade des Haarhygrometers entsprechende relative Spannkraft des Wasserdunstes in der Luft durch directe Versuche gefunden, aber seine Angaben beziehen sich

nur auf die Temperatur von 10° C. = 8° R., während die *Bürg*'schen Beobachtungen ohne Ausnahme bei höheren Temperaturen angestellt wurden. Um nun mittelst der *Gay-Lussac*'schen Tabelle und der *Bürg*'schen Beobachtungen des Haarhygrometers die relative Spannkraft der Dünste in der Luft zu bestimmen, verfuhr ich so: Zuerst suchte ich den Grad, auf den das Hygrometer weisen würde, wenn die Temperatur ohne Änderung der als Dunst in der Luft vorhandenen Wassermenge auf 10° C. herabsänke. Die zweite Spalte der folgenden Tabelle enthält diese Hygrometergrade. Zu ihrer Bestimmung bediente ich mich der *Saussure*'schen, von Dr. *Winkler* in Leipzig sehr zweckmäſsig eingerichteten und erweiterten Tabelle (Tafel, um Hygrometerstände etc. auf jede beliebige Normal-Temperatur zu reduciren, Leipzig 1826). In einigen Fällen hätte das Hygrometer den hundertsten Grad überschreiten müssen, welches der Natur des Instrumentes entgegen ist; darum sind auch einige Felder dieser Spalte leer geblieben. Aus diesen Hygrometergraden suchte ich nach *Gay-Lussac's* Tabelle die relative Expansivkraft des Wasserdunstes, und schloſs hierauf so weiter: Gesetzt, es sey die gefundene relative Spannkraft $= h$, und e die Expansivkraft des in der Luft vorhandenen Wasserdunstes, E hingegen die gröſste Expansivkraft, welche bei 8° R. bestehen kann, so ist

$$h = \frac{100 \cdot e}{E}.$$

Steigt nun die Temperatur auf $t°$ R., ohne daſs neuer Dunst sich bildet, oder der bereits gebildete vermindert wird, so geht e über in $\frac{e\,(1 + 0.00468 \cdot t)}{1 + 0.00468 \times 8}$, oder nahe in $e\,(1 + 0.00468\,(t - 8))$; und E geht über in E',

d. h. in die gröfste Expansivkraft, welche der Temperatur t entspricht.

Heifst nun h' die relative Spannkraft der Dünste in der Luft bei $t°$ R., so ist

$$h' = \frac{100\,e\,(1 + 0.00468\,(t - 8))}{E'};$$

oder, wenn man statt e den Werth aus der vorhergehenden Gleichung setzt:

$$h' = \frac{h\,E}{E'}\,(1 + 0.00468\,(t - 8)).$$

Nach dieser Formel ist die dritte Spalte der folgenden Tafel berechnet.

Endlich suchte ich aus der *Bürg*'schen Tabelle die relative Spannkraft des Wasserdunstes, d. i. den Werth von $\frac{f + f'}{2F} \cdot 100$, und diese gibt die vierte Spalte an. Die letzte endlich weiset die Differenzen nach, welche zwischen den auf den genannten Wegen gefundenen Spannkräften Statt finden.

Hier folgt die Tabelle:

Beobachtungstag.	Haarhygrometer bei 8° R.	Spannkraft des Dunstes nach dem Haarhygrometer.	Spannkraft des Dunstes nach der *Bürg*'schen Tabelle.	Differenz.
23. Juli.	—	—	79.0	—
24. »	88.4	43.9	63.3	19.4
25. »	94.0	48.8	66.7	17.9
26. »	—	—	73.3	—
27. »	—	—	80.4	—
28. »	85.4	36.7	60	23.3
29. »	98.3	46.1	55.5	9.4
30. »	97.5	45.7	67.1	21.4
31. »	98.7	49.0	67.9	18.9
1. Aug.	—	—	73.4	—

Beobachtungstag.	Haarhygrometer bei 8° R.	Spannkraft des Dunstes		Differenz.
		nach dem Haarhygrometer.	nach der *Bürg'*schen Tabelle.	
2. Aug.	—	—	75.0	—
3. »	—	—	79.0	—
4. »	—	—	83.1	—
5. »	—	—	82.5	—
6. »	—	—	79.7	—
7. »	83.7	36.6	54.1	17.5
8. »	88.3	43.9	61.9	18.0
9. »	99.8	56.2	71.9	15.7
10. »	96.4	51.3	64.4	13.1
11. »	—	—	75.0	—
12. »	87.6	45.5	64.6	13.1
13. »	82.0	46.0	69.3	23.3
14. »	87.2	51.2	64.3	13.1
15. »	99.8	61.4	77.0	15.6
16. »	97	52.3	68.6	16.3
17. »	—	—	76.8	—
18. »	—	—	80.8	—
19. »	—	—	80.3	—
20. »	—	—	74.2	—
21. »	—	—	81.2	—
22. »	—	—	71.7	—
23. »	99.9	65.6	74.6	9.0
24. »	78.1	39.9	52.7	12.8
25. »	89.1	31.8	65.7	33.9
26. »	83.6	32.5	60.9	28.4
27. »	79.7	49.3	57.5	8.2
28. »	86	56.4	63.6	7.2
29. »	70.4	39.2	45.2	6.0
30. »	71.8	41.0	49.1	8.1
31. »	83.9	56.8	61.9	5.1
1. Sept.	91.6	67.7	70.1	2.4
2. »	96.0	72.0	70.2	— 1.8
3. »	97.9	74.1	77.5	2.4
4. »	99.3	77.6	80.3	2.7
5. »	97.9	73.6	75.8	2.2

Beobachtungstag.	Haarhygrometer bei 8° R.	Spannkraft des Dunstes nach dem Haarhygrometer.	Spannkraft des Dunstes nach der *Bürg*'schen Tabelle.	Differenz.
6. Sept.	99.1	72.6	74.7	2.1
7. »	—	—	77.4	—
8. »	98.4	71.2	73.5	2.3
9. »	89.5	71.8	64.2	2.4
10. »	81.4	49.2	54.5	5.3
11. »	94.9	67.8	71.3	3.5
14. »	99.1	70.9	73.5	2.6
15. »	93.6	63.4	67.7	4.6
16. »	97.4	72.8	73.7	0.9
17. »	96.1	70.1	72.0	1.9
19. »	94.2	67.1	66.9	— 0.2
20. »	88.9	67.5	63.7	3.8
21. »	84.6	67.9	61.7	— 6.2
22. »	88.8	67.5	67.2	0.3
23. »	95.4	76.2	73.3	— 2.9
24. »	97.8	77.2	75.2	— 2.0
25. »	97.5	75.5	72.7	— 3.8
26. »	—	—	76.1	—
27. »	—	—	77.4	—
28. »	—	—	82.1	—
29. »	—	—	79.9	—
30. »	94.9	66.4	68.3	1.9
1. Oct.	93.5	66.1	67.6	1.5

10. Aus dieser Tabelle ersieht man, daſs zwischen den Spannkräften der Wasserdünste in der Luft, so wie sie aus dem Stande eines befeuchteten Thermometers und des Haarhygrometers berechnet werden, bedeutende Differenzen Statt finden. Da die Expansivkräfte, welche man mittelst des Schwefelätherhygrometers erhält, mit denen, welche sich aus der Differenz zwischen dem Stande eines trockenen und eines befeuchteten Thermometers ergeben, sehr wohl mit einander übereinstimmen, so muſs

man wohl die Ursache der genannten Abweichungen zwischen diesen Angaben und den eines Haarhygrometers auf den unrichtigen Stand des letzteren schieben. Die gröfste Differenz zwischen den Werthen von φ und φ' in der *Bürg*'schen Tabelle, die selbst unter 68 Beobachtungen nur ein Mal vorkommt, und aus Beobachtungen deducirt wurde, die Ritter v. *Bürg* selbst als *nicht ganz verläfslich* angibt, beläuft sich nur auf 0.0591. Sie fand am 30. Juli Statt. Berechnet man für diesen Tag die relative Spannkraft, wie sie sich aus dem Schwefelätherhygrometer ergibt, so findet man sie = 59.2. Aus dem Stande des feuchten Thermometers ergibt sich für diesen Tag eine Spannkraft von 67.1, mithin beläuft sich für diesen ungünstigen Fall die Differenz auf 7.9, während viele Differenzen, wie sie die letzte Spalte obiger Tafel angibt, über 20 steigen. Merkwürdig ist es, dafs das Haarhygrometer nur in den ersten Beobachtungstagen gar so grofse Differenzen gibt, und dafs sie vom ersten September angefangen so klein werden, dafs man für diese Beobachtungen den beiden in der Tabelle verglichenen Methoden, die Feuchtigkeit zu bestimmen, beinahe gleichen Werth zuerkennen mufs. Ob dieses daher rührt, dafs in den ersteren Beobachtungstagen die Temperatur bedeutend höher war, als in den letzteren, oder ob das Haarhygrometer erst mit der Zeit den nöthigen Grad von Empfindlichkeit angenommen hatte, kann ich nicht entscheiden. Ersteres ist mir aber unwahrscheinlich, weil die Temperatur zwischen dem 7ten und 11. August fast so hoch stand, wie beim Beginne der Beobachtungen, und doch die Differenzen weit kleiner sind, als im Anfange; letzteres liefse sich aber mit den von *Saussure* selbst gemachten Beobachtungen vereinigen, nach welchen ein Hygrometer, das sich längere Zeit in trockener Luft befand, unter denselben Umständen doch hinter

einem anderen sonst mit ihm übereinstimmenden zurückbleibt, das vorher in feuchterer Luft war (Hygrometrie, S. 80); allein bleibt es immer räthselhaft, dafs das Instrument so lange gebraucht haben sollte, um den gehörigen Grad von Empfindlichkeit wieder zu erlangen. Auch der Umstand verdient hervorgehoben zu werden, und scheint für die letztere Ursache zu sprechen, dafs in den Fällen, wo grofse Differenzen Statt fanden, das Haarhygrometer zu grofse Trockenheit anzeigte. Es geschieht oft, dafs sich bei Haarhygrometern der Punct der gröfsten Feuchtigkeit dem Puncte der gröfsten Trockenheit an der Scale nähert, doch ist dieses nicht immer der Fall. Der Freiherr von *Jacquin* besitzt ein Haarhygrometer schon vierzig Jahre lang, wozu das Haar *Saussure* selbst zubereitet hatte, das in Genf unter seiner Leitung verfertigt, und mit seinem Probeinstrumente übereinstimmend gefunden wurde. Bringt man dieses in die Lage, wo der Zeiger auf 100 weisen sollte, so rückt er über 100 hinaus. Es findet also das Gegentheil von dem Statt, was ich an vielen von mir selbst verfertigten Haarhygrometern oft wahrnahm.

C. Vergleichung des Haarhygrometers mit dem Schwefelätherhygrometer.

11. Wiewohl man aus dem Vorhergehenden schon abnehmen kann, dafs ein Haarhygrometer mit einem *Körner*'schen eben so wenig übereinstimmt, als mit den Angaben eines befeuchteten Thermometers, so mag doch der Vollständigkeit wegen noch eine besondere Vergleichung zwischen jenen beiden Instrumenten angestellt werden. Um diese Vergleichung anstellen zu können, betrat ich folgenden Weg: Der Unterschied zwischen der Lufttemperatur, und der Temperatur, bei welcher das Schwefelätherhygrometer beschlägt, gibt die Anzahl

der Wärmegrade an, um welche die Temperatur sinken müfste, bis der gröfste Grad der Feuchtigkeit eintritt. Die oben genannte Tabelle von *Winkler* enthält dieselbe Anzahl Wärmegrade nach dem Stande des Haarhygrometers. Folgende Tafel dient zur Vergleichung beider Hygrometer. Die zweite Spalte enthält den Temperaturunterschied $T - \tau$ nach der *Bürg*'schen Tabelle, die dritte gibt die Wärmegrade d nach *Saussure* an, um welche die Temperatur sinken müfste, um das Haarhygrometer auf 100° zu bringen. Die vierte Spalte enthält die Differenzen der zwei vorhergehenden.

Beobachtungstag.	$T-\tau$	d	Differenz.	Beobachtungstag.	$T-\tau$	d	Differenz.
23. Juli.	4.12	5.55	— 1.43	17. Aug.	4.59	6.18	1.59
24. »	7.29	12.59	5.30	18. »	3.19	4.38	1.18
25. »	6.23	11.09	4.86	19. »	4.47	5.88	1.41
26. »	5.35	8.36	3.01	20. »	5.33	7.14	1.81
27. »	3.91	5.44	1.53	21. »	2.89	4.03	1.14
28. »	8.23	13.21	4.98	22. »	5.88	7.06	1.18
29. »	9.86	16.35	6.49	23. »	4.96	5.81	0.85
30. »	7.44	11.43	3.99	24. »	8.28	13.90	5.62
31. »	6.43	11.58	5.15	25. »	5.64	10.18	4.54
1. Aug.	5.54	8.53	2.99	26. »	5.71	8.74	3.03
2. »	5.07	7.54	2.47	27. »	6.54	11.09	4.55
3. »	3.92	5.81	1.89	28. »	5.38	9.00	3.62
4. »	3.82	4.84	1.02	29. »	8.41	15.55	7.14
5. »	3.20	3.93	0.73	30. »	7.98	14.44	6.46
6. »	3.32	4.38	1.06	31. »	6.72	9.00	2.28
7. »	8.30	14.38	6.08	1. Sept.	4.73	6.56	1.83
8. »	6.93	12.53	5.60	2. »	4.74	5.55	0.81
9. »	4.68	8.15	3.47	3. »	3.66	4.73	1.27
10. »	6.68	10.37	3.69	4. »	3.34	3.80	0.46
11. »	4.30	6.03	1.73	5. »	4.07	5.19	1.12
12. »	6.19	11.83	5.64	6. »	4.01	4.73	0.72
13. »	5.67	11.99	6.32	7. »	4.30	4.03	— 0.27
14. »	5.70	10.37	5.67	8. »	4.36	5.26	0.90
15. »	4.25	6.83	1.57	9. »	5.86	8.49	2.63
16. »	6.73	10.09	3.36	10. »	7.11	11.04	3.93

Beobachtungstag.	$T-\tau$	d	Differenz.	Beobachtungstag.	$T-\tau$	d	Differenz.
11. Sept.	4.64	6.57	1.83	24. Sept.	4.12	4.38	0.26
14. »	4.59	5.08	0.49	25. »	4.63	4.73	0.10
15. »	5.48	7.38	1.90	26. »	4.06	4.69	0.63
16. »	4.13	5.30	1.17	27. »	4.01	3.69	— 0.32
17. »	4.67	6.00	1.33	28. »	2.72	2.76	0.04
19. »	5.17	6.64	— 1.47	29. »	3.51	3.29	— 0.22
20. »	5.18	6.56	— 1.38	30. »	5.34	6.30	0.96
21. »	5.47	7.54	2.07	1. Oct.	5.21	6.83	0.62
22. »	5.21	6.48	1.27				
23. »	4.04	4.80	0.76				

Aus dieser Tabelle läfst sich für den Gang des Haarhygrometers dasselbe abnehmen, was über ihn vorhin gesagt wurde. Anfangs weicht es vom Schwefelätherhygrometer sehr stark ab, in den letzteren Beobachtungstagen stimmen beide hinreichend mit einander überein, so dafs man wohl nicht umhin kann, die Abweichung des Haarhygrometers vom Schwefelätherhygrometer und einem befeuchteten Thermometer auf Rechnung eines unrichtigen Ganges des ersteren zu setzen.

12. Der Grad, auf welchen der Zeiger eines Haarhygrometers weiset, hat für sich noch keine *bestimmte* hygroskopische Bedeutung, er ist nur eine Gröfse, aus der sich mit Hülfe der Lufttemperatur die Spannkraft der Wasserdünste in der Luft und ihr Abstand von ihrem Maximum berechnen läfst. Dasselbe ist auch mit den Angaben eines Schwefelätherhygrometers und mit dem eines befeuchteten Thermometers der Fall; auch diese geben mittelst der beobachteten Lufttemperatur die Spannkraft des Wasserdunstes in der Luft an. Es trifft demnach der Vorwurf, welchen man den zuletzt genannten Hygrometern oft macht, dafs man aus ihren Anzeigen nicht den Feuchtigkeitszustand der Luft un-

mittelbar abnehmen kann, auch das Haarhygrometer, und man kann ihm demnach in dieser Hinsicht keinen Vorzug geben; um so mehr, da das Haarhygrometer eben so viel Rechnung fordert, als das *Körner*'sche, oder ein Thermometer mit befeuchteter Kugel, um aus seinem Stande die Expansivkraft des Wasserdunstes bestimmen zu können. Es muſs ersteres sogar nachstehen, wenn man auch von dem Einflusse der Zeit auf das Haar ganz absieht, weil es leichter ist, übereinstimmende Thermometer, mithin auch übereinstimmende *Körner*'sche Hygrometer zu verfertigen, als übereinstimmende Haarhygrometer. Ist ein Thermometer von der Hand eines guten Künstlers gekommen, und überdieſs gar noch nach *Bessels* vortrefflicher Methode berichtiget, so gibt es bei einer etwas groſsen Scale noch Zehntelgrade richtig an, und zwei solche Instrumente weichen nicht über $^1/_{10}{}^0$ von einander ab; Haarhygrometer konnte aber *Saussure* selbst, der keine Vorsicht versäumte, nur bis auf zwei Grade mit einander übereinstimmend machen (Hygrometrie, S. 80).

Aber ein anderer Umstand wird gewöhnlich als wesentlicher Vorzug eines Haarhygrometers angesehen, darin bestehend, daſs man, um den Feuchtigkeitsgrad zu erkennen, nicht erst nöthig hat, einen Versuch anzustellen, wie dieses bei dem Schwefelätherhygrometer der Fall ist, sondern nur den Stand des Zeigers zu beobachten braucht. Gegen dieses läſst sich wohl nichts einwenden, und man muſs gestehen, daſs von dieser Seite das Schwefelätherhygrometer dem Haarhygrometer offenbar nachstehet, nicht so aber *Leslie's* Hygrometer, oder das hygrometrische Verfahren mit einem befeuchteten Thermometer. Steht nämlich ein Gefäſs mit Wasser in der Nähe des Thermometers, das diesem mittelst Floretseide oder eines Streifens Musselin Flüssig-

keit zuführt, wie es von *August* angegeben wird; so braucht man, wenn man den Feuchtigkeitszustand der Luft erkennen will, nur den Stand dieses Thermometers mit dem eines trockenen zu vergleichen, mithin im Grunde auch nur eine Beobachtung zu machen, wie beim Haarhygrometer. Die weitere Rechnung, die den Feuchtigkeitszustand bestimmt angibt, ist für das nasse Thermometer beinahe einfacher als für das Haarhygrometer. Es werden aber hier beide als bekannt vorausgesetzt, da erstere der oft genannte Aufsatz von *Anderson*, letztere *Saussure's* Hygrometrie, oder *Winkler's* Tabelle enthält.

Endresultat.

13. Aus allen diesen Vergleichungen glaube ich die Schlüsse ziehen zu dürfen: 1) dafs man aus den Anzeigen des Haarhygrometers nicht mit hinreichender Sicherheit den Feuchtigkeitszustand der Luft abnehmen kann, indem auch ein ursprünglich gut adjustirtes Hygrometer dieser Art durch die Zeit und andere Umstände in seinem Gange gestört wird; 2) dafs ein Schwefelätherhygrometer mit den Anzeigen eines Thermometers mit befeuchteter Kugel hinreichend übereinstimme; 3) dafs letzteres Verfahren (mit dem befeuchteten Thermometer) vor ersterem (mit dem Schwefelätherhygrometer) wegen der gröfseren Leichtigkeit, Sicherheit und Schärfe der Beobachtung den Vorzug verdiene.

Da sich aus der Differenz zwischen einem trockenen und feuchten Thermometer nach zwei Formeln die Spannkraft der Wasserdünste in der Luft berechnen läfst, und beide nicht genau mit einander übereinstimmende Resultate geben, so frägt es sich: welche die gröfsere Sicherheit gewährt? Es ist kein Zweifel, dafs dieses bei der zweiten, nach welcher

$$f = F - \frac{b\delta}{1080 - 3\delta}$$

ist, Statt findet. Die erstere ist vom Luftdruck unabhängig dargestellt, der doch nach *Anderson's* und *Meikle's* Versuchen einen Einfluſs auf den Werth von δ hat; gibt also nur dann ein richtiges Resultat, wenn ein Luftdruck Statt findet, wie der, bei welchem die numerischen Coefficienten, welche die Formel enthält, bestimmt wurden. Da Perth, wo *Anderson* die Coefficienten bestimmte, tiefer liegt, und daher einen gröſseren Luftdruck hat, als Wiesenau in Kärnthen, wo Ritter v. *Bürg* seine Beobachtungen anstellte, so muſsten auch die Werthe von f gröſser ausfallen, als die von f'.

Obige Formel, die für englisches Maſs und für *Fahrenheit*'sche Wärmegrade eingerichtet ist, läſst sich leicht für ein auf dem Continente gewöhnlicheres Maſs, z. B. für Pariser Zoll und für das hunderttheilige Thermometer adaptiren. Zu diesem Behufe hat man:

$$1 \text{ Par. Zoll} = 1.06578 \text{ Engl. Z.}$$
$$\delta^\circ\, C = \tfrac{9}{5}\,\delta^\circ\, F.$$

Die besprochene Formel heiſst allgemein

$$f = F - \frac{b\delta}{30\left(A + \frac{B}{A}\delta\right)};$$

oder, wenn man $\frac{B}{A} = C$ setzt:

$$f = F - \frac{b\delta}{30\,(A + C\delta)},$$

wo f, F, b in englischen Zollen, δ in *Fahrenheit*'schen Graden ausgedrückt sind. Setzt man dafür französisches Maſs und Celsische Wärmegrade, so hat man:

$$f = F - \frac{b\,.\,\frac{9}{5}\delta}{30\,(A + C\,.\,\frac{9}{5}\delta)}$$

oder

$$f = F - \frac{b\delta}{30\left(\frac{5}{9}A + C\delta\right)}.$$

Weil aber nach *Anderson* $A = 36$, $C = -0{,}1$ ist, so wird $\frac{5}{9}A = 20$, und daher

$$f = F - \frac{b\delta}{600 - 3\delta}$$ [1]).

VII.

Auflösung eines schweren algebraischen Problems;

vom

Dr. *Nürnberger*.

Im verwichenen Jahre ist öffentlich und wiederholentlich [2]) von einer analytischen Aufgabe die Rede ge-

---

[1]) Ich habe bei einer anderen Gelegenheit (Zeitsch. B. II. S. 222) diese Formel auf Pariser Maſs und auf das 80theilige Thermometer reducirt, aber aus Versehen irrig angegeben. Dessen ungeachtet sind die darnach berechneten Zahlen als das, was sie seyn sollen, nämlich als der Feuchtigkeit nahe proportionirte Zahlen, nicht unrichtig, weil der Fehler im Nenner des besprochenen Ausdruckes begangen wurde, den ich annäherungsweise als constante Gröſse betrachtete.

[2]) Zuerst in Nro. 14 des »allgemeinen Anzeigers der Deutschen.« In Nro. 64 desselben Blattes habe ich eine genäherte Auflösung gegeben, und bin hiernächst, bei weiterer Verfolgung des Gegenstandes, durch eine Mittheilung unseres vortrefflichen *Gauſs* unterstützt worden, welche aber mit benützt ist. Die bloſse Theilnahme dieses groſsen Analysten würde hinreichen, um Interesse für den Gegenstand zu erregen. *N.*

wesen, die, wegen ihrer practischen Bedeutsamkeit und der Schwierigkeit einer genauen Auflösung, groſse Aufmerksamkeit erregt hat, und diese Aufmerksamkeit verdient. Es handelte sich nämlich um Beantwortung folgender Frage:

»*Ein Faſs enthält 2000 Quart Branntwein von 80 Procent Spiritusgehalt. Täglich sollen davon 15 Quart abgelassen, und hierauf 12 Quart von 40 Procent Spiritusgehalt zugegossen werden, bis der Spiritusgehalt des Restes auf 50 Procent herabgebracht ist. Nach wie viel Tagen wird dieſs geschehen?*«

Betrachtet man diese Frage zunächst aus dem physisch-practischen Gesichtspuncte, so drängt sich sogleich die Bemerkung auf, daſs eine Mischung zweier Flüssigkeiten von verschiedener specifischer Schwere eine Trennung in vielfache ungleichartige Schichten erleidet. Bei dieser Unmöglichkeit wirklicher Homogeneität schien mir, *in so fern es sich von der Ausübung handelt*, das nachstehende sehr einfache Näherungsverfahren vorläufig vollkommen hinreichend.

Durch Wegnahme von 15 Quart und Hinzugieſsung von 12 Quart wird der *Flüssigkeitsgehalt* täglich um 3 Quart, und also am ersten Tage auf 1997 Quart vermindert. 15 am ersten Tage weggenommene Quart zu 80 Procent enthalten 12 Quart Spiritus, und 12 nachher hinzugegossene Quart zu 40 Procent, 4,8 Quart Spiritus. Die in den 2000 Quart zu 80 Procent enthaltenen 1600 Quart *Spiritus* sind also am ersten Tage um $12 - 4{,}8 = 7{,}2$ auf 1592,8 vermindert. Man hat demnach

$$1997 : 1592{,}8 = 100 : 79{,}7 \text{ Procent,}$$

d. h. der Spiritusgehalt im Fasse ist durch die erste Mischung von 80 auf 79,7 Procent herabgebracht. Berücksichtigt man, daſs die 15 am zweiten Tage wegzuneh-

menden Quart Mischung hiernach nur noch 11,9 Quart Spiritus enthalten, u. s. w., so findet man die folgenden Glieder = 79,5; 79,2; 79.

Diese Folge gehört aber sehr nahe einer geometrischen Progression von dem Exponenten 0,997 an; und es handelt sich also darum, die Anzahl der Glieder derselben zu finden, wenn das erste Glied = 80, und das letzte = 50 ist. Diese Anzahl findet sich nach einer bekannten Formel:

$$= \frac{\log. 50 - \log. 80}{\log. 0,997} + 1 = \frac{0,20412}{0,00130} + 1 = 158,$$

d. h. die gesuchte Anzahl von Tagen, welche, da das erste Glied keinen Tag gilt, um 1 weniger beträgt, ist hiernach = 157.

Ich wiederhole, daſs dieses Resultat nur eine, lediglich für die Praxis zuläſsige, von der bloſs rechnenden Genauigkeit aber nothwendig abweichende Annäherung gewährt. Denn man überzeugt sich leicht, daſs, wenn gleich einer gewissen Anzahl von Gliedern der Reihe durch einen bestimmten Exponenten Genüge geschieht, an weiter entfernten Stellen doch wieder ein anderer Exponent u. s. w. erforderlich seyn wird. Allenfalls könnte man Behufs der Erlangung gröſserer Genauigkeit mittelst dieser Näherungsmethode zuerst bloſs die Anzahl der Glieder für eine Abnahme des Spiritusgehaltes um wenigere, etwa um 5 Procent, und an dieser Stelle der Reihe den neuen Exponenten, wie oben, unmittelbar suchen, so daſs die Gliederanzahl in mehreren Absätzen gefunden würde. Das nachstehende genaue Verfahren wird am besten zeigen, wie weit auch letztere Abänderung der von mir gezeigten Annäherungsweise, Falls sie rechnend wirklich ausgeführt werden sollte, mit dem rein analytischen Ergebnisse übereinstimmt.

Sey also, Behufs einer solchen erschöpfenden analytischen Behandlung der Aufgabe, die ursprüngliche Quantität des Flüssigen $= a$, ihr *specifischer* Spiritusgehalt $= b$; und nehme erstere nach 1, 2, ... x Tagen auf a', a'', ... A, letzterer aber auf b, b', ... B ab; sey ferner die Quantität des täglich Ausgeschöpften $= c$, des täglich Nachgegossenen $= d$, der specifische Spiritusgehalt des letzteren $= e$, und setze man endlich, Kürze wegen, $c - d$, d. i. $a - a'$, $= f$. Die Beschaffenheit der Aufgabe gibt sodann

$$a' = a - f, \quad a'' = a' - f = a - 2f \dots A = a - xf;$$

ferner

$$ab - cb + de = a'b' = ab - cb + ce - ef = \dots$$
$$ab - cb + ce - a'e + ae, \text{ d. h.}$$

$$(a - c) \cdot (b - e) = a'(b' - e) \quad \text{oder}$$

$$b' - e = (b - e) \cdot \frac{a - c}{a'} = (b - e) \cdot \frac{a - c}{a - f}.$$

Offenbar wird eben so

$$b'' - e = (b' - e) \cdot \frac{a' - c}{a''} = (b' - e) \cdot \frac{a - c - f}{a - 2f};$$

$$b''' - e = (b'' - e) \cdot \frac{a'' - c}{a'''} = (b'' - e) \cdot \frac{a - c - 2f}{a - 3f}$$

u. s. w., endlich aber

$$B - e = (b - e) \cdot \frac{a - c}{a - f} \cdot \frac{a - c - f}{a - 2f} \cdot \frac{a - c - 2f}{a - 3f} \dots \frac{a - c - (x - 1)f}{a - xf}$$

In dieser Gleichung ist, außer x, Alles bekannt, und die Beantwortung der Frage hängt daher bloſs von Auflösung der Gleichung ab. Allgemein (in Zeichen) ist sie in Beziehung auf x transcendenter Art, wie man gleich übersieht; sie wird aber allemal algebraisch, und bloſs von der Ordnung $\frac{c}{f} - 1$, wenn $\frac{c}{f}$ eine ganze Zahl ist. Dieſs ist der Fall in der vorgelegten Frage, für welche wir haben:

$$a = 2000,$$
$$b = 0{,}8,$$
$$c = 15,$$
$$e = 0{,}4,$$
$$f = 3,$$
$$B = 0{,}5;$$

die Gleichung wird dadurch:

$$1 = \frac{4 \,.\, 1985 \,.\, 1982 \,.\, 1979 \,.\, 1976 \,.\, 1973 \ldots (1988 - 3x)}{1997 \,.\, 1994 \,.\, 1991 \,.\, 1988 \,.\, 1985 \ldots (2000 - 3x)}.$$

Da nun hier nach den vier ersten Factoren des Nenners gerade die Factoren des Zählers der Reihe nach erscheinen, eine Folge davon, daſs $c = 5f$, so findet offenbar eine Destruction Statt, so daſs im Zähler, ausser der Zahl 4, nur die vier letzten, im Nenner nur die vier ersten Factoren übrig bleiben. So erhält man

$$1 = \frac{4 \,.\, (1997 - 3x) \,.\, (1994 - 3x) \,.\, (1991 - 3x) \,.\, (1988 - 3x)}{1997 \quad . \quad 1994 \quad . \quad 1991 \quad . \quad 1988},$$

also eine bloſs biquadratische Gleichung, die sich jedoch auf zwei quadratische zurückführen läſst. Zu diesem Zwecke setze man

$$\tfrac{1}{4} \,.\, 1997 \,.\, 1994 \,.\, 1991 \,.\, 1988 = M \quad \text{und}$$
$$1992\tfrac{1}{2} - 3x = y, \quad \text{so kommt}$$

$$M = (y + \tfrac{9}{2}) \,.\, (y + \tfrac{3}{2}) \,.\, (y - \tfrac{3}{2}) \,.\, (y - \tfrac{9}{2}) \quad \text{oder}$$
$$M = y^4 - \tfrac{45}{2} y^2 + \tfrac{729}{16},$$
$$M + 81 = y^4 - \tfrac{45}{2} y^2 + \tfrac{2025}{16} = (yy - \tfrac{45}{4})^2, \quad \text{also}$$
$$y = \sqrt{[\tfrac{45}{4} + \sqrt{(M + 81)}]}, \quad \text{und endlich}$$
$$x = \frac{1992\frac{1}{2} - y}{3} = 664\tfrac{1}{6} - \sqrt{\left[\tfrac{5}{4} + \sqrt{\left(\tfrac{M}{81} + 1\right)}\right]}.$$

Nun ist, wenn die oben angedeuteten rechnenden Operationen vollzogen werden:

$$M = 3940314325486;$$

und, bei Beschränkung auf die Grenzen:

$$\frac{M}{81} + 1 = 4864585587 1 \text{; ferner}$$

$$\sqrt{\left(\frac{M}{81} + 1\right)} = 220558, \text{ und endlich}$$

$$\sqrt{[\tfrac{5}{4} + 220558]} = 469;$$

welches, von 664 abgezogen, für x, als Anzahl der ganzen Tage, 195 läfst.

Dieses ist also das, bis auf den Bruch, vollkommen genaue *analytische* Resultat, nach welchem jedes, die *physischen* Beziehungen der Frage mit betrachtende Näherungsverfahren geprüft werden kann.

VIII.

Fortschritte der Physik in der neuesten Zeit.

A. Magnetismus.

1. *Christie's* Theorie der täglichen Variation der Magnetnadel.

(*Edinb. phil. Journal. N.* 6, *p.* 356.)

Es ist in der neueren Zeit öfters behauptet worden, dafs das Sonnenlicht auf den Erdmagnetismus einen Einflufs ausübe, und dafs sich davon die kleineren Veränderungen im Stande einer Magnetnadel ableiten lassen. *Christie* sucht die Ursache dieses Einflusses in einem thermo-magnetischen Verhalten zwischen der Erde und ihrer Atmosphäre, nach welchem das Sonnenlicht nun durch seine erwärmende Kraft, nicht durch sein Leuchtvermögen wirkend angenommen wird. Ich theile das Wesentliche der Versuche mit, die in seinen Augen diese Theorie unterstützen sollen, bin aber der Meinung, dafs das Licht als solches durch seine eigene leuchtende Na-

tur, abgesehen von seinem Erwärmungsvermögen, einen Einfluſs auf den Erdmagnetismus ausübet.

Christie hielt es zur Prüfung seiner Hypothese für nothwendig, zuerst zu untersuchen, ob auch thermomagnetische Phänomene eintreten, wenn die zwei Metalle, an denen sie erregt werden sollen, durchaus in gleichförmiger Berührung stehen, und nicht bloſs einen Punct mit einander gemein haben. Zu diesem Behufe nahm er einen flachen Ring aus Kupfer, an dessen innerer Fläche eine Wismuthplatte angeschmolzen war, so daſs das Ganze eine kreisförmige Platte vorstellte, die 12 Z. im Durchmesser hatte, und 119 Uncen Troy-Gewicht wog. Er erhitzte einen bestimmten Punct jenes Umfanges mittelst einer Lampe, nahm diese hierauf weg, brachte eine zum Theil astatisch gemachte Magnetnadel in ihre Nähe, drehte die Scheibe hierauf in ihrer eigenen Ebene, um sie in ein einem Parallelkreise der Erde ähnliches Verhältniſs zu bringen, und bemerkte die Ablenkung, welche sie an der Nadel hervorbrachte. Auf diesem Wege fand er, daſs durch Erhitzung eines Theils des Umfanges der Scheibe eine temporäre Polarität erzeugt werde. Es entstehen da vier Pole, zwei Nordpole und zwei Südpole, erstere liegen in einem, letztere in dem anderen Halbkreise, dem ersteren gegenüber; alle fielen in die Wismuthplatte. Das Verhalten dieser zwei Metalle gegen einander verglich er nun mit dem der Erde gegen ihre Atmosphäre. Um die Ähnlichkeit noch gröſser zu machen, füllte er eine hohle kupferne Kugel mit Wismuth, erhitzte sie am Äquator, jedoch nicht gleichförmig, sondern so, daſs ein Theil derselben eine höhere Temperatur erlangte als der andere, gab ihr hierauf eine solche Lage, daſs ihre Axe gegen den Horizont geneigt war, und der erhöhte Pol gegen Norden sah, und beobachtete die Ablenkung, welche sie an ei-

ner Magnetnadel hervorbrachte. Befand sich die am meisten erwärmte Stelle über dem Horizont, so erschien die Ablenkung des Nordpoles der Magnetnadel immer östlich, stand aber dieser Punct unter dem Horizont, so war die Abweichung westlich, mithin so, wie sie die Erfahrung an der Nordhälfte der Erde zeigt.

Aus dem erwähnten thermo-magnetischen Versuche ging hervor, daſs die Erde durch Erwärmung mittelst des Sonnenlichtes vier magnetische Pole bekommt. Um eine hinreichende magnetische Kraft zu erhalten, ersetzte nun *Christie* die vier in seiner Platte durch Erhitzung erzeugten Pole durch die zweier 6 Z. langen Magnetstäbe, deren Axen er so sich kreuzen lieſs, daſs sie mit der Axe, um die sie gedreht werden sollten, denselben Winkel machten, den die durch Erwärmung in obiger Platte erzeugten Pole andeuten, setzte sie in drehende Bewegung, und beobachtete die Ablenkung, die sie an einer horizontal schwebenden darüber gestellten Magnetnadel hervorbrachten. Indem er nun die Drehungsaxe seines Apparates gegen den Horizont nach der Polhöhe verschiedener Orte auf der Erdoberfläche einrichtete, verglich er die dabei Statt habende Ablenkung der Magnetnadel mit der in diesen Orten wirklich beobachteten. Die Vergleichung ward gemacht mit den Beobachtungen zu Fort Enterprise von *Hood* im Jahre 1821, Breite 64°, 28′ N.; zu London von *Canton* im Jahre 1759; zu Port Bowen von *Foster* im Jahre 1825; zu Bushy Heath von *Beaufoy* im Jahre 1820. Die Vergleichung fiel zu Gunsten der *Christie*'schen Hypothese aus, nur die Zeit der gröſsten und kleinsten Abweichung ergab sich nach der Hypothese anders, als nach der Erfahrung.

2. *Kupffer's* Untersuchungen über die Vertheilung der magnetischen Kraft in Magnetstäben.

(*Ann. de Chim. et de Phys. Tom.* 35, *p.* 50 *e. s.*)

Kupffer in Kasan, dem man schon mehrere Untersuchungen über den Magnetismus verdankt, hat auch die Vertheilung der magnetischen Kräfte in einem Stahlstabe untersucht, der entweder durch den Erdmagnetismus allein; oder durch diesen und durch Bestreichen mit einem Magnete magnetisch geworden war. Seine Absicht ging dahin, die Stelle, wo der Stab auf einen nahen Magnet gar nicht wirkt, d. h. den Indifferenzpunct desselben und den Ort, wo man den Mittelpunct aller magnetischer Kräfte dieses Stabes, die nach der Richtung seiner Axe wirken, annehmen kann, näher zu bestimmen. Das Mittel, welches er zur Auflösung dieser Aufgabe anwendete, war der Einfluſs, den ein Stab, wie der oben genannte, auf die Schwingungen einer horizontal schwebenden Magnetnadel ausübte, wenn er so gegen sie gestellt wurde, daſs ein bestimmter Punct in ihrer Verlängerung sich befand. Aus diesem Einflusse lieſs sich die magnetische Intensität der der Nadel gegenüber stehenden Stelle durch bekannte Rechnungen finden.

Der Stab, dessen sich *Kupffer* bediente, war cylindrisch, 607 Millim. lang, 12,5 Mill. dick, und bestand aus ungehärtetem Guſsstahl. Die Magnetnadel war flach, gerade, und 12 Mill. lang. Sie oscillirte in einer Entfernung von 3 Decim. vom Stabe. Zuerst war dieser Stab in seinem natürlichen Zustande, bloſs dem Erdmagnetismus überlassen, in verticaler Stellung der Nadel gegenüber gestellt, und an verschiedenen Stellen seine Einwirkung auf sie untersucht; hierauf lieſs ihn *Kupffer*

über den Nordpol eines starken, künstlichen Magnetes hingleiten, damit er schwach magnetisirt wurde, und wiederholte das vorige Verfahren wieder; endlich ertheilte er ihm auf dieselbe Weise die ganze magnetische Kraft, die er anzunehmen fähig war, und machte wieder dieselben Versuche damit, und zwar wenn der Nordpol der Stange gegen aufwärts, und wenn er gegen abwärts gekehrt war.

Die allgemeinen Resultate, welche diese Versuche geben, sind:

1) Bei der angedeuteten Methode zu Magnetisiren ist der Pol, welcher unmittelbar durch Berührung mit dem künstlichen Magnet hervorgebracht wird, stärker als der andere.

2) Der Indifferenzpunct liegt immer dem stärkeren Pole näher als dem schwächeren.

3. Eine künstliche Magnetstange hat immer den stärkeren Magnetismus, wenn (in unserer Hemisphäre) der Nordpol abwärts gekehrt ist, als wenn er nach aufwärts gerichtet ist. Die Ursache dieses ungleichen Verhaltens ist leicht einzusehen; denn einer Stange, der man unabhängig vom Erdmagnetismus eine magnetische Polarität ertheilt hat, wird auch vom Erdmagnetismus afficirt, und ihr unteres Ende ein Nordpol, das obere ein Südpol. Steht nun ihr künstlicher Nordpol nach aufwärts, so fällt er in den Südpol, den der Erdmagnetismus erzeugt, und wird dadurch geschwächt; dasselbe erfolgt mit einem Südpole, dessen Kraft durch den vom Erdmagnetismus erregten Nordpol vermindert wird. Bei der entgegengesetzten Stellung des Stabes hingegen fallen die gleichnamigen Pole in dieselbe Hälfte, und unterstützen sich einander.

Ähnliche Resultate ergaben sich, als der Magnetstab in horizontaler Stellung der Magnetnadel gegenüber

stand; auch da wirkte er mit gröfserer Kraft auf sie ein, wenn sein Nordpol gegen Nord gerichtet war, als wenn er eine entgegengesetzte Stellung hatte.

Um den Mittelpunct der magnetischen Kraft des Stabes zu finden, liefs *Kupffer* eine Magnetnadel in zwei verschiedenen Entfernungen von demselben oscilliren. Wurden die Entfernungen vom Mittelpuncte der Magnetnadel an bis zum äufsersten ihr zugekehrten Ende des Stabes gemessen; so waren die Wirkungen des Stabes nahe im verkehrten Verhältnisse der Quadrate dieser Entfernungen, mithin der Mittelpunct der Kräfte sehr nahe am Ende des Stabes. Man findet die Distanz $= a$ dieses Punctes vom Ende des Stabes in der Voraussetzung, dafs die Wirkungen dieses Stabes im verkehrten Verhältnisse der Quadrate der Entfernungen vom Mittelpuncte der Nadel stehen, durch die Formel

$$a = \frac{b' \sqrt{k'} - b \sqrt{k}}{\sqrt{k} - \sqrt{k'}} \text{ *)},$$

wo b und b' zwei verschiedene Entfernungen des Stabendes vom Centrum der Nadel, k und k' die in dieser

*) Es ist nämlich unter Voraussetzung der genannten Bedeutungen von a; b, b'; k, k' für einen Versuch in der Entfernung b

$$k = \frac{c}{(b + a)^2},$$

und für einen anderen in der Entfernung b'

$$k' = \frac{c}{(b' + a)^2},$$

wo c eine für denselben Stab in denselben magnetischen Verhältnissen constante Gröfse bedeutet. Sucht man sie aus beiden Gleichungen, setzt ihre Werthe einander gleich, so erhält man

$k(b+a)^2 = k'(b'+a)^2$ oder $(b+a)\sqrt{k} = (b'+a)\sqrt{k'}$, und hieraus obigen Ausdruck. *B.*

Distanz ausgeübten Kräfte des Stabes sind. An einem bis zur Sättigung magnetisirten Stabe ist der Werth von *a* negativ, d. h. der Punct, den *a* bezeichnet, liegt außerhalb des Stabes; bei schwach magnetisirten Stäben ist am schwächeren Ende stets *a* positiv, und kann sogar einen bedeutenden Werth erlangen.

Als *Kupffer* einen cylindrischen Stahlstab durch Berührung eines Endes desselben mit dem Nordpol eines kräftigen Magnetes magnetisirt hatte, und die Größe *a* untersuchte, fand er sie desto größer, je weiter der Indifferenzpunct von der Mitte der Stange entfernt war, und an dem Ende negativ, dem der Indifferenzpunct näher lag, am anderen hingegen positiv. *Kupffer* glaubt aus diesen Umständen die verschiedene Einwirkung des glühenden Eisens auf eine Magnetnadel, die *Barlow* (*Gilbert's* Annalen, B. 73, S. 229) näher untersuchte, erklären zu können. Da an sehr schwachen Magneten die Indifferenzpuncte den Extremitäten sehr nahe sind, und Eisen, das nahe am Hellrothglühen ist, von der Erde nur schwach magnetisch wird, so kann sich an jedem Ende ein Indifferenzpunct bilden, so daſs man mit der Probenadel leicht auf Puncte geräth, die schon einen dem Ende entgegengesetzten Magnetismus besitzen; so wie aber die Eisenstange der Dunkelrothglühhitze nahe kommt, bei der sie von der Erde stark magnetisch gemacht werden kann, rückt der Indifferenzpunct gegen die Mitte zu, und die Einwirkung auf die Probenadel erfolgt wie bei der gewöhnlichen Temperatur.

Auf die Lage des Indifferenzpunctes und des Mittelpunctes der Kräfte, die auf eine Nadel wirken, hat die Gestalt des Stabes und die Temperatur einen groſsen Einfluſs. Bei einem bis zur Sättigung magnetisirtem Stabe, der an einem Ende abgerundet war, und an diesem der Probenadel genähert wurde, war der Indif-

ferenzpunct in der Mitte. Als dieses Ende zugespitzt wurde, rückte dieser Punct der Spitze immer näher, je länger sie war, und der Werth von a, der anfangs negativ war, verminderte sich, wie man die Spitze verlängerte, ward endlich $= o$, und zuletzt gar positiv.

Durch Erwärmen wird der Mittelpunct der Kräfte gegen die Mitte der Stange hingezogen. Deſswegen rückt er, falls er bei der gewöhnlichen Temperatur auſserhalb des Stabes liegt, näher an ihn, fällt in das Ende selbst, und entfernt sich gar nach innen zu von diesem.

3. Magnetische Versuche in China und St. Helena zur Bestimmung der Ebene ohne Abweichung in diesen Ländern. Von *Wilson.*

(*Edinb. Journ. of Science, N.* 12, *p.* 318.)

Bekanntlich hat *Barlow* gefunden, daſs eine Magnetnadel von einer Eisenkugel nicht unter allen Umständen abgelenkt wird, sondern, daſs es zwei Ebenen gibt, in welche die Nadel gestellt werden kann, ohne daſs sie von der Eisenmasse eine Ablenkung erleidet. Diese zwei Ebenen sind zu Woolwich, wo *Barlow* die Versuche anstellte, die auf der Axe einer frei schwebenden Magnetnadel senkrechte Ebene, und die des magnetischen Meridians. Beide Ebenen ändern sich mit der geographischen Lage des Ortes, und es ist nicht uninteressant zu sehen, ob denn die Ebenen, wo keine Ablenkung erfolgt, überall mit den obigen zwei durch den Erdmagnetismus bestimmten zusammen fallen, wie es in Woolwich, und nach *Schmid's* Versuchen in Gieſsen der Fall ist. Besonders wichtig sind Versuche hierüber an Orten, wo eine von der in unseren Gegenden sehr verschiedene oder gar entgegengesetzte Neigung Statt findet.

Von der Art sind die von *Wilson* in China und in St. Helena angestellten.

In beiden Orten wurden die Versuche mit einer Eisenkugel von 12.68 Z. Durchmesser angestellt, und die Magnetnadel in einem Kreise von 21.1 Z. Durchmesser um sie herumgeführt. Die Neigung der Magnetnadel fand *Wilson* in dem Orte des Versuches in China mit seiner Neigungsnadel 31°, 20′ nördlich, und die Neigung der Ebene ohne Abweichung fand er 54°, 33′; 55°, 1′; 54°, 29′, also im Mittel 54°, 44′. Wäre die Neigung der Axe der Magnetnadel richtig angegeben, so betrüge die Neigung der auf ihr senkrechten Ebene

$$90° - 31°, 20' = 58°, 40';$$

weil aber *Wilson* vor seiner Abreise in London fand, daſs seine Neigungsnadel daselbst die Neigung um 1°, 36′ zu klein angab, so muſs auch in China die Neigung gröſser als 31°, 20′ seyn. Setzt man sie

$$31°, 20' + 1°, 36' = 32°, 56',$$

so bekommt die auf der Axe der Neigungsnadel senkrechte Ebene eine Neigung von 57°, 7′, die um etwa 3° kleiner ist als die Neigung der Ebene ohne Ablenkung gegen den Horizont.

In St. Helena ergab sich die Neigung der Ebene ohne Ablenkuug bei zwei Versuchen gleich 72°, 52′ und 72°, 48′, mithin im Mittel gleich 72°, 50′, und die Neigung der Magnetnadel ergab sich aus *Wilson's* Beobachtung gleich 16°, 31′ südlich. Bringt man, wie oben, den Fehler der Neigungsnadel in Rechnung, so findet man die Neigung der auf der Axe der Neigungsnadel senkrechten Ebene gleich 75°, 5′, also um 2°, 35′ gröſser als die Neigung der Ebene ohne Abweichung.

Diese an und für sich nicht geringe Differenz scheint aber nur von einem Umstande abzuhängen, den *Wilson*

bei Gelegenheit dieser Versuche zuerst bemerkte, nämlich von einer ungleichen Entfernung der beiden Pole der Magnetnadel von der Axe, um die sie sich bewegte, mithin von der ungleichen Vertheilung des Magnetismus in den beiden Hälften der Magnetnadel.

4. Wiederholung der Versuche über die Einwirkung einer rotirenden Eisenscheibe auf eine Magnetnadel zu Port Bowen. Von *Foster*.

(Phil. transact. for the year 1826. *P. IV. p.* 188.*)*

Christie hat den Einfluſs einer rotirenden eisernen Scheibe auf eine horizontal schwebende Magnetnadel durch Versuche geprüft, und die Gesetze dieses Einflusses nachgewiesen. (Siehe B. II. S. 322 u. f. dieser Zeitschrift.) Diese Gesetze hängen gleich denen, welche im vorhergehenden Aufsatze erwähnt wurden, von der geographischen oder vielmehr magnetischen Lage des Beobachtungsortes ab, und es muſste sowohl *Christie* als jedem Freunde der Physik erwünscht seyn, daſs diese Versuche in anderen Orten wiederholt wurden, besonders in solchen, wo die magnetische Neigung und die Stärke des Erdmagnetismus sehr stark gegen dieselben Gröſsen im ersten Beobachtungsorte variiren. *Foster* hat im Mai und Juni 1825 zu Port Bowen, wo die Neigung der Magnetnadel 88° übertrifft, diese Versuche wiederholt, und nicht nur die factischen Resultate *Christie's*, sondern auch seine Vermuthung bestätiget, daſs die Wirkungen einer rotirenden Eisenscheibe im verkehrten Verhältnisse mit dem Cosinus der magnetischen Neigung wachsen.

Christie hatte nämlich ausgemittelt, daſs die Ablenkung, welche eine solche rotirende Scheibe an einer horizontal schwebenden Magnetnadel hervorbringt, nicht

von der Lage dieser Scheibe gegen eine *solche* Nadel, sondern gegen die einer Neigungsnadel abhänge, welche mit jener einerlei Mittelpunct hat; und *Foster* hat dasselbe zu Port Bowen gefunden. Die Richtung, in welcher die Ablenkung erfolgte, war zu Port Bowen mit der zu Woolwich von *Christie* beobachteten ganz übereinstimmend.

Befand sich die Eisenplatte in einer auf dem magnetischen Äquator und Meridian der Nadel senkrechten Ebene *), so fand *Christie* die mittlere von der Rotation herrührende (die von der durch die ruhende Scheibe erzeugten wohl unterschieden werden muſs; von letzterer allein ist hier die Rede) in der Breite von 0° gleich 1°, 36′, und in der Breite von 90° gleich —0°, 45′; zu Port Bowen betrugen diese Ablenkungen 14°, 14′ und —6°, 28′, mithin nahe in demselben Verhältnisse mehr, als der Cosinus der Neigung gröſser ist. Jedoch in der Angabe des Punctes, wo die Rotation der Scheibe keine Ablenkung hervorbrachte, weichen beide Beobachtungen von einander ab; nach *Christie* erfolgt dieses

*) *Christie* denkt sich die horizontal schwebende Nadel durch eine am Schwerpuncte frei aufgehängte ersetzt, die mit ersterer einerlei Mittelpunct hat, und aus diesem Mittelpuncte eine Kugelfläche beschrieben, an der sich nach der Lage der Axe der Magnetnadel ähnliche Ebenen annehmen lassen, wie man sie an der Himmelssphäre nach der Lage der Erdaxe annimmt. Die verlängerte Axe der Neigungsnadel bezeichnet an der Kugelfläche die beiden Pole, eine darauf senkrechte und durch ihren Mittelpunct gehende Ebene die des magnetischen Äquators, eine verticale durch beide Pole gehende die des Meridians, etc. Jeder Punct der Kugelfläche konnte durch seine Länge und Breite eben so bestimmt werden, wie durch diese Gröſsen die Lage eines Punctes auf der Erdoberfläche angegeben werden kann.

in einer Breite von 54° 3/4, nach *Foster* bei 52° 1/2. *Christie* meint, dafs diese Abweichung nicht auf Rechnung eines Beobachtungsfehlers kommen könne, und verspricht darum seine eigenen Versuche hierüber noch ein Mal vorzunehmen.

Befand sich die Eisenplatte in einer Berührungsebene der magnetischen Sphäre, die um die Magnetnadel beschrieben gedacht wurde, und war ihr Mittelpunct im Pole, so war nach *Christie's* Versuchen keine Ablenkung der Magnetnadel bemerkbar; befand sich aber ihr Mittelpunct in dem Puncte des Äquators, wo er vom Meridian geschnitten wurde, so erreichte die Ablenkung ihr Maximum. Nach *Foster's* Versuchen ist die Ablenkung an derselben Stelle der Platte gleich Null, aber ihren gröfsten Werth hatte sie, wenn sich das Centrum der rotirenden Scheibe in zwei Puncten befand, deren einer zwischen dem Äquator und dem Südpole in einer Länge von 90°, der andere zwischen dem Äquator und dem Nordpole in einer Länge von 270° lag. Die Ursache dieser Abweichung fanden *Christie* und *Foster* darin, dafs zu Port Bowen die Richtkraft der horizontalen Nadel viel kleiner, und die durch Rotation bewirkte Ablenkung viel gröfser ist, als an *Christie's* Observationsplatze, und darum in ersterem Orte diese Richtkraft durch die Anziehung der Eisenplatte mehr vermindert wurde, als in letzterem.

Bei *Christie's* Versuchen war die Ablenkung der Magnetnadel unmerklich, wenn sich der Mittelpunct der rotirenden Platte in einer auf dem Äquator und dem Meridian senkrechten Ebene befand, und sie die magnetische Sphäre berührte; zu Port Bowen hingegen war die Ablenkung bei dieser Lage der Eisenplatte wohl merklich, es liefsen sich aber die Puncte wahrnehmen, wo

die Scheibe in der genannten Ebene keine Ablenkung hervorbringen konnte.

5. Über die gegenseitige Wirkung der Theile magnetischer Körper auf einander. Von *Christie.*

(Phil. trans. 1827. P. I. p. 71.)

Ungeachtet der zahlreichen Versuche, die man angestellt hat, um die Einwirkung magnetischer Körper auf einander kennen zu lernen, ist man doch nicht dahin gelangt, ohne Hypothese die Wirkung angeben zu können, welche einem einzelnen Elemente derselben zugeschrieben werden muſs, damit der Effect des Ganzen so ausfällt, wie ihn die Erfahrung angibt; und doch muſs man so weit gekommen seyn, wenn man im Stande seyn soll, den Einfluſs der Gestalt der Körper, ihrer gegenseitigen Entfernung etc. vorhinein zu bestimmen. *Christie* machte den Versuch, diese Aufgabe für den Fall zu lösen, wo ein Magnet und eine Kupferscheibe auf einander einwirken. Das Wesentliche dieser Arbeit mag hier Platz finden, nicht sowohl, weil dadurch obige Aufgabe auf die erwünschte Weise aufgelöset ist, sondern weil sie einen neuen Weg zeigt, der vielleicht, wenn er von Mehreren betreten wird, zum Ziele führt.

Christie's Aufsatz zerfällt in zwei Theile. Im ersten sucht er durch Experimente die Gröſse der Einwirkung zweier verticaler rotirender Magnetstäbe auf horizontal darüber hängende kupferne Ringe und Scheiben bei verschiedenen Entfernungen der Drehungsaxe der Magnete vom Mittelpuncte der Scheiben und Ringe, in horizontaler Richtung gemessen; im zweiten sucht er dieselbe Einwirkung bei verschiedener Entfernung der obersten Pole der Magnete von der unteren Fläche der Ringe und Scheiben. Aus dieser gesuchten Gröſse, welche die

Wirkung aller Elementartheile der auf einander einwirkenden Körper angibt, bestimmt er mittelst Rechnung die Gröfse der Wirkung auf ein einzelnes Element. Die Stärke der Einwirkung der ganzen Massen auf einander sucht er aber nicht auf dem bisher betretenen Wege, nämlich aus dem Drehungswinkel der Kupferscheibe oder aus der Anzahl der Umdrehungen, die sie bei einer gewissen Geschwindigkeit der rotirenden Magnete in einer bestimmten Zeit macht, sondern aus der Torsion eines elastischen Drahtes, welche der Einwirkung der Magnete auf die Kupfermasse das Gleichgewicht hält. Ich hoffe, der Leser wird sich von dem hierzu gebrauchten Apparate aus Folgendem eine deutliche Vorstellung machen können: Man denke sich unter der Platte eines horizontalen Tisches ein Drehwerk angebracht, das sich durch eine Kurbel in Bewegung setzen läfst, und wovon eine cylindrische Stange (die Axe) in verticaler Richtung über diese Platte hervorsteht. An dieser Stange stelle man sich eine hölzerne, verticale Rahme vor, in welcher in gleicher Entfernung von der Drehungsaxe zwei verticale, mit dem Südpole nach aufwärts gekehrte Magnetstäbe befestiget sind. Sobald man die Kurbel dreht, fängt obiger Cylinder zu rotiren an, und führt mit sich die Rahme und die zwei daran befestigten Magnete im Kreise herum. Über den beiden Magneten denke man sich einen Bogen Papier oder ein dünnes Bret als Schirm, der aber mit ihnen nicht in Verbindung stehet. An der oberen Fläche dieses Papieres sey ein Kreis beschrieben und in Grade getheilt, und über ihn die zum Versuche bestimmte Kupferscheibe schwebend. Sie hängt an einem Metalldraht, der am oberen Theile einfach ist, nahe am unteren Ende aber aus vier Theilen besteht, damit die Platte wie eine Wagschale daran befestiget werden kann.

Christie brauchte zwei Kupferscheiben von 8,4 Z. im Durchmesser, wovon eine 5298 Gr., die andere 5232 Gr. wog. Durch Zugabe von Glas machte er die zweite an Gewicht der ersten gleich. Der Draht, woran sie hingen, war von Nro. 22, und hatte eine Länge von 45,6 Z.

Bei den Versuchen wurden die Magnete in einer Secunde fünf Mal herumgedreht, und bei jeder Stellung der Kupfermasse gegen die Magnete folgendes beobachtet: 1) die Zeit, in welcher die Kupferscheibe eine, zwei etc. Umdrehungen machte; 2) nach wie viel Umdrehungen sie durch die Torsion des Fadens zum momentanen Stillstande gebracht wurde; 3) die Zahl der Umläufe nach der entgegengesetzten Richtung, bis sie neuerdings durch die Torsion des Fadens zum Umkehren gezwungen war.

Es sey nun die Kraft, welche in der Entfernung $= 1$ von der Rotationsaxe der Torsion von α^0 des Drahtes das Gleichgewicht hält, gleich $m\alpha$, wo m eine durch Versuche zu bestimmende Constante ist, ferner t die Zeit, in welcher die Scheibe sich um den Bogen δ dreht, mithin die Torsion δ Statt findet, und v die Geschwindigkeit eines Punctes der Scheibe, dessen Distanz von der Drehungsaxe $= 1$ ist, so hat man:

$$v\,dv = m(\alpha - \delta)\,d\delta, \quad v^2 = m(2\alpha\delta - \delta^2)$$

$$\text{und} \quad t = \frac{1}{\sqrt{m}} \cdot \frac{1}{\text{sin. ver.}\,\frac{\delta}{\alpha}}.$$

Gehen die Gröſsen t und δ in t' und δ' über, wenn $v = 0$ ist, d. h. die Scheibe anfängt umzulenken, so ist

$$2\alpha\delta' - \delta'^2 = 0 \quad \text{und} \quad \alpha = \tfrac{1}{2}\delta',$$

$$\text{mithin} \quad t' = \frac{1}{\sqrt{m}} \cdot \pi.$$

Bei der ersten Versuchsreihe schwebte die Kupfer-

platte 1 Z. über den Magneten. Diese selbst aber wurden nach der Reihe der Drehungsaxe von 4.2 Z. auf 3.7; 3.2; 2.7; 2.2; 1.7 Z. genähert, und bei jedem Stande obige Messungen vorgenommen; dabei befand sich der Mittelpunct der Kupferplatte in der verlängerten Drehungsaxe. Der mittlere Werth von t' ergab sich $= 269{,}83$ S., oder nahe 270 S., so daſs $\sqrt{m} = \frac{1}{3}$ ist. Demnach sind die Werthe von a nach der Reihe 680,5; 1198,4; 1528,7; 1463,1; 1110,9; 623,6. Nur der erste und letzte Werth entfernt sich weit von den anderen, die übrigen kommen einander nahe genug, darum *Christie* den ersten und letzten Versuch für fehlerhaft hält.

Sowohl bei den hier angeführten, als auch bei 169 anderen Beobachtungen, die *Christie* absichtlich anstellte, um das Verhältniſs zwischen den Gröſsen a und b auszumitteln, ergab sich, daſs a in demselben Verhältnisse wächst, in welchem b abnimmt. Unter der genannten Anzahl von Experimenten kommen nur 14 Fälle vor, wo das Gegentheil Statt fand; und da waren die Differenzen so klein, daſs man sie leicht Beobachtungsfehlern zuschreiben kann. Dieses stimmt auch mit der von *Herschel* und *Babbage* aufgestellten Behauptung recht wohl überein, nach welcher die Einwirkung des Magnetes auf die Kupferscheibe von dem Unterschiede zweier Systeme von Kräften abhängt; in das eine System gehören jene Kräfte, womit die mittelbar über einander liegenden Theile des Magnetes und der Kupferscheibe auf einander wirken, und in das andere jene, wodurch die vorausgehenden Theile der Scheibe vom Magnete afficirt werden. *Christie* meint, der rotirende Magnet könne bei groſser Geschwindigkeit nicht seine volle Wirkung auf jeden einzelnen Theil der Kupferplatte ausüben.

Werden obige Werthe von a im verkehrten Verhältnisse der Quadrate der Entfernung der Axen der

Magnete von der Drehungsaxe vermehrt, so geben sie nach *Christie's* Ansicht die verhältnifsmäfsige Stärke des Magnetismus, welcher durch den Magnet in der Kupferscheibe entwickelt wird. Auf diese Weise erhält man für die

Entfernung der Axen	4.2	3.7	3.2	2.7	2.2	1.7
die Stärke des Magn.	680.5.	1544.1	2639.6	3540.3	4048.8	3806.4.

Die Ursache dieses Verfahrens liegt darin: Je weiter die Magnete von der Drehungsaxe entfernt werden, desto gröfsere Kreise beschreiben sie, desto gröfser wird ihre Geschwindigkeit, und darum mufs die Kraft a, mit der ein Magnet auf die Kupferscheibe wirkt, in dem Verhältnifs vergröfsert werden, als er mehr von der Axe der Rotation absteht, um die relative Gröfse der Kraft zu finden, mit der er auf die Kupferplatte wirken würde, wenn er sich blofs unter einer anderen Stelle derselben drehen würde, als er immer dieselbe Geschwindigkeit beibehielte. Überdiefs wirkt der Magnet noch mit einem um so längeren Hebelarme auf die Kupferplatte, und sucht sie zu drehen, je mehr er von der Drehungsaxe absteht, darum mufs obige Kraft a noch ein Mal im Verhältnifs dieser Entfernung, mithin im Ganzen im Verhältnifs des Quadrates dieser Entfernung vergröfsert werden.

Aus Obigem ersieht man, dafs die Intensität des in der Platte erregten Magnetismus am gröfsten ist, wenn die Axen der Magnete um 2.07 Z. von der Rotationsaxe abstehen. Weil die Scheibe einen Durchmesser von 8.4 Z. hatte, so entspricht diese Stelle nahe dem Puncte, der mitten zwischen dem Rande und dem Mittelpuncte derselben liegt. Es wäre nicht uninteressant zu wissen, ob dieser Punct mit dem zusammenfällt, bei welchem nach *Arago's* Versuchen der horizontal wirkende Theil der magnetischen Kraft der Kupferplatte nach zwei entge-

gengesetzten Richtungen ausgeht (B. II. S. 334 und 345 dieser Zeitschrift). Durch Interpoliren findet man die Gröfse der magnetischen Kraft an dieser Stelle gleich 4182. Vergleicht man damit die Gröfse dieser Kraft, wenn die Axen der Magnete sich unter dem Rande der Kupferscheibe drehen, die nur 680.5 beträgt, so kann man nicht umhin, den grofsen Einflufs der Continuität der Masse auf die Stärke des entwickelten Magnetismus zu erkennen. Dieses veranlafste *Christie*, über diesen Einflufs der Continuität der Masse eigene Versuche anzustellen; wiewohl dieser Einflufs schon aus *Herschel's*, *Nobili's*, *Bacelli's*, *Sebeck's* und anderen Versuchen bekannt war. Da aber *Christie's* Versuche doch einige Eigenthümlichkeiten haben, so mögen sie mit ihren Resultaten hier auch Platz finden. *Christie* untersuchte zuerst die Wirkung der rotirenden Magnete auf eine massive Kupferplatte, dann machte er daran vier kreisförmige Einschnitte, so dafs die Scheibe gleichsam aus einem Ring und einer concentrischen kleineren Scheibe bestand, welche an vier um 90° von einander entfernten Stellen mit einander zusammen hingen, und untersuchte sie wieder; hierauf nahm er die in der Richtung eines Durchmessers liegenden Verbindungsarme weg, so dafs der Ring nur mehr an zwei Stellen mit der kleineren Scheibe zusammen hing, und endlich trennte er den Ring von der Scheibe gänzlich. Der Ring war 1 Z. breit, und der Werth von a betrug bei der ganzen Scheibe 1197.3, bei vier Einschnitten 733.6, bei zweien doppelt so grofsen 390.9, und bei der gänzlichen Trennung der Scheibe vom Ringe 373.8. Im letzten Falle konnte der Versuch mit jedem der beiden Stücke, in welche die Kupferscheibe zerfiel, besonders angestellt werden. Beim Ring war $a = 268$, bei der kleineren Scheibe $a = 120$, falls die Entfernung der Axen der

Magnete 3.7 Z. betrug, wie es beim vorhergehenden Versuche der Fall war; war diese Entfernung hingegen 3.2 Z., so gab der Ring allein $\alpha = 160.5$, die innere Scheibe allein $\alpha = 283.5$. Demnach ist für den ersten Stand der Magnete die Summe der Wirkungen beider Stücke, wenn jedes für sich untersucht wurde, etwas größer, als die Wirkung beider Stücke zugleich, im zweiten Falle sind diese Größen einander gleich. Im Ganzen ist die Wirkung durch die Trennung der Scheibe in zwei selbstständige Theile in dem Verhältnisse 3.44 : 1 vermindert worden.

Alle diese Versuche wurden mit der ersten der oben genannten Kupferscheiben angestellt. Die zweite diente zu den folgenden Experimenten: Zuerst wurde die Wirkung der rotirenden Magnete, deren Axen von der Drehungsaxe 3.2 Z. abstanden, auf die ganze ungetrennte Scheibe untersucht, hierauf in den Entfernungen 0.7; 1.2; 1.7; 2.2 Z. vom Centrum derselben kreisförmige Einschnitte gemacht, wovon der erstere eine kleine Scheibe, die folgenden aber Ringe von der Kupfermasse absonderten, und für jeden dieser Fälle die Wirkung der Magnete eigens gesucht. Da zeigte sich

für die ungetrennte Scheibe . . . . . $\alpha = 1516.7$,
bei einem Einschnitte nahe am Centrum $\alpha = 1421.8$,
bei zwei Einschnitten . . . . $\alpha = 1333.0$,
» drei » . . . . $\alpha = 1156.0$,
» vier » . . . . $\alpha = 879.0$.

Ward gar für den letzten Fall noch überdieſs die mittlere Scheibe und die drei Ringe weggenommen, so erhielt man $k = 884.0$.

Es scheint demnach auch die Stelle, wo die Continuität unterbrochen wird, einen Einfluſs auf die Verminderung der magnetischen Wirkung zu haben, und die Verminderung dieser Wirkung desto gröſser zu seyn,

je näher die Trennungsstelle dem Orte liegt, unter dem sich die Magnete bewegen. Wollte man eine Kupferplatte in eine grofse Anzahl concentrischer Ringe theilen, so würde die Wirkung der rotirenden Magnete auf sie kaum bemerklich werden. Da nach früheren Versuchen eine ähnliche Verminderung der Wirkung eintritt, wenn man die Continuität einer Scheibe nach der Richtung ihrer Halbmesser aufhebt, oder sie sternförmig ausscheidet, so ist es begreiflich, dafs die Wirkung eines Magnetes auf eine gepulverte Metallmasse kaum bemerklich gemacht werden konnte. Übrigens geht aus dem Ganzen hervor, dafs durch Wegnahme eines Theils der Masse die Wirkung mehr geschwächt wird, als im Verhältnisse zu dem weggenommenen Stücke.

Der zweite Theil der hier besprochenen Arbeit *Christie's* hat die Bestimmung des Gesetzes zum Gegenstande, nach welchem die Wirkung der rotirenden Magnete auf eine Kupferscheibe, oder umgekehrt die einer rotirenden Kupferscheibe auf einen Magnet abnimmt, wenn ihre gegenseitige Entfernung wächst. *Christie* stellt dieses Gesetz in der Formel

$$\alpha = \left(\frac{M}{(p+c)^2 + \varepsilon^2}\right)^2$$

dar, wo α die vorhin angegebene Bedeutung hat, p die Distanz der magnetischen Pole von der oberen Fläche der Magnete, M, c und ε aber constante Gröfsen sind, die durch Versuche bestimmt werden müssen. Es herrscht allerdings zwischen dieser Formel und den Ergebnissen der Versuche eine für derlei Fälle hinreichende Übereinstimmung; dessen ungeachtet wird der Leser sich kaum damit zufrieden stellen, weil obige Formel wohl immer errathen, nicht aber aus der Natur der Sache abgeleitet ist. Sie kann daher höchstens nur als ein Mittel, die Phänomene unter einen allgemeinen Gesichts-

punct zu bringen, nicht aber als Ausdruck des inneren Verlaufes der Erscheinungen angesehen werden.

B. Akustik.

1. *Wheatstone's* Versuche über das Gehör.

(Quarterly Journ. 1827. N. III. p. 67)

Savart's Versuche über die Functionen des Trommelfells und des äufseren Ohres (Zeitsch. B. I. S. 331) haben viel Licht über den Verlauf der Sache beim Hören verbreitet. Einen nicht uninteressanten Beitrag über denselben Gegenstand liefern die Versuche *Wheatstone's*, wovon das Wesentliche hier folgen soll. *Wheatstone* zeigt zuerst, dafs ein Schall, der von innen in den geschlossenen Gehörgang unmittelbar kommt, verstärkt erscheint. Hält man, sagt er, die Hand auf das Ohr, oder verstopft mit einem Finger den Gehörgang, ohne einen Druck darauf auszuüben, so vernimmt man den von aufsen erregten Schall schwächer, die eigene Stimme hört man aber stärker, besonders jene Laute, bei denen der Mund fast geschlossen ist. Stellt man den Stift einer Stimmgabel auf den Kopf, und schliefst wie vorhin die Ohren, so erscheint der Ton derselben auch intensiver. Bleibt ein Ohr offen, so bezieht man den Ton stets auf das geschlossene; werden aber beide geschlossen, so vernimmt man ihn mit dem Ohr stärker, an welchem die Stimmgabel näher steht. Dasselbe erfolgt, wenn man das äufsere Ohr mit Wasser füllt, statt es mit der Hand zu schliefsen.

Articulirte Laute, oder ein sehr starker Schall, erscheinen in solchen Fällen nicht blofs stärker, sondern auch mit einem Nebenschall. Dieser hört aber alsogleich auf, sobald man durch stärkeres Andrücken der Hand an das Ohr die Luft gegen das Trommelfell prefst, oder in

der Eustachischen Röhre die Luft verdünnt. Den Nebenschall leitet *Wheatstone* von einer heftigen Agitation des Trommelfells, die Verstärkung des Schalles überhaupt davon her, dafs die Luft im Gehörgang und das Trommelfell in Schwingungen gerathen. Nach meiner Meinung wirkt hier die Luft so, wie die in unseren musikalischen Instrumenten im Resonanzkasten befindliche, und der Körper, welcher das Ohr schliefst, dient blofs als Mittel, die Oscillationen zu reflectiren; wenigstens erklärt es sich daraus, dafs diese Verstärkung des Schalles, nach *Wheatstone's* Angabe, unterbleibt, wenn man mit Wolle etc., also mit einem der Reflexion nicht günstigen Körper das Ohr verstopft.

Wheatstone schliefst aus dem Resultate der vorhergehenden Versuche, dafs man eine ähnliche Verstärkung in dem von aufsen erregten Schalle hervorbringen würde, wenn man die Schwingungen in den geschlossenen Gehörgang leiten könnte. Dieses macht aber ein fester Körper möglich, in dem sich der Schall ohne starke Schwächung weit fortpflanzen läfst. Er construirte sich zu diesem Zwecke ein Instrument, dem er den Namen *Mikrophon* ertheilt, weil es den schwächsten Schall hörbar macht. Fig. 5 stellt dieses Instrument vor. Es besteht aus zwei Metallscheiben, die grofs genug sind, um das äufsere Ohr zu schliefsen. Im Mittelpuncte jeder dieser Scheiben, und zwar an der äufseren Fläche derselben, ist ein Eisen- oder Messingdraht von 16 Z. Länge und $^1/_8$ Z. Dicke befestiget; beide Drähte sind am anderen Ende mit einander verbunden, so dafs das Ganze wie eine herzförmige Federzange aussieht. Beim Gebrauche kommt jede der zwei Scheiben auf ein Ohr, und wird daselbst entweder durch Federkraft, oder mittelst eigener Bänder festgehalten, und das Ende, wo beide Drähte vereiniget sind, wird dorthin gehalten, wo man einen

Schall zu vernehmen gedenkt. *Wheatstone* gibt mehrere Versuche an, welche sich mit diesem Instrumente anstellen lassen. Läutet man, sagt er, ein Glöckchen in einem Gefäfse voll Wasser, und hält die Spitze des Mikrophon in das Wasser in verschiedenen Entfernungen von der Glocke, so werden die Differenzen in der Stärke des Schalles recht wohl merklich. Hält man diese Spitze an die Seitenwand eines Gefäfses, worin eine Flüssigkeit siedet, oder taucht sie in die Flüssigkeit selbst, so vernimmt man die mannigfaltigen darin erregten Töne deutlich. Mittelst dieses Instrumentes kann man auch mit ziemlicher Sicherheit die Stellen an einem schallenden Körper auffinden, wo er die stärksten oder schwächsten Schwingungen macht. Setzt man den Stift einer Stimmgabel auf das Mikrophon, und stimmt zugleich einen musikalischen Ton an, so erkennt das ungeübteste Ohr, ob dieser mit dem der Stimmgabel consonirend ist, oder nicht.

Es ist bekannt, dafs man oft beim Angeben zweier höherer consonirender Töne, einen dritten Ton schwach mitklingen hört. Seine Schwingungszahl ist = 1, wenn die zwei höheren durch die einfachsten ganzen Zahlen ausgedrückt werden. Nimmt man zwei consonirende Stimmgabeln, läfst sie erklingen, und hält beide zugleich nahe zu demselben Ohr, so hört man sowohl die ihnen eigenthümlichen, als auch den dritten mitklingenden Ton; wird aber eine an das rechte, die andere an das linke Ohr gehalten, so vernimmt man die Haupttöne voller, aber der mitklingende ist nicht mehr wahrnehmbar.

Wenn man in der Eustachischen Röhre die Luft verdünnt, so vernimmt man keinen hohen Ton mehr; biegt man die Aurikel vorwärts, so werden alle hohen Töne stärker gehört, ohne in der Intensität der tieferen einen

Unterschied zu bemerken. Noch mehr ist dieses der Fall, wenn man die hohle Hand hinter die Ohren hält, und zur Vergröſserung der Höhlung den Obertheil der Aurikel herab biegt. *Wheatstone* hört mit seinem linken Ohre schon an und für sich seit einer Erkältung die Töne C^3 und C^4, wenn sie auf einem Fortepiano angeschlagen werden, viel stärker als die übrigen; hält er aber die Hand, wie vorhin gesagt wurde, so ist dieser Abstand noch viel merklicher; drückt er sie aber fest an das Ohr, oder schlieſst er die Eustachische Röhre, so hört er alle Töne gleich stark. Er schreibt diesen Fehler einer verminderten Spannung des Trommelfelles zu.

2. *Savart's* Untersuchungen über die transversalen Schwingungen der Körper.

(*Annal. de Chim. et de Phys. Tom.* 35, *p.* 187.)

Wenn ein Körper in einer Schallbewegung begriffen ist, so theilt er sich bekanntlich in mehrere oder wenigere Theile ab, deren jeder so schwingt, als wäre er ein für sich bestehendes Ganzes. Häufig finden zugleich mehrere Arten dieser Abtheilungen, gleichsam Unterabtheilungen Statt, und bewirken in uns die Empfindung mehrerer verschiedener Töne. Man kann demnach die Unterabtheilungen hören. In vielen Fällen nimmt man nur einen einzelnen Ton wahr, und doch finden solche Unterabtheilungen Statt, wahrscheinlich, weil die ihnen entsprechenden Töne zu schwach und zugleich zu hoch sind, als daſs sie unser Gehörorgan afficiren könnten.

Savart zeigt nun in der hier zu erwähnenden Untersuchung, daſs es für jede Hauptabtheilung eines schallenden Körpers eine gewisse Unterabtheilung gibt, die mit ihr in der innigsten Verbindung steht, und sich

unter allen übrigen am deutlichsten ausspricht. Er macht diese so wie die Hauptabtheilung mittelst Sand sichtbar, jedoch braucht er für die Unterabtheilung feineren Sand, gleichsam Staub, wie Hexenmehl, der sich etwas an den vibrirenden Körper anhängt, während er die Hauptabtheilung mit gewöhnlichem Sande sichtbar macht. Sollen demnach beide Arten der Bewegung zugleich hervortreten, so streut er auf den zu streichenden Körper ein Gemenge von feinem und gröberen Sande. Warum sich der gröbere Sand nur an den Hauptruhestellen anhäuft, und so die Klangfigur gibt, welche der Hauptabtheilung entspricht, ist ohnehin klar; warum aber der feine Staub sich an die secundären Ruhestellen anhäuft, kommt nach *Savart* daher, weil die kleinen Theile, aus denen er besteht, nicht so von einander unabhängig sind, wie beim groben Sande, sondern sowohl unter sich, als auch mit der Fläche, auf der sie liegen, zusammenhängen, und daher mit den Theilen der letzteren an die Stellen fortbewegt werden, die der Mitte eines Schwingungsbogens der Hauptabtheilung entsprechen, als derjenigen Stelle, die allein ihre horizontale Lage behält.

Savart führt nun seine obige Behauptung bei kreisrunden und rechtwinkeligen Platten durch, und wendet das in diesen Statt findende der Analogie nach auch auf Stäbe, Ringe und Membranen an. Zuerst handelt er von kreisrunden Platten. Die verschiedenen Abtheilungen dieser Scheiben lassen sich in mehrere Classen bringen, deren jede etwas Eigenthümliches hat, und besonders untersucht werden kann. Eine solche Classe machen jene Schwingungen aus, bei denen die Klangfigur blofs aus Durchmessern ohne Kreisbogen besteht, eine andere jene, denen concentrische Kreise ohne Durchmesser entsprechen, u. s. w.

Erzeugt man an einer solchen Platte eine Figur der zweiten Classe, während sie mit feinem Staube und gewöhnlichem Sande bedeckt ist, so häuft sich ersterer an kreisförmig gelegenen Stellen an, die zwischen den Kreisen liegen, welche letzterer bildet, und die Hauptruhestellen bezeichnen. So viele Hauptkreise auch entstanden seyn mögen, so findet doch immer im Mittelpuncte der Platte eine Anhäufung des feinen Sandes Statt. Besteht die Hauptfigur aus einem einzigen Kreise, so bildet die Nebenfigur (mit feinem Staube) einen näher am Rande gelegenen, und einen Punct im Centrum; hat erstere zwei Kreise, so besteht auch die letztere aus zweien, einem näher am Rande liegenden gröſseren, und einem zwischen den zwei Hauptkreisen befindlichen, und überdieſs dem Punct am Centrum. Im Allgemeinen erscheinen eben so viele Nebenkreise als Hauptkreise, und erstere liegen so, daſs man leicht glauben kann, es müssen auch dorthin, wo sich die Hauptkreise befinden, Nebenkreise fallen, die aber des gröberen Sandes wegen nicht zu bemerken sind. Davon überzeugte sich auch *Savart* wirklich.

Erzeugt man an einer solchen in der Mitte festgehaltenen Scheibe eine Klangfigur, die aus mehreren Durchmessern besteht, so bemerkt man, daſs sich der feinere Sand mitten zwischen zwei Durchmessern anhäuft, und zwar an den Stellen, wo bei einer Klangfigur, die aus eben so vielen Durchmessern und einem Kreise besteht, der letztere hinfällt. Je mehrere Durchmesser an der Klangfigur erscheinen, desto mehr haben die Anhäufungspuncte des feineren Sandes den Anschein von Überresten eines Kreises, dessen völliger Ausbildung die Hauptschwingung der Scheibe im Wege steht, indem sich der feine Sand nur an solchen Stellen anhäufen kann, die während der Schwingungen der Haupt-

parthien horizontal bleiben, das ist, in der Mitte der sogenannten Schwingungsbögen. Demnach gibt die secundäre Abtheilung einen Kreis als Klangfigur, wenn die Hauptabtheilung einen Stern gibt. *Savart* beweiset aber, daſs die Hauptfigur, nämlich der Stern, auch die Ruhestellen der Nebenabtheilung bezeichnet; denn wenn man auch die Platte mittelst dünner und langer Backen so befestiget, daſs sie dadurch nach der Länge eines ganzen Durchmesser's festgehalten wird, so bildet sich doch dieselbe secundäre Klangfigur, wie in dem Falle, wo nur der Mittelpunct festgehalten wird, zum Beweise, daſs an die Stelle der Hauptfigur nicht die Schwingungsbögen der Nebenfigur fallen, wie es doch seyn müſste, wenn daselbst sich nicht auch zugleich die Ruhestellen der Unterabtheilung befänden. Es besteht daher die secundäre Klangfigur, in dem Falle, wo die Hauptfigur einen Stern vorstellt, aus einem eben so vielstrahligen Stern, und aus einem Kreise. Überhaupt besteht die Nebenfigur immer aus eben so vielen Durchmessern, wie die Hauptfigur, und wenn diese n Kreise enthält, so enthält jene $2n+1$; findet aber bei den Kreisen eine ähnliche Übereinanderlagerung Statt, wie bei den Durchmessern, und sieht man das Häufchen im Mittelpuncte als kleinen Kreis an, so besteht die Nebenfigur aus n Linien, wenn die Hauptfigur deren $2n+1$ hat. Es ist demnach die Nebenfigur stets diejenige, welche unter denen, die mit der Hauptfigur die meiste Ähnlichkeit haben. am einfachsten ist, und deren Theile die gröſsten Excursionen machen. Hierin glaubt *Savart* auch den Grund zu finden, warum unter allen möglichen Unterabtheilungen gerade eine bestimmte mit der Hauptabtheilung stets zugleich bemerkbar gemacht werden kann.

Um die hier besprochenen Erscheinungen hervorzubringen, empfiehlt *Savart* messingene Scheiben von

mehreren Decimetern im Durchmesser, und 2—3 Millim. Dicke, die sehr eben, gleichförmig dick und dicht seyn sollen; er räth an, sie vor dem Hämmern auszuglühen, und hierauf nur mit einem hölzernen Hammer zu behandeln. Um die Sternfiguren mit oder ohne Kreisen hervorzubringen, soll die Scheibe im Mittelpuncte in eine starke Zwinge zwischen zwei mit Leder überzogene Cylinder befestiget werden. Das weitere Verfahren, um Klangfiguren bestimmter Art hervorzubringen, enthält für Jene, die *Chladni's* Werke kennen, nichts Neues; nur zur Erzeugung der Klangfiguren mit mehreren concentrischen Kreisen wird ein neues Mittel angerathen, nämlich am Mittelpuncte der Scheibe ein 2—3 Millim. weites Loch anzubringen, ein Büschel Pferdehaare durchzuziehen, und mit diesem die Scheibe zu streichen, während sie in horizontaler Richtung an Stellen, wohin Ruhepuncte fallen, gehalten wird. Auf diesem Wege hat *Savart* bis neun Kreise an einer Scheibe herabgebracht.

An viereckigen, dreieckigen, halbkreisförmigen Platten etc. findet ein ähnliches Verhalten Statt, wie an runden; *Savart* betrachtet aber nur die ersteren insbesondere. Bringt man an einer quadratischen Platte die Klangfigur hervor, welche aus parallelen Linien besteht, so erscheint auch mittelst feinen Sandes eine Nebenfigur aus solchen Linien, deren zwei näher am Rande der Platte liegen, als die äufsersten Linien der Hauptfigur, die anderen aber zwischen je zwei Linien von dieser, so dafs die ganze Nebenfigur aus $2n + 1$ Linie besteht, wenn die Hauptfigur deren n hat. Besteht aber die Hauptfigur aus sich rechtwinkelig schneidenden Linien, wird das Phänomen etwas verwickelter, z. B. besteht die Hauptfigur aus zwei auf einander senkrechten Linien, welche die Seiten der Platte halbiren, so zeigt sich an vier Stel-

len, nicht weit von jeder Ecke, eine Anhäufung des feinen Sandes, und zwar an den Stellen, wo die Linien einer Hauptfigur sich schneiden, die man erzeugen kann, wenn man an einer solchen Stelle die Platte hält, und sie an einer anderen von einer Ecke um $^1/_4$ der ganzen Länge entfernten streicht, und die aus sechs Linien besteht, deren je drei einander parallel laufen, und sich rechtwinkelig schneiden. Hat die Hauptfigur $2n$ Linien, so besteht die Nebenfigur aus $4n+2$.

An rechtwinkeligen, länglichen Platten bemerkt man ähnliche Erscheinungen, wie an quadratischen; eben so auch an prismatischen dünnen geraden Stäben, und überhaupt an allen Körpern, die eben genug sind, um durch Sand die Klangfiguren darstellen zu können. Am leichtesten bemerkt man sie aber an Membranen, die durch Mittheilung in Schwingungen versetzt wurden. Es scheint demnach diese secundäre Abtheilung, welche stets die Hauptabtheilung begleitet, an allen transversal schwingenden Körpern eigen zu seyn. *Savart* vermuthet, dafs auch die schraubenförmigen Schwingungsknoten an cylindrischen, der Länge nach schwingenden Stäben einer solchen Unterabtheilung zugehören, die man nicht unmittelbar, sondern nur mittelst anderer Abtheilungen zu Stande bringen kann, und dafs überhaupt von solchen Unterabtheilungen der von der Höhe und Tiefe unabhängige Charakter eines Tones herrühre.

3. *Savart*, über das Fortrücken der Schwingungsknoten schallender Körper.

(Ebendaselbst, p. 257.)

Wer die *Chladni*'schen Klangfiguren an kreisförmigen Glasplatten mit einiger Aufmerksamkeit wiederholt hat, wird gewifs bemerkt haben, dafs der Sand, nachdem er die Stelle der Knotenlinien eingenommen hat,

noch eine kleine horizontale oscillirende Bewegung annimmt, sobald man mit dem Bogen zu streichen aufhört. *Savart* hat diesem Phänomene eine besondere Aufmerksamkeit gewidmet, und gezeigt, dafs man ein Fortschreiten der Knotenlinien hervorbringen könne. Das Mittel, ein solches Fortschreiten hervorzubringen, besteht darin, dafs man an der Platte einen Bogenstrich anbringt, den Bogen schnell zurückzieht, wieder einen Strich folgen läfst, den Bogen wieder zurückzieht, u. s. w. Je schneller man streicht, und je hurtiger man den Bogen zurückzieht, desto gröfsere Excursionen machen die Puncte an den Knotenlinien, so dafs man diese Schwingungen so weit steigern kann, dafs die Knotenlinien durch einen Strich um eine ganze schwingende Parthie weiter rücken. Wiederholt man das Streichen genau an derselben Stelle, sobald die Knotenlinie in Ruhe gekommen ist, so zwingt man sie wieder weiter zu rücken, und so kann man sie um einen ganzen Kreis herumführen.

Das Mittel, dieses Fortschreiten der Knotenlinien sichtbar zu machen, ist wieder Aufstreuen des Sandes. Für langsame Schwingungen reicht man mit gewöhnlichem Sande aus, wenn aber die Oscillationen sehr schnell erfolgen, mufs man feinen Staub nehmen, der sich etwas an die Platte anhängt, und eine secundäre Figur gibt, deren Schwingungsknoten an die Stelle der Schwingungsbogen der Hauptfigur fallen, und durch ihr Fortrücken auf das der Hauptknotenlinien schliefsen läfst. An einer kreisrunden Scheibe, die *Savart* insbesondere betrachtet, und an der man eine Klangfigur mit zwei Durchmessern zu erzeugen sucht, wird bei schnellen Wiederholungen der Bogenstriche das Fortrücken der Sandhäufchen, welche die Hauptschwingungsbogen bezeichnen, so schnell, dafs sie gar nicht in Ruhe kom-

men, sondern eine bewegte ringförmige Staubwolke bilden.

Ein anderes Mittel, dieses Fortrücken sichtbar zu machen, gibt die Reflexion des Sonnenlichtes ab. Läſst man auf eine glänzende, glatte, gehörig liegende Metallscheibe directe Sonnenstrahlen fallen, so sieht man darin ein elliptisches Sonnenbild, so lange sie nicht in Schwingungen versetzt ist; so wie sie aber zu schwingen anfängt, erscheint dieses Bild wie ein Stern, dessen Radien der Stelle der Knotenlinien entsprechen, und eine kreisförmige Bewegung annehmen, sobald man das oben erwähnte Verfahren anwendet.

Die Richtung dieser Bewegung der Knotenlinien ist bald rechts, bald links, ohne daſs man die Umstände kennt, von denen sie abhängt. Dieses Phänomen ist von der Anzahl der schwingenden Theile ganz unabhängig, läſst sich an groſsen und kleinen Platten gleich leicht hervorbringen, und fordert nur, daſs die schwingenden Theile ohne Änderung des Tones ihren Platz verlassen können, daher es nur an kreisrunden Scheiben und Membranen, an Ringen und Glocken zu Stande kommt. Es ist nicht bloſs an die sternförmige Klangfigur gebunden, es kann der Stern auch von einem oder mehreren Kreisen durchschnitten seyn, nur trifft es sich da manchmal, daſs nur die Theile der geraden Knotenlinien weiter rücken, die auſser einem Kreise liegen, während die anderen ruhig verbleiben; haben aber auch diese eine fortschreitende Bewegung, so kommt ihr dieselbe Richtung zu, wie jenen.

Man bemerkt das Stattfinden dieses Fortschreitens der Schwingungsknoten an einer Variation in der Tonstärke.

C. Physikalische Chemie.

1. Über Entdeckung der Hydrocyansäure in damit vergifteten Leichnamen *).

(*Annals of phil.* 1827, *N.* 10.)

Die Herren *Lassaigne* und *Leuret* stellten mehrere Versuche über die Anwendung des schwefelsauren Eisen- und Kupferoxydes an, um die Gegenwart der Hydrocyansäure in dem Mageninhalte der Thiere zu entdecken, wenn sie durch eine Dosis von 2 bis 5 oder 6 Tropfen der reinen Säure vergiftet worden waren. Sie fanden, daſs diese Säure in Thieren, die durch geringe Gaben derselben vergiftet worden, nicht entdeckt werden könne, wenn ihr Körper vorher zwei oder drei Tage der Einwirkung der Atmosphäre ausgesetzt war, und daſs nach einer noch längeren Zeit das Verschwinden des Giftes seiner durch die Gegenwart der faulenden thierischen Materie nur noch mehr begünstigten Zersetzung beizumessen sey. Dem zu Folge ordnen sie an, daſs, wenn ein Körper auf die Gegenwart dieses Stoffes untersucht werden solle, er sobald als möglich überliefert werden müsse.

2. Methode, um kleine Mengen Opiums in Auflösungen zu entdecken. Vom Herrn Dr. *Hare.*

(*Annals of phil.* 1827, *N.* 9.)

Zu bekannt ist es durch Herrn *Serturner's* Entdeckungen, daſs das Opium, als eine eigenthümliche alkalinische Substanz, das Morphium enthalte, und daſs dieses an eine eigenthümliche Säure, die Meconsäure, gebunden sey, welche letztere eine auffallend rothe Farbe

*) Frei bearbeitet von *J. Planiawa.*

mit Eisenoxydauflösungen hervorbringt. Dessen ungeachtet hat man diese Eigenschaft nicht als ein Mittel zur Entdeckung des Opiums vorgeschlagen, wahrscheinlich deſswegen, weil das meconsaure Eisenoxyd keinen Niederschlag bildet. Hr. Dr. *Hare* ersann aber ein Verfahren, wodurch eine Quantität Opium, die nicht den Gehalt von 10 Tropfen Opiumtinctur übersteigt, in einer Gallone Wassers entdeckt werden kann.

Herrn Dr. *Hare's* Verfahren ist auf die Eigenschaft der Meconsäure, vom Blei niedergeschlagen zu werden, gegründet. Setzt man daher einem Opiumaufgusse, der so wenig Opium, als oben angezeigt wurde, enthält, essigsaures Bleioxyd zu: so entsteht ein bedeutender Niederschlag von meconsaurem Bleioxyd. Weil die Opiumquantität gering ist, so erfordert die Präcipitation sechs bis zwölf Stunden, und kann durch leichtes Umrühren mit einem Glasstabe erleichtert werden. Ein konisches Gefäſs ist hierzu am besten, um die Flocken beim Herabsteigen zu concentriren. Auf das so am Boden des Gefäſses gesammelte meconsaure Bleioxyd bringe man mittelst einer Glasröhre etwa 30 Tropfen Schwefelsäure, und setze später dem Ganzen auf eben dieselbe Weise eben so viel schwefelsaure Eisendeutoxydlösung zu. Die Schwefelsäure scheidet die Meconsäure aus, und macht diese fähig, mit dem Eisenoxyd die eigenthümliche Farbe hervorzubringen, welche ihre Gegenwart, und dem zu Folge auch jene des Opiums beweiset.

3. Über ein neues brennbares Gas.

(Aus Ebendemselben.)

In der königl. Societät der Wissenschaften zu Edinbourg ist ein Aufsatz von Dr. *Thomson* über ein neues brennbares Gas vorgelesen worden. Es wurde aus dem empyreumatischen Holzgeiste (*pyroxylic spirit.*), der sich

bei der Destillation des Holzes bildet, und von den Herren *Turnbull* und *Ramsay* in Glasgow bereitet wird, dargestellt. Dieser Geist hat ein spec. Gew. von 0,812, riecht angenehm, und wird in Lampen anstatt des Alkohols gebraucht. Dr. *Thomson* fand, dafs das aus einer Mischung von Königswasser und dem empyreumatischen Holzgeiste entwickelte Gas aus

einem neuen brennbaren Gas . . .	29,0
Salpetergas	63,0
Stickstoffgas	8,0
	100,0

besteht, und ein spec. Gewicht von 1,945 besitzt, jenes der atmosph. Luft = 1,000 gesetzt. Er fand die specifische Schwere des neuen Gases = 4,1757, und die Zusammensetzung desselben war folgende:

1 stöch. Antheil Wasserstoff	=	0,125
1 » » Kohlenstoff . . .	=	0,750
1,5 » » Chlorine . . .	=	6,750
1 stöch. Antheil desselben also .	=	7,625,

wefshalb es Dr. *Thomson Sesquichloridum protohydroidi carbonei (Sesquichloride of carbo-hydrogen)* nennt.

4. Über das Althein, einen eigenthümlichen Stoff des Eibisches.

(Aus Ebendemselben.)

Hr. *Bacon*, Prof. der Chemie zu Caen, hat folgende Substanzen aus der *althea offic.* erhalten: Wasser, Gummi, Zucker, fettes Öhl, Amylon, Eiweifs, Pflanzenfaser, verschiedene Sälze, und eine durchsichtige, nicht sauer reagirende, und in Oktaëdern krystallisirende Substanz, das äpfelsaure Althein. Das Althein erhält man auf folgende Art: Man behandle einen kalt bereiteten wässerigen Auszug der Eibischwurzel mit siedendem Alkohol, welcher das saure äpfelsaure Althein, das Öhl, den Zu-

cker u. s. w. auflöst. Alle geistigen Absude werden zusammen gegossen, und trüben sich nach dem Auskühlen; die klar gewordene Flüssigkeit wird dann von dem krystallinischen Bodensatze abgegossen, dieser dann mit Wasser behandelt, die erhaltene wässerige Lösung filtrirt, bei gelinder Hitze zur Syrups-Consistenz verdünstet, und zur Krystallisation hingestellt. Die erhaltenen Krystalle müssen mit etwas Wasser gewaschen, und auf Papier getrocknet werden. Sie erscheinen dem unbewaffneten Auge in Körnern, Nadeln, Federn und Sternchen, zeigen aber bei der Untersuchung mit dem Mikroskope die Hexaëdralform an. Sie sind von prächtiger smaragdgrüner Farbe, geruchlos, und an der Luft unveränderlich; sie röthen Lackmuspapier, und lösen sich im Wasser nicht, aber im Alkohol auf. Wird die wässerige Lösung derselben in der Kälte mit Magniumoxyd behandelt, und dann filtrirt, so stellt sie gerötheten Lackmus wieder her, färbt den Veilchensaft grün, und liefert nach gelinder Verdünstung das Althein im reinen Zustande, welches dann folgende Eigenschaften zeigt: Es krystallisirt in regelmäfsigen Hexagonen oder in rhomboëdrischen Octaëdern, grünet den Veilchensaft, wie wir schon gesehen haben, und stellt gerötheten Lackmus wieder her, ist durchsichtig, geruch- und beinahe geschmacklos, unveränderlich an der Luft, sehr im Wasser, aber gar nicht im Alkohol löslich, und löset sich in Essigsäure, mit der es ein krystallisirbares Salz bildet, auf.

5. Über die Identität des äpfelsauren Altheins mit dem Asparagin. Von *A. Plisson.*

(Annales de Chimie etc. Tome 36, *p.* 175.*)*

Bei der Darstellung des sauren äpfelsauren Altheins, nach Herrn *Bacon's* Vorschrift, fand Herr *Plisson*, dafs

die von dem Ersten als Eigenschaft erwähnte prächtige Smaragdfarbe demselben nicht eigenthümlich sey; denn er erhielt es in farbenlosen Krystallen.

Bei der Darstellung des Altheins befolgte er Hrn. *Bacon's* Verfahren, jedoch mit Anwendung von Wärme. Durch gelindes Verdünsten der Colatur erhielt er zwei verschiedene Substanzen, deren eine weiſs, undurchsichtig und unkrystallisirbar war, während die andere grün, durchsichtig und in sechsseitigen Prismen krystallisirt erschien, und Hrn. *Bacon's* Althein war. Die unkrystallisirbare Substanz hat Hr. *Bacon* ganz übersehen, sie grünte den Veilchensaft, und schien eigenthümlicher Art zu seyn. Die grünen Krystalle verloren durchs Waschen mit kaltem Wasser die Eigenschaft, Veilchensaft zu grünen, und vermochten, freilich nur in der Wärme, Sonnenblumenpapier zu röthen. Durch Krystallisation befreite sie Hr. *Plisson* von ihrem Färbestoffe. Mit reinem Magniumoxyd behandelt, verwandelten sie sich in die oben angeführte weiſse, unkrystallisirbare, eigenthümliche Materie, und waren demnach nichts anderes, als *Bacon's* äpfelsaures Salz, mit etwas von der eigenthümlichen Materie gemengt.

Das äpfelsaure Salz verbreitete, in einem Tiegel erhitzt, Ammoniak, welches, *Plisson's* Versuchen zu Folge, ein Product der Zersetzung gedachten Salzes war. Bei Behandlung desselben mit Bleioxydhydrat fand er ferner, daſs es keine Äpfelsäure enthält, sondern eine eigenthümliche, derselben in einigen Eigenschaften analoge Säure, die nicht in den Krystallen vorkomme, sondern vielmehr, bei Behandlung derselben mit Bleioxyd, aus ihren Elementen durch disponirende Verwandtschaft des Oxyds gebildet werde. Er erhielt diese Säure auf folgende Art:

1 Gemengtheil von Hrn. *Bacon's* Althein wurde in

der Wärme im Wasser mit so viel reinen Bleioxydhydrats, als 4 Gemengtheilen reinen Oxyds entsprach, so lange gekocht, bis alle Ammoniakentwickelung aufhörte, was man mittelst Essigsäure bestimmte. Die Masse wurde aufs Filtrum gebracht, der Niederschlag gut ausgewaschen, und dann einem Strome durch Barytwasser gut ausgewaschenen Hydrothionsäuregases ausgesetzt, worauf die von dem gebildeten Schwefelblei abgesonderte Flüssigkeit nach der Verdünstung eine Säure liefert, welche, durch dreimaliges Krystallisiren aus 20grädigem Alkohol, gereinigt, folgende Eigenschaften zeigt:

Sie krystallisirt in kleinen glänzenden Platten, besitzt wenig Geschmack, ist wenig im kalten Wasser, noch weniger im Alkohol löslich. Die wässerige Lösung derselben röthet Sonnenblumenpapier, trübt leicht eine reine Seifenlösung, zersetzt das Kaliumoxyd-Bicarbonat in der Kälte, das Carbonat aber selbst beim Erhitzen nicht. Ferner wirkt sie nicht auf essigsaures Bleioxyd, salpetersaures Silberoxyd, Chlorbarium, Chlorcalcium, Deutochlorquecksilber, schwefelsaures Magniumoxyd, schwefels. Kupferoxyd, schwefels. Manganprotoxyd, die Eisenprotoxyd- und Deutoxydsalze, und auf Emetine. In der Hitze bläht sie sich auf unter Verbreitung thierisch-empyreumatischen Geruches, verbindet sich mit Oxyden, und bildet mit Magniumoxyd ein sehr lösliches, unkrystallisirbares Salz, welches alkalisch reagirt, und alle Eigenschaften der durchsichtigen alkalinischen Substanz besitzt.

Bei Vergleichung der Eigenschaften der von Hrn. *Bacon* angezeigten Substanz im reinen Zustande mit jenen der anderen Bekannten, ergab sich, dafs sie mit dem Asparagin übereinstimme, in der Krystallgestalt sowohl als auch in anderen Eigenschaften. So z. B. krystallisirt das Asparagin eben so leicht, besitzt dieselbe

Löslichkeit, verhält sich eben so im Feuer, wirkt eben so auf Turnesol; und wird vom Magniumoxyd ebenfalls in eine alkalinische Substanz verwandelt.

Wiederholung.

1. Die prächtige Smaragdfarbe des äpfels. Altheins des Hrn. *Bacon* ist demselben nicht eigenthümlich.
2. Sein Althein ist sein äpfels. Salz, begleitet von einer eigenthümlichen alkalinischen, vom Hrn. *Plisson* für neu gehaltenen Materie.
3. Das saure äpfels. Althein ist kein Salz, sondern eine eigenthümliche stickstoffhältige Substanz, welche alle Eigenschaften des Asparagins besitzt.
4. Mit Bleioxyd behandelt, liefert diese Substanz Ammoniak und eine eigenthümliche, vom Hrn. *Plisson* Asparaginsäure genannte, Säure, als Producte.
5. Magniumoxyd bringt dieselbe Wirkung hervor, und das Product besitzt alle Eigenschaften der durchsichtigen alkalinischen Materie.
6. Tritt das Asparagin der Eibischwurzel unter verschiedenen Krystallformen auf.

Anmerkung. Auch die Wurzel des *Symphytum off.* enthält nach *Plisson* und *Blondeau* Asparagin, so daſs man nun seine Existenz in drei zu verschiedenen Familien gehörenden Pflanzen kennt.

6. *Labaraque's* geruch- und farbezerstörende Sodaflüssigkeit.

(Annals of phil. N. 11, Novemb. 1827.)

Mit einem Zusatz von *J. Planiawa.*

Hrn. *Labaraque's* Versuche über diese Flüssigkeit wurden vom Hrn. *Faraday* wiederholt, welcher fand, daſs die vom Ersteren zu deren Darstellung angegebenen Verhältnisse der Materialien richtig sind, und daſs

während der ganzen Operation, bei fortwährend Statt findender Absorption des Chlors von der kohlenstoffsäuerlichen Sodiumoxydlösung, keine Kohlenstoffsäure entweicht. Er fand ferner, dafs die erhaltene Flüssigkeit auch zur Trockne verdünstet werden könne, ohne dafs das hierdurch erhaltene Salz die farbenzerstörende Wirkung verliert.

Auch ich habe vor mehr als fünf Jahren bei Darstellung des oxychlorsauren Kaliumoxyds aus kohlenstoffsäuerlichem Kaliumoxyd, bei zufälliger Anwendung von weniger Chlorgas, als zur Bildung gedachten Salzes nöthig war, eine nur sehr unbedeutende Kohlenstoffsäuregasentwickelung wahrgenommen. Oxychlorsaures Kaliumoxyd fiel keines zu Boden, und nach dem Verdünsten lieferte die Flüssigkeit sehr kleine, wenn ich nicht irre, spiefsige Krystalle, welche selbst nach dem besten Auswaschen noch farbenzerstörend wirkten, den eigenthümlichen Geruch der Salzlauge besafsen, und mit brennbaren Substanzen verpufften. Die übrige Flüssigkeit, zur Trockne verdünstet, lieferte ein sehr farbenzerstörendes Salz. Ein mit einigen Lothen kohlenstoffsäuerlichen Kaliumoxyds angestellter Versuch überzeugte mich deutlich, dafs sich hierbei gar kein oxychlorsaures Kaliumoxyd bildet, und seitdem habe ich mich oft dieser Flüssigkeit, die ich immer absichtlich bereitete, zur Farbenzerstörung bedient, wobei ich fand, dafs bei Anwendung von Ätzkali die farbenzerstörende Wirkung des Productes noch stärker hervortritt. Ich betrachte diese Substanz als ein Doppeloxyd, bestehend ans Chloroxyd und Kaliumoxyd, welches neben Chlorkalium entsteht, welche Annahme um so wahrscheinlicher ist, als man weifs, dafs bei Berührung des Chlors mit im Wasser gelösten Alkalien nicht sogleich neben Chlormetallen oxychlorsaure Salze entstehen, sondern erst bei fer-

nerem Chlorzutritte, wo sich erst dann, das ist am Ende der Operation, dieses Salz, äuſserst rasch an Menge zunehmend, bildet, und wodurch es sehr wahrscheinlich vorkommt, daſs sich in diesem Prozesse erst Chloroxydul-Kaliumoxyd und Chlorkalium, später aus dem ersteren Chloroxyd-Kaliumoxyd und wieder Chlorkalium, und endlich aus dem Chloroxyd-Kaliumoxyd erst oxychlorsaures Kaliumoxyd neben einer neuen Portion Chlorkaliums bildet, wenn man zum Versuche Kaliumoxyd genommen hat.

Verzeichnifs der gangbarsten optischen Apparate, welche von *G. S. Plöfsl*, privilegirtem Optiker in Wien, neue Wieden, Salvatorgasse Nro. 321, für beigesetzte Preise verfertiget werden.

(Die Preise sind in Conventions-Münze oder Augsb. Courant.)

	fl.	kr.
1. Augengläser, rund oder oval, convex oder concav, mit Fassung von feinem Stahl oder Büffelhorn	1	36
2. Derlei feinere	2	—
3. Derlei mit Fassung von gehämmertem feinen Silber	4	48
4. Derlei mit Fassung von Schildkröte, silbernen Spangen und Scharnieren	6	—
5. Derlei mit Fassung von Schildkröte, derlei Spangen und silbernen Scharnieren .	6	30
1. Doppellorgnetten mit Fassung v. Büffelhorn	1	36
2. Derlei mit Fassung von Elfenbein und Silber, mit Springfedern	4	30
3. Derlei, die Glastheile zum Zusammenlegen	4	24
4. Derlei mit Fassung von Schildkröte und Silber, mit Springfedern	6	—
5. Derlei, die Glastheile zum Zusammenlegen	5	12
6. Derlei mit Fassung von Perlmutter und Silber, mit Springfedern	7	—
7. Derlei, die Glastheile zum Zusammenlegen	5	36
8. Einfache Lorgnetten, in Büffelhorn gefafst	1	12
9. Derlei in Schildkröte	4	—
10. Derlei in Perlmutter mit Silber	4	36
11. Ringstecher in Büffelhorn.	—	45
12. Derlei in Silber	2	—
13. Lesegläser, in Fischbein gefafst	3 — 8	—
Die genannten Gegenstände werden auf besondere Bestellung auch mit Goldfassung ge-		

	fl.	kr.
liefert, so wie periskopische und isochromatische Brillen.		
1. Theaterperspectiv mit lakirter oder silberplattirter Röhre, und silberplattirter Auszugröhre	4—8	—
2. Theaterperspectiv, achromatisch, mit elfenbeinerner Röhre, und silberplattirter Auszugröhre	5—12	—
3. Dergleichen mit elfenbeinerner Röhre, und goldplattirter Auszugröhre	6—16	—
4. Dergleichen mit elfenbeinerner Röhre und silberplattirter Auszugröhre, mit starker Vergröfserung (Feldstecher)	8—20	—
1. Auszugfernrohr von 14″ Länge, mit hölzerner polirter Röhre, 3 messingenen Auszugröhren, Objectiv von 9″ Brennweite und 1′ Öffnung, in Futteral von Maroquin .	18	—
2. Dergleichen von 18″ Länge, Objectiv von 13″ Brennweite und 13‴ Öffnung . . .	22	—
3. Dergleichen von 24″ Länge, Objectiv von 16″ Brennweite und 16‴ Öffnung . . .	28	—
4. Dergleichen von 30″ Länge, Objectiv von 20′ Brennweite und 20‴ Öffnung . . .	37	—
Alle vorhergenannten Auszugfernröhre werden, auf besondere Bestellung, mit silberplattirten Auszugröhren um dieselben Preise geliefert.		
5. Stockfernrohr, ganz von Metall und lakirt, das Fernrohr selbst von 20″ Länge . .	18	—
6. Astronomische Aufsätze zu diesen Fernröhren, zum Auswechseln gegen die letzte Auszugröhre, nach Verschiedenheit der Gröfse	3—5	—
7. Einschraubringe, um diese Fernröhre an Bäume, Pfosten, Fensterstöcke zu befestigen	3—5	—
8. Sonnengläser, vor das Ocular anzuschrauben	1	—

	fl.	kr.
9. Glasmikrometer, mit Fassung, in die Oculare einzuschieben, mit Theilung der Wien. Linie in 10 — 20 Theile	4	—
1. Fernrohr mit Stativ, aus messingener Säule mit Dreifuſs zum Zusammenlegen; mit horizontaler und verticaler Bewegung, auf einer Nuſs; messingenem Tubus von 30'' Länge; Objectiv von 20'' Brennweite und 20''' Öffnung; einem irdischen Ocular von 28maliger, 2 astronomischen Ocularen von 40 — 60maliger Vergröſserung, und einem Sonnenglase; in polirtem hölzernen Kasten mit Schloſs	90	—
2. Derlei mit Tubus von 34'' Länge; Objectiv von 25'' Brennweite und 24''' Öffnung; einem irdischen Ocular von 35maliger, 2 astronomischen Ocularen von 50—80maliger Vergröſserung, und einem Sonnenglase; in polirtem Kasten mit Schloſs . .	120	—
3. Derlei mit Tubus von 40'' Länge; Objectiv von 30'' Brennweite und 27''' Öffnung; einem irdischen Oculare von 42maliger, und 3 astronomischen v. 50- 75- u. 100maliger Vergröſserung, nebst Sonnenglas; in polirtem Kasten mit Schloſs	155	—
4. Derlei mit Tubus von 54'' Länge, mit verticaler und horizontaler sanften Bewegung, durch Triebwerk; Objectiv von 44'' Brennweite und 34''' Öffnung; 2 irdischen Ocularen von 48- und 70maliger, 4 astronomischen von 50- 80- 110- und 150maliger Vergröſserung, und 2 Sonnengläsern; in polirtem Kasten mit Schloſs	300	—
Fernröhre von gröſseren Dimensionen, mit Pyramidalstativen, mit parallactischer Bewegung und anderer Einrichtung, so wie Mikrometer aller Art zu denselben, werden auf besondere Verabredung verfertiget.		

	fl.	kr.
1. Loupe nach *Wilson*, mit einer Linse, in messingener Fassung	1	24
2. Derlei mit 2 Linsen und Deckeln . . .	2	48
3. Einfache Loupe, in Büffelhorn gefaſst .	1	12
4. Derlei doppelte	2	—
5. Derlei dreifache	3	—
6. Loupe, in Büffelhorn gefaſst, mit gläsernem *Lieberkühn*'schen Spiegel	2	—
7. Botanisches Handmikroskop mit *Lieberkühn*'schem Spiegel, Objectnadel mit Pincette, Messerchen und Nadel mit elfenbeinernen Heften und Pincette	7	—
8. Derlei mit 2 Linsen	9	—
9. Mikroskop, um die Feinheit der Schafwolle zu messen, nach *Voigtländer*, in messingenem Futteral	60	—
10. Vorrichtung, um die Dehnbarkeit der Schafwolle zu bestimmen, nach *Voigtländer*, in Futteral	20	—
11. Leinwandmesser mit Scala, im Maroquinfutteral	1	36
12. Derlei mit eingetheilter Scala	2	—
13. Derlei mit Deckeln	4	—

---

1. Groſses zusammengesetztes Mikroskop, dessen Körper durch Triebwerk gegen den feststehenden Objecttisch bewegt wird, auf messingenem, zusammen zu legenden Dreifuſse; mit 2 Ocularen aus einfacher Linse und Collectivglas bestehend, zum Anschrauben, und 6 achromatischen Linsen, einzeln anzuschrauben. Der Objecttisch mit vorne offener Federklammer für Objectträger und Glastafeln aller Art, mit Drücker zum Öffnen von unten, und 2 diagonal stehenden Stellschrauben zur Führung des Objectes durch alle Puncte des Sehefeldes. Einem gläsernen concaven Reflexionsspiegel mit doppelter Bewegung zur transparenten Be-

	fl.	kr.
leuchtung, und einer Beleuchtungslinse mit derlei Bewegung für opake Gegenstände. Einem concaven Glase in messingener Fassung zum Drehen für Flüssigkeiten; einem Insectenglase in messingener Fassung, dann eine Objectnadel mit Pincette zum Aufstecken. Dazu noch: Eine messingene *Wilson*'sche Loupe; eine messingene Pincette; 6 Objectschieber mit geschliffenen Gläsern und allerlei Probeobjecten; 2 auf Glas getheilte Mikrometer, mit Theilungen der Wiener Duodecimal-Linie in 30 und in 60 Theile, in elfenbeinerner Capsel. Alles in einem hölzernen polirten Kasten, 18″ lang, 9″ breit, 4″ hoch, mit Sammet gefüttert, und mit Schlofs versehen. Die 12 Vergröfserungen gehen von 125 Mal des Flächenraumes bis zu 57600, und das Sehefeld ist bei der geringsten Vergröfserung 3,75‴ im Durchmesser, bei der stärksten 0,4‴ Duodecimal-Mafs. Zusammen um .	160	—
Ein solches Mikroskop mit der Vorrichtung zum Messen der Objecte bis auf 0,00001 Wien. Zoll linear (nach *Fraunhofer*) . . .	250	—
Nach Belieben werden, ohne Erhöhung des Preises, die Oculare zum Aufstecken, und die Objective, statt einzeln anzuschrauben, auf einer Drehscheibe mit Deckel befestiget geliefert.		
Statt der Beleuchtungslinse ein sphärisches Beleuchtungsprisma (nach *Chevalier*), kostet um 10 fl. mehr.		
Noch ein Objectiv mit Vergröfserung bis gegen 90000 der Fläche, wozu diese Mikroskope Lichtstärke genug besitzen . . .	10	—
Ein Glasmikrometer mit Theilung des Wiener Zolles in 1000 Theile, linear (sogenannte Leiter)	4	—
Ein dergleichen mit Theilung des Zolles in 2000 Theile linear	6	—
Eine Mikrometertheilung auf Elfenbein, die Linie in 20 Theile	3	—

	fl.	kr.
Auf besondere Bestellung werden diese Mikrometer auch nach Theilen der Pariser- oder Londoner Linie, oder des Millimeters geliefert.		
2. Zusammengesetztes Mikroskop, dessen Körper sich auf dem Stative horizontal bewegen läfst, auf messingenem Dreifufse zum Zusammenlegen. Einem durch Triebwerk gegen den Körper zu bewegenden Objecttische, mit vorne offener Federklammer, mit Drücker von unten. Zwei Ocularen zum Aufstecken, und vier achromatischen Linsen auf einer Drehscheibe mit Deckel. Einem gläsernen, concaven, beweglichen Reflexionsspiegel für durchsichtige Objecte, und Beleuchtungslinse für opake. Einem planen und concaven Objectglase, mit dazu gehörigem beweglichen messingenen Ringe. Einem Insectenglase und einer Objectnadel mit Pincette. Einer messingenen *Wilson*'schen Loupe. Zwei auf Glas getheilte Mikrometer, mit Theilung der Wien. Duodecimal-Linie in 30 Theile linear und Quadrat, in elfenbeinerner Capsel, und mit messingenem Ringe zum Drehen dazu. 6 Objectenschieber mit mehreren Probeobjecten. Die acht verschiedenen Vergröfserungen geben die Flächen von 400 bis 22,500 Mal, mit Durchmessern des Sehefeldes von 3''' bis 0,55'''. Alles in einem polirten hölzernen Kästchen mit Sammet gefüttert, und mit Schlofs, 9'' lang, 6'' breit, 3'' hoch .	85	—
Nach Belieben kann man auch um denselben Preis den Objecttisch feststehend, und das Triebwerk an den Körper des Mikroskopes angebracht erhalten.		
3. Derlei, dessen Körper sich durch Triebwerk gegen den mit vorne offener Federklammer versehenen Objecttisch bewegen läfst, auf hölzernem, polirtem Sokel. Einem Ocular und drei achromatischen Linsen, einzeln		

	fl.	kr.
anzuschrauben. Einem gläsernen, concaven, beweglichen Reflexionsspiegel, und derlei Beleuchtungslinse. Einem planen und concaven Objectglase. Eine Objectnadel mit Pincette. Eine in Horn gefaſste Loupe. Eine Pincette. Drei Objectschieber mit Objecten. Die drei Vergröſserungen geben die Flächen von 400 bis 6400 Mal. In einem polirten hölzernen Kästchen, 9″ lang, 5½″ breit, 5½″ hoch	56	—
4. Katadioptrisches Mikroskop, horizontal stehend (nach *Amici*), auf messingenem Dreifuſs zum Zusammenlegen, mit metallenem Vergröſserungsspiegel, 15 Linien im Durchmesser, und vier Ocularen zum Anschrauben; einem Objecttische mit vorne offener Federklammer, mit Drücker von unten, durch Triebwerk zu bewegen; einem concaven gläsernen Reflexionsspiegel für durchsichtige, und Beleuchtungslinse für opake Körper; einem planen und concaven Objectglase, mit dazu gehörigem beweglichen messingenen Ringe; einem Insectenglase und Objectnadel mit Pincette; einer Loupe; einer Pincette; zwei Mikrometer mit Theilung auf Glas der Wien. Duodecimal-Linie in 30 Theile, in elfenbeinerner Capsel, mit messingenem Ringe zum Drehen dazu; 6 Objectschieber mit geschliffenen Gläsern u. verschiedenen Probeobjecten. Die vier Vergröſserungen geben die Flächen von 30 bis 150 Mal, auf einem Sehefelde von 2‴ bis 0,7‴. Alles in einem hölzernen polirten Kasten mit Sammet gefüttert, und mit Schloſs, 17″ lang, 9″ breit, 3″ hoch	85	—
5. Sonnenmikroskop mit vollständigem Apparate, mit 4 achromatischen Linsen, in polirtem hölzernen Kasten mit Schloſs . .	100	—
6. Apparat zum Electrisiren unter dem Mikroskope, in Futteral	5	—

	fl.	kr.
7. Sammlung von 48 Quer- und Längendurchschnitten von Pflanzenstämmen und Stängeln, mit systematischer Benennung, zum Gebrauche bei dem Unterrichte über den inneren Bau der Pflanzen, in 12 Objectschiebern von Buchsbaumholz, und Futteral von Maroquin	12	—
8. Dieselben in Objectschiebern von Ebenholz	15	—
1. *Camera lucida* mit Prisma nach *Wollaston*, mit Stativ, in Futteral von Maroquin . .	11	—
2. Derlei ohne Prisma, mit metallenem Planspiegel, wo der Zeichnungsstift besser zu sehen ist, mit Stativ, in Futteral von Maroquin	15	—
3. *Sömmering*'scher Spiegelchen-Apparat, mit Ring und Stellschraube, für Mikroskope und Fernröhre, in Futteral von Maroquin	6	—
4. Derlei mit beigefügtem Stativ, um mit freiem Auge zu zeichnen, in Futteral von Maroquin	11	—

Alle zum Unterrichte in der Optik erforderlichen Apparate, worunter die neuesten zur Darstellung der Polarisation und Beugung des Lichtes begriffen sind, werden auf besondere Bestellung und Verabredung geliefert.

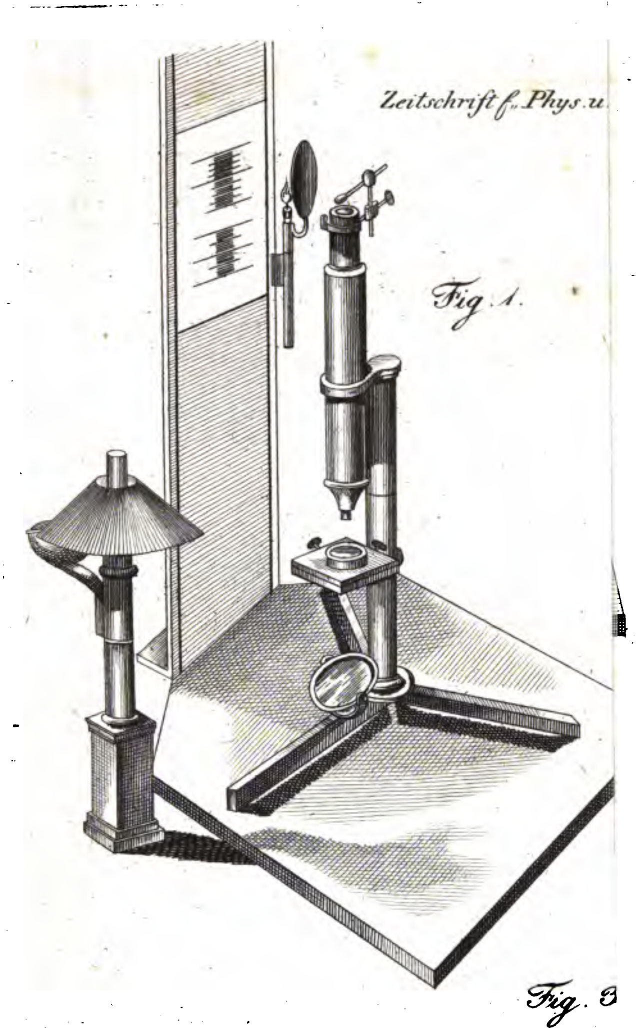
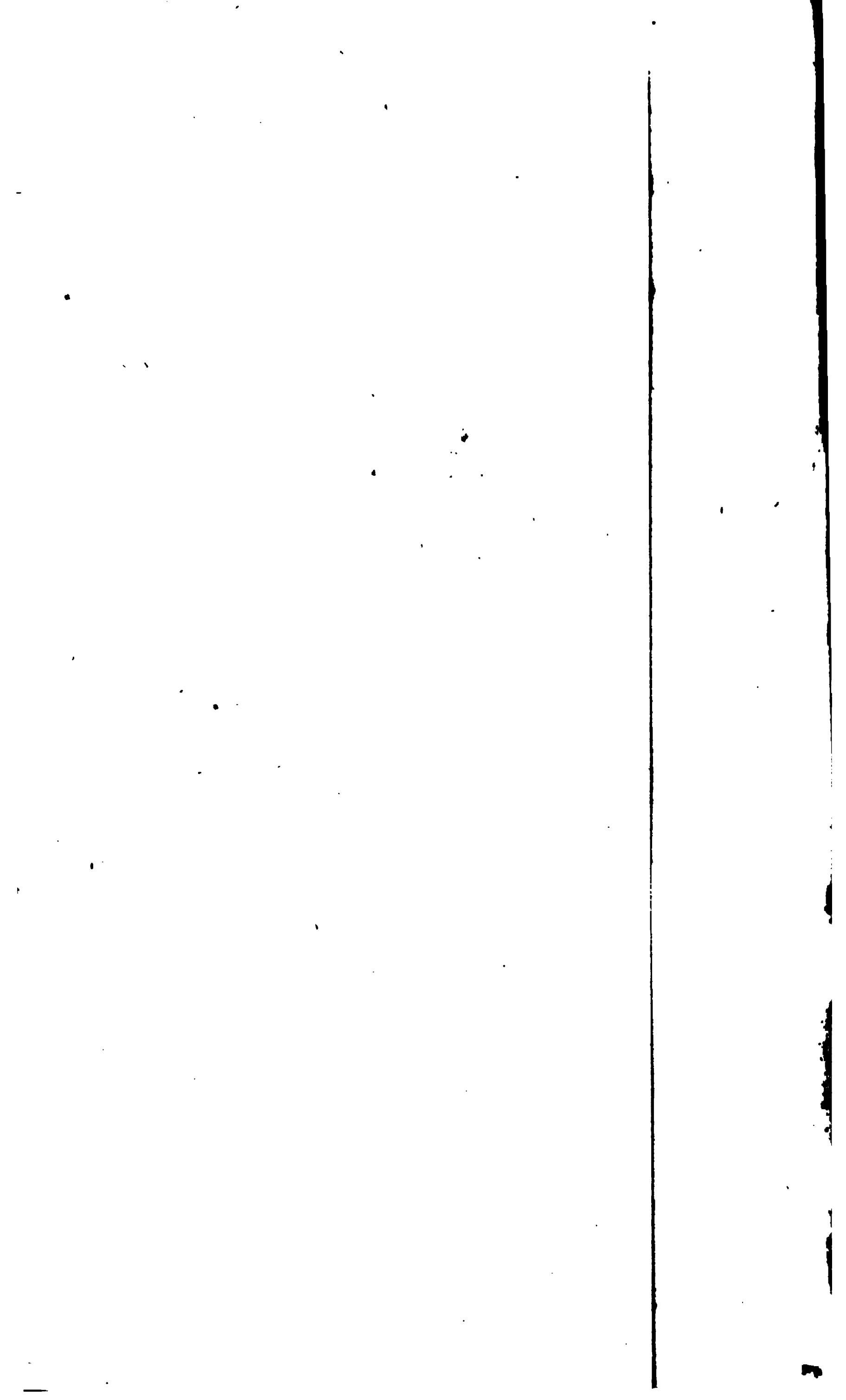


Fig. 3

M. Bauer sc.



ZEITSCHRIFT
FÜR
PHYSIK UND MATHEMATIK.

I.

Versuche über die Stärke und Elasticität des Eisens und Stahles, mit Rücksicht auf die Verwendung dieser Materialien zu Ketten und Balken;

von

Ign. Edlem von *Mitis.*

Vor einigen Monaten habe ich in dieser Zeitschrift über die Versuche, die ich zur Untersuchung der absoluten Festigkeit verschiedener Gattungen Stahles, mit Barren von kleinerem Querschnitte gemacht hatte, das lesende Publikum benachrichtiget, und da der Gegenstand an sich schon von grofser Wichtigkeit ist, so glaube ich, dürfte die Mittheilung der Fortsetzung und Erweiterung dieser Versuche den Lesern dieser Zeitschrift nicht unangenehm seyn, und wenigstens den Nutzen herbeiführen, dafs Männer von tieferen Einsichten und geprüfter Erfahrung, als ich bin, aufgeregt werden können, meine Mittheilungen zu würdigen, das allenfalls Unrichtige derselben aufzudecken, und somit die in jeder Beziehung höchst wichtige wahre Beschaffenheit der Sache mit unbezweifelter Richtigkeit an Tag zu fördern.

Ich habe meinem früheren Aufsatze eine Zeichnung der kleinen Hebelmaschine beigefügt, mittelst welcher ich meine Versuche mit Stangen von ein bis zwei Linien

Durchschnitt vorgenommen hatte, um dadurch den beurtheilenden Leser in den Stand zu setzen, sich einen richtigen Begriff von dem Versuchsverfahren zu machen, und daraus auf die mehr oder minder grofse Genauigkeit der Resultate zu schliefsen. Angenommen, dafs dem Verfahren und dem Baue der Hebelmaschine nichts auszusetzen sey, so bleibet doch noch immer der sehr kleine Querschnitt, welchen die untersuchten Stangen haben mufsten, damit sie der Kraft der Maschine angemessen waren, ein Gegenstand des billigen Zweifels über das Verhalten von Stangen mit einem beträchtlich gröfseren Querschnitte, welche in der practischen Verwendung weit öfter, als solche unbedeutende Mafse vorkommen.

Aus diesem Grunde nun, da ich hierzu eine vollkommen ähnlich gebaute grofse Hebelmaschine (ein Eigenthum der Wiener Kettenbrückenbau-Gesellschaft) benützen konnte, habe ich auch mit beträchtlich starken Eisen- und Stahlstangen einige Versuche über die absolute Festigkeit wiederholt, und glaube es sehr zweckmäfsig, auch diese Resultate bekannt zu machen.

Ich erhielt von der k. k. Hauptgewerkschaft in Eisenerz in Steiermark verschiedene, mit grofser Sorgfalt und Genauigkeit ausgeschmiedete Eisen- und Stahlstangen, die ich in Untersuchung nahm, und will das Resultat als eine Fortsetzung der Tabelle, die in dem mehrerwähnten früheren Aufsatze enthalten ist, geben.

Zahl des Versuches.	Benennung der Stangengattung.	Höhe des Prisma des Durchschnittes.	Breite.	Durchschnittsfläche.	Specifisches Gewicht.	Aufgelegtes Gewicht, welches den Bruch bewirkte.	Für einen □″ Querschnittsfläche berechnet.
1.	Eine Stange von zwei Mal gegärbtem Eisen	1″	0″,5	0,5□″	7,58	25140 Pf.	50280 Pf.
2.	Damascirter und ein Mal raffinirter Stahl	1″	0″,5	0,5□″	7,8	41500 »	83000 »
3.	Damascirter und zwei Mal raffinirter Stahl	1″	0″,5	0,5□″	7,8	52720 »	105440 »
4.	Tannenbaum- oder Scharschachstahl	1″	0″,5	0,5□″	7,75	59880 »	119760 »

Zur Erläuterung dieser Versuchsergebnisse muſs ich einiges bei jedem derselben hier anfügen. Das probirte Eisen zeigt hier eine gröſsere Widerstandskraft, als ich in meinem vorigen Aufsatze aus früheren, mit eben der Maschine gemachten Versuchen angegeben habe, wo ich sagte, daſs ich die absolute Festigkeit nicht gröſser als 400 Centner auf den Quadratzoll Querschnitt gefunden habe; allein dieser Irrthum rührte von einer erst später entdeckten Unvollkom-

menheit der Maschine her, die darin bestand, dafs ich genöthiget war, bei jeder theilweisen Vermehrung der aufgelegten Belastung die Stange vorher ganz zu entlasten, und sofort das alte schon sehr beträchtliche Gewicht mit der neuen Vermehrung, die hinzugegeben ward, bis der Bruch folgte, wieder auf ein Mal aufzulegen. Dieses Verfahren mufste nothwendig die Kraft des Zusammenhanges früher erschöpfen, als wenn die schon einmal belastete und gedehnte Stange fortwährend mit neuen Lasten beleget wurde. Ein Draht oder eine dünne Eisenstange, wenn ich sie auch noch so mäfsig, aber doch schon über ihr natürliches Elasticitätsvermögen hin und her beuge, wird brechen, wenn ich auch bei weitem nicht die Kraft in vollem Mafse darauf wirken lasse, die ihre Zerstörung oder ihr Abreissen herbei zu führen im Stande ist, und mit Unrecht würde man diesen geringen Kraftaufwand zum Mafse ihres Widerstandvermögens bestimmen. Den gleichen Fall führte das so oft nöthige Belasten und Entlasten der Stangen, bei dem ich sie sonst untersuchte, herbei. Diesem Fehler habe ich mich bemüht abzuhelfen, aber es würde zu weit führen, wenn ich umständlich die Art, wie ich dabei zu Werke gegangen, beschreiben wollte, und es mag genügen, zu wissen, dafs nun die Hinzufügung der neuen Gewichte mit weniger Unterbrechung des schon wirkenden Zuges geschehen kann, und geschieht. Für gutes steirisches Eisen, und das war die untersuchte Stange in jeder Beziehung, was schon der Ort der Erzeugung verbürgt, ist auch die Cohäsionskraft von beiläufig 500 Centner durchaus nicht zu viel, was aus dem weiteren Verfolge dieser Mittheilung zu entnehmen ist.

Die zweite Stange, nämlich die damascirte und ein Mal raffinirte Stahlstange, zeigte eine Cohäsionskraft

von 830 Centner. Für Eisen zu viel, und für Stahl zu wenig. Ich muſs gestehen, daſs ich die Composition eines unter diesem Namen bei der k. k. Hauptgewerkschaft vorkommenden Materials nicht kenne, doch zeigte der Bruch, besonders die ziemlich merkbare conische Zusammenziehung der Bruchränder, daſs dieser sogenannte Stahl noch gröſsten Theils die Natur des Eisens hatte, und ich vermuthe, daſs selber aus Eisen und Stahl gemengt und zusammengegärbet ward, was oft zu geschehen pflegt, wenn man auf solchen Stahlarbeiten durch saure Beizen an der äuſseren Fläche die Damast- oder Fladerform und Zeichnung erscheinen machen will. Eben so wenig kenne ich, was für eine Manipulation bei dem Raffiniren des Stahles Statt findet, um daraus auf die gröſsere Festigkeit der dritten Stange zu schlieſsen, die doch schon 1050 Centner Last bis zum Bruche trug; aber so viel ist erweislich und gewiſs, daſs wenigstens Eisen, je öfter es im Feuer überarbeitet und gefrischet wird, um so besser und consistenter ist, ja daſs das beste Eisen in der Regel jenes ist, was aus alten, und am besten sehr kleinen Stücken eingerennet und frisch ausgestrecket wird.

Endlich die vierte untersuchte Stange war eigentlicher, natürlicher gemeiner Stahl, welchen die trefflichen Spateisensteine des Erzberges bei Eisenerz bei gehörigem Schmelzprozeſs und Kohlensatz des Hochofens zum Theil schon in den Flossen geben. Dieses treffliche Naturproduct der österreichischen Monarchie hat auch in diesem gröſseren Versuche, so wie in dem früheren kleineren seine Kraft bewährt, indem es fast 1200 Centner bis zum Bruche trug. Viele noch sonst häufig gemachte Versuche, die ich aber nicht stets so genau zu protocolliren für nöthig fand, haben für den

gemeinen Stahl stets eben so günstige Resultate gegeben.

Ohne allen Zweifel ist die Kenntniſs der absoluten Festigkeit dieser Eisen- und Stahlstangen von groſser Wichtigkeit und Nutzen; allein da die Verwendung dieser Kräfte in vollem Maſse, wie von selbst einleuchtet, allezeit mit der Zerstörung, das heiſst mit dem Bruche verbunden wäre, so gehöret, wie mir scheint, jeder Versuch darüber nur der Theorie an, und zwar um so mehr, da aus den Ergebnissen durchaus nicht auf einen proportionirten Theil der Widerstandsfähigkeit geschlossen werden kann, von welchem man mit der Beruhigung in der Ausübung Gebrauch zu machen im Stande ist, daſs dessen fortgesetzte Anwendung die natürliche Kraft der Stange nicht sogleich oder in der Länge der Zeit angreife und erschöpfe, und daſs also einerseits die Benützung zum Nachtheil der Standhaftigkeit des Eisens zu groſs, daher Gefahr damit früher oder später verbunden wäre, andererseits aber, daſs man auch nicht durch die Bestimmung eines zu geringen aliquoten Theils dieses Widerstandsvermögens, besonders bei Verwendungen, wie die Kettenbrücken zum Beispiel, sich unnöthig zu sehr in seinem Anspruche beschränkt, und dadurch Maſse und Kosten verschwendet, die dem Unternehmer in allen Beziehungen zur Last fallen, ohne irgend einen gröſseren Nutzen zu schaffen, als die groſse Beruhigung, daſs eine so derbe Construction für Patagonier eben so als für Menschen unseres Schlages Sicherheit geben wird.

Auf das wahre Maſs der benützbaren Kräfte führen uns ganz andere Betrachtungen, und die Kenntniſs der eben so wie die absolute Festigkeit unwandelbaren Eigenschaften dieser Metallsubstanzen, nämlich der Gränzen ihrer natürlichen Elasticität.

Indem ich dieses Wort niederschreibe, dränget sich mir unwillkürlich die Erinnerung auf, wie oft ich, bei der Mittheilung dieser Idee, selbst von wissenschaftlich gebildeten Männern misverstanden worden bin, wenn die Rede von Elasticität war, indem man darunter jenes Vermögen einiger Körper verstand, eine ihnen künstlich gegebene Form, zum Beispiel die schneckenförmige der Uhrfeder, die spiralförmige der Drahtfeder, gegen den Zug oder Druck zu behaupten; diese Elasticität, wenden sie dann ein, ist in ihren Kraftäufserungen durchaus nicht so gleichförmig, und noch weniger beständig, als dafs man irgend einen Angriff darauf mit stets gleicher Sicherheitsgewährung für die Länge der Zeit berechnen könnte, und somit ist sie als Mafs der Verwendung, wenigstens mit der Zeit, verwerflich und höchst gefährlich.

Weit entfernt, das Gegentheil beweisen zu wollen, da ich mich dadurch aussetzen würde, am Ende durch einen abgetragenen Hosenträger widerlegt zu werden, mufs ich nur erinnern, dafs von dieser Elasticität, die ich zum Unterschiede die künstliche nennen will, durchaus keine Rede sey, und dafs man unter Elasticität, in dem Sinne, wie selbe hier zu nehmen ist, jene physische, den Charakter, ja sogar die natürliche Form der Körper bestimmende Eigenschaft oder Kraft zu verstehen hat, sich in ihrer natürlichen Umgränzung, d. i. Ausdehnung oder cubischen Gröfse zu erhalten, und vielmehr, wenn durch irgend eine andere entgegenwirkende Kraft die eigenthümliche Ausdehnung vermehrt oder vermindert werden will, nach Beseitigung dieser Gegenwirkung in ihre vorige Lage und natürliche Begränzung zurückzutreten. Dafs diese Eigenschaft der Elasticität jedem Körper, der irgend einen Ton von sich gibt,

oder auch den hervorgebrachten fortzuleiten im Stande ist, eigen seyn müsse, wird dem, der mit den Gesetzen der Physik bekannt ist, von selbst klar seyn, so wie, daſs man aus der Höhe oder Tiefe des Tones zum Theil auf den Grad der Elasticität schlieſsen könne.

Dieser zum Gegenstand der Abhandlung freilich nicht wesentlich gehörende Satz mag im Vorübergehen nur darum gesagt seyn, daſs man daraus entnehmen möge, daſs ein Körper, der keinen Ton, oder die Fortpflanzungsfähigkeit desselben hat, wohl schwerlich in der Natur denkbar sey, also auch kein Körper bestehe, der nicht die Elasticität in irgend einem Grade besitzet. Die scharfsinnigen Erklärungen, wodurch in der Zusammensetzung der ursprünglichen Theile eines Körpers die Elasticität hervorgebracht wird, führen zu weit in die Theorie, und können kein Gegenstand dieser kleinen Abhandlung seyn.

Modificirt, das heiſst erhöhet oder vermindert, kann die Elasticität bei allen Körpern durch die Natur, bei einigen auch durch den Gebrauch werden; und darauf beruhet die Frage für den gegebenen Fall, die darin bestehet: Welche Kraft darf man der natürlichen Elasticität entgegen wirken lassen, ohne daſs sie weder augenblicklich noch in der Zukunft eine Änderung erleidet?

Die Versuche und Ergebnisse über die absolute Festigkeit haben uns an die äuſsere Gränze der Gewalt geführet, wo wir aus einem ganzen Körper zwei gemacht, und noch obendrein seine Natur so verändert haben, daſs wir mit leichterer Mühe und geringerem Kraft- oder Gewichtaufwand aus diesen Theilen noch mehrere machen können; denn nicht nur der Bruch, sondern auch die theilweise Zerstörung des Zusammenhanges und der

Elasticität, die Veränderung des Gefüges, der Einheit der Theile der beiden Stücke der abgerissenen Stahl- und Eisenstangen, war eine Folge der auf selbe wirkenden Lasten, und es ist sehr wesentlich, zu bemerken, daſs diese Veränderung des Gefüges weit dem eigentlichen Bruch vorausgehet, und man würde sich sehr irren, wenn man z. B. von vier Eisenstangen, die bestimmt sind gemeinschaftlich eine bestimmte Last zu tragen, nnd wovon jede mit einem vierten Theil in Anspruch genommen wird, fördern oder erwarten würde, daſs, wenn nur eine darunter ist, die sich bei irgend einer, vorher einzeln auf jede Statt gehabten Wirkung einer Last, um einen auch noch so kleinen Theil ihrer Länge oder sonstigen Ausdehnung geändert haben würde, und dadurch das gleiche Maſs mit den übrigen erhalten hätte, nun mit dem gleichen Maſse in der Vereinigung aller vier widerstehe. Eine Meinung, die Viele zu haben scheinen, und die bei gewissen Umständen sehr bedenkliche Folgen haben kann, und bei Körpern, die einen minderen Grad der Elasticität haben, z. B. Eisen gegen Stahl, tritt diese beliebte Gleichstellung der Längen natürlich leichter und früher, dagegen mit gröſserer Gefahr ein, vor welcher zu warnen auch um so grösser die Nothwendigkeit zu seyn scheinet.

Versuche über die relative Festigkeit sind es, die uns zugleich über die weit wichtigere Frage belehren, wie groſs die äuſsere einwirkende Kraft seyn dürfe, die die natürliche Elasticität auf Stahl und Eisen nicht störet, das heiſst, sie in seiner Kraft, bei stäter oder oft wiederholter Anwendung der Gegenwirkung, in ihrem vollen Maſse bleiben läſst, so lange die Natur nicht durch andere, zum Beispiel chemische Einwirkungen, als Rost u. s. f., dieselben in ihrer physischen Wesenheit,

folglich auch in ihrem Grade der Elasticität verändert

Ich bin weit entfernt, diese Ansicht für neu auszugeben, sondern weiss gar wohl, dass sie seit *Galiläi's* Zeiten von den grössten Mathematikern und Ingenieuren behandelt, und der strengsten Rechnung unterworfen worden ist. Ich habe mich bloss darauf beschränkt, das Feld der Versuche, besonders in Betreff des Stahles, zu erweitern.

Damit man aber beurtheilen könne, ob die hier mitzutheilenden Versuche Werth haben, ist vor allem nöthig, eine Beschreibung und Abbildung der Maschine zu geben.

Beschreibung des bei meinen Versuchen gebrauchten Extensiometers.

Fig. 6.

aa zwei vertical stehende Säulen, welche
bbbb durch Strebestützen senkrecht auf
cc den Fussbalken befestiget sind, und zwischen dem
dee Bohngerüste sich wechselseitig angenähert und von einander entfernt werden können. Das obere Ende dieser Säulen ist prismatisch zugespitzt, und durch
f Stahlstangen, die durch Klammern festgehalten werden, gegen die Eindrücke der zu untersuchenden Barren gedecket. Die Länge dieser Barren, oder der Abstand der Säulen, wurde allezeit von der einwärts gerichteten Kante des Stahlstabes gemessen.

An der auswärts gerichteten Seite der vierseitigen Auflagssäulen ist ein
gg Pfosten aufrecht befestiget, der die Breite des Laufgerüstes hat, und auf dem Bohnbalken selbst aufstehet, wodurch die Tragsäulen selbst noch verstärkt

werden. In der Höhe der stählernen Auflagspuncte sind diese Pfosten durchlöchert; und mit starken Eisenschienen die viereckigen Öffnungen rundum eingerahmet, um die zum Versuche bestimmten längeren Barren durchzustecken, oder auch, wenn man selbe an einem frei schwebenden Ende belasten will, das andere Ende durch Keile aus Eisen in diesen Öffnungen zu befestigen. An den Seiten dieser Pfosten sind

ii eiserne Klammern, durch welche die

h Tragstangen für den Extensiometer durchgeschoben werden.

Auf diesen Stangen wird der mit eisernen Füſsen versehene Extensiometer durch die

k Hülsen eingeschoben, und an der Stelle mit Stellschrauben befestiget, wo man die zu untersuchenden Barren in der Entfernung von den Auflagepuncten mit den Gewichten belasten will. Auſser diesen ist von dem Instrumente in der ersten Figur noch ein

l kreisrundes Blatt, in hundert Umkreistheile eingetheilet, nebst

m dem an einem vierkantigen Zapfen steckenden Zeiger, zu sehen.

Fig. 7.

Ist dieses Instrument nach der Seite anzusehen, und hier der wesentlichste Bestandtheil, nämlich

n der genau abgedrehte Cylinder aus Eisen zwischen beiden Füſsen (vorhin mit *k* bezeichnet), und durch einen

o Bügel oben zusammen gehalten. An diesem Bügel ist eine Stahlfeder

p angenietet, welche auf den leicht sich an der Axe bewegenden Cylinder aufdrücket, damit er fest genug

an der Richtungsstelle stehen bleibet. Über diesen Cylinder ist ein Faden von flacher Seide gewunden, an dem ein
q Senkel hängt. Dieser Senkel besteht aus einer Bleikugel, durch welche senkrecht ein Drahtstift von mehr als zwei Zoll Länge gehet. Wenn dieser Senkel durch Umdrehung des Zeigers so weit herabgelassen wird, bis die Spitze des Drahtstiftes entweder die zu untersuchenden Barren oder das Prisma der Wagschale berührt, so zeiget selber, wenn dann Gewichte aufgeleget werden, der Barren sich senkt, durch ein weiteres Vorrücken des Zeigers genau, um den wievielten Theil des Umkreises am Cylinder die Stange ausgewichen ist; dieses Umkreismaſs erscheinet dann natürlich vergröſsert an der Spitze des Zeigers auf der vorderen in hundert Theile getheilten Scheibe. Der Umkreis des Cylinders hat hier in diesen Instrumenten 6″, 4‴ Wiener Maſs, und es würde sehr zweckmäſsig seyn, da er ohnehin nichts zu tragen hat, als den Senkel, ihm einen bei weitem kleineren Durchmesser zu geben, weil die Beobachtungen bei der Gröſse der Scheibe dann um so deutlicher seyn würden.

F i g. 8.

Zeiget die ebenfalls in der ersten Figur ersichtliche Wagschale oder Wagbrücke; sie wird mit
r dem dreiseitigen stählernen Prisma auf jenen Punct des zu untersuchenden Barrens gehangen, dessen Abstand man zum Versuche wählet; in der Zeichnung stehet diese Brücke gerade im Mittel der Entfernung der Auflagepuncte, und weil der Senkel am Faden in der Tangente des Cylinders sich herabsen-

ket, muſs der Extensiometer natürlich etwas verschoben über der Mitte stehen.

Die Einrichtung der Brücke für die aufzulastenden Gewichte ist schon durch die Ansicht der Zeichnung deutlich, und nur zu bemerken, daſs, im Falle man nicht genug Raum auf der Brücke selbst für die Gewichte findet, an der Seite noch s sechs vorstehende Haken sich befinden, woran Gewichte mit Ringen eingehangen werden können. Nur ist zu bemerken, daſs jederzeit die Gewichte möglichst gleich vertheilet werden, damit die Brücke vollkommen horizontal schwebet, und die Belastung die Stangen oder Barren nicht schief drücket, sondern parallel und senkrecht durch die Axe der Barrenform.

* * *

Von mehr als 200 Versuchen, unter verschiedenen Abänderungen gemacht, alle anzuführen, wäre wohl überflüssig, und ich muſs daher das Vertrauen der Leser in so ferne in Anspruch nehmen, daſs ich die wenigen hier mitzutheilenden aus guten Gründen gewählet, dabei aber gewiſs die gewissenhafteste Unparteilichkeit beobachtet habe, weit entfernt von der Absicht, zu beweisen, was nur zu leicht von Jedem, der Lust und Geschick zu eigenen Versuchen hat, widerlegt werden kann, wenn es nicht wahr ist. Übrigens habe ich mich überall, wo vom Maſs und Gewicht die Rede ist, des österreichischen bedienet, und fremde Angaben nach *Vega's* Reductions-Tabellen auf österreichisches Maſs gebracht. Alle Versuche, die den Stahl betreffen, sind mit geschmiedeten und durchaus ungehärteten Stangen vorgenommen worden.

Tabelle über die Stärke der relativen Festig-
Eisen-

Nummer des Versuches.	Bestimmung der untersuchten Stange.	Vierseitig prismatisch.			Entfernung der Auflagen der Stangen von einander.
		Höhe	Breite	Durchschnittsfläche	
		in Zollen.			
1	Ein Mal gegärbtes Eisen von der k. k. Hauptgewerkschaft.	1″	0″,5	0□″,5	46″
2	Eine von dem Hammermeister *Poschal* bei Krems aus altem Brucheisen verfertigte Stange.	0″,78	1″,525	1□″,1895	46″
3	Eine Eisenstange von mir unbekanntem Ursprunge.	1″,75	0″,6	1□″,05	60″

keit nachfolgender Gattungen von Stahl- und stangen.

Belastung in der Mitte.	Senkung in Zollen.	Anmerkungen.
Wagschale, nebst dem halben eigenen Gewicht d. Stange 17 Pf.	0'',0374	Bei jedesmaliger Belastung wurde das Gewicht wieder abgenommen, und untersucht, ob eine bleibende Beugung zu bemerken war. Bis zur angewachsenen Vermehrung des Gewichtes auf 225 Pf. fand durchaus keine bleibende Krümmung Statt, daher ich das Gewicht und die entsprechende Krümmung von 0'',5 als das Maximum seiner Widerstandskraft gegen in der Mitte aufgelegtes Gewicht ansah. Dem ungeachtet legte ich noch ferner Gewichte zu, und bemerkte die anfangs kaum merkliche, am Ende aber doch 0'',05 betragende bleibende Beugung. Im Allgemeinen will ich bemerken, dafs ich bei allen Versuchen, die hier folgen, auf gleiche Art die Belastung nur stets theilweise vermehrt habe, und dann bei eintretender bleibender Beugung noch so lange fortgefahren bin, bis ich selbe in der That messen konnte; allein diese umständliche Weise werde ich in der Tabelle dadurch abkürzen, dafs ich nur die Summe der ohne Nachtheil wirkenden Gewichte nebst der entsprechenden Beugung, und am Ende aufgelastete Totalgewicht wieder mit seiner entsprechenden Beugung, so wie jenen Theil derselben, den ich als bleibend bemerkte, anzeigen will.
8 »	0'',0176	
25 »	0'',055	
25 »	0'',055	
25 »	0'',055	
25 »	0'',055	
25 »	0'',055	
25 »	0'',055	
25 »	0'',055	
25 »	0'',055	
Summe 225 »	0',495	
25 »	0'',055	
25 »	0'',055	
25 »	0'',06	
25 »	0'',062	
Haupts. 325 Pf.	0'',728	
Belastung 500Pf.	0'',676	Mit 500 Pf. blieb keine bleibende Beugung, dagegen mit 530 Pf. die bleibende Beugung 0'',001 betrug.
Überdiefs 30 »	0'',004	
Belastung 470Pf.	0'',4	Bei der Belastung von 470 Pf. blieb durchaus keine bleibende Krümmung, dagegen nach Abnahme der 500 Pf. schon eine bleibende Beugung von 0'',001 zu sehen war.
Uberdiefs 30 »	0'',03	

Nummer des Versuches.	Bestimmung der untersuchten Stange.	Vierseitig prismatisch. Höhe	Breite	Durchschnittsfläche	Entfernung der Auflagen der Stangen von einander.
		in Zollen.			
4	Eine Eisenstange, die zu Märzzuschlag im Hammer des Hrn. *Vinzenz Huber* verfertiget wurde, aus Vordernberger Flossen.	0″,583	0″,583	0□″,35	57″,75
5	Dieselbe Stange, an einem Ende befestiget, an dem anderen frei vorragend.	0″,583	0″,583	0□″,35	30″
6	Eine Eisenstange, ebenfalls aus demselben Hammer.	0″,5	0″,5	0□″,25	57″,75
7	Detto.	0″,5	0″,5	0□″,25	57″,75
8	Detto.	0″,458	0″,458	0□″,21	57″,75
9	Detto.	0″,416	0″,9166	0□″,38	57″,76
10	Dieselbe Stange, die im Versuche 9 gebraucht war.	0″,9166	0″,416	0□″,38	57″,75
11	Eine Stange von Stahl, v. der k.k. Hauptgewerkschaft, und zwar v. Tannenbaum- od. Scharschachstahl, wie in obiger Tabelle über absolute Festigkeit im 4. Vers.	1″	0″,5	0□″,5	46″

Belastung in der Mitte.	Senkung in Zollen.	Anmerkungen.
Belast. 76,35 Pf. Uberdiefs 20 »	1'',09 1'',29	Bei der ersten Belastung von 76,35 Pf. war keine, bei 96,35 Pf. aber eine bleibende Krümmung von 0'',05 zu sehen.
Belast. 45,43 Pf. am vorragenden Ende.	1'',448	Bleibende Krümmung 0'',09.
Belastung 29 Pf. Uberdiefs 6 »	1'',16 1'',24	Bei dem ersten Gewichte von 29 Pf. war keine Krümmung der Stange eingetreten, aber als die gesammten 35 Pf. aufgelegt waren, so hatte sich schon eine bleibende Krümmung von 0'',02 ergeben.
Belastung 34 Pf. Uberdiefs 6 »	1'',01 1'',1898	Bleibende Krümmung nach Abnahme der aufgelegten 40 Pf. 0'',02.
Belastung 25 Pf. Uberdiefs 5 »	0'',87 0'',174	Bleibende Krümmung nach Abnahme der 30 Pf. 0'',023.
Belastung 50 Pf. Uberdiefs 6 »	1'',051 0'',1	Bleibende Senkung bei 56 Pf. 0'',03.
Balastung 100Pf. Uberdiefs 10 » detto 10 »	0'',465 0'',08 0'',05	Bei 100 Pf. war keine Krümmung, bei 110 Pf. eine kaum merkliche, bei 120 Pf., wo die Senkung 0'',595 im Ganzen betrug, blieb eine Krümmung von 0'',04 zurück. Ich liefs bei mehreren, besonders aber bei dieser Stange die gröfsten Lasten durch 24 Stunden aufgeleget, habe aber in keinem Falle nach dieser Zeit bei der Abnahme eine weitere Vermehrung der Krümmung beobachten können.
Belastung 375Pf. Ubcrdiefs 50 »	0'',684 0'',096	Bei der ersten Belastung war keine Krümmung geblieben, nach Abnahme der Last von 415 Pf. aber blieb von der 0'',78 Senkung eine Krümmung von 0'',03 zurück.

Nummer des Versuches.	Bestimmung der untersuchten Stange.	Vierseitig prismatisch.			Entfernung der Auflagen der Stangen von einander.
		Höhe	Breite	Durchschnittsfläche	
		in Zollen.			
12	Dieselbe Stange.	0'',5	1''	0□'',5	46''
13	Dieselbe Stahlstange.	1''	0'',5	0□'',5	An einem frei vorstehenden Ende belastet 28'',875
14	War ebenfalls eine aus hauptgewerkschaftl. Stahl derselben Gattung verfertigte Stange	1''	0'',5	0□'',5	Auflagen auf beiden Enden 46''
15	Dieselbe Stange.	0'',5	1''	0□'',5	Eben so 46''
16	Hauptgewerkschaftlicher damascirter, und ein Mal raffinirter Stahl.	1''	0'',5	0□'',5	Eben so 46''
17	Dieselbe Stange.	0'',5	1''	0□'',5	Eben so 46''
18	Hauptgewerkschaftlicher damascirter, und zwei Mal raffinirter Stahl.	1''	0'',5	0□'',5	Eben so 46''
19	Dieselbe Stange.	0'',5	1''	0□'',5	Eben so 46''

Belastung in der Mitte.	Senkung in Zollen.	Anmerkungen.
Belastung 200 Pf. Überdieſs 20 »	1'',199 0'',125	Bei der ersten Belastung von 200 Pf. eine kaum merkliche Senkung, dahingegen bei Abnahme der 220 Pf. schon eine Krümmung von 0'',03 bleibend gefunden.
Belastung 145 Pf. Überdieſs 10 »	0'',89 0'',08	Bei der Last von 155 Pf., wo die Beugung 0'',97 betrug, wurde schon eine bleibende Krümmung von 0'',002 gefunden.
Belastung 370 Pf. Überdieſs 50 »	0'',66 0'',09	Bei der Belastung von 370 Pf. und Beugung 0'',66 war gar keine Krümmung geblieben; aber bei der Last von 420 Pf. betrug die Beugung 0'',75, und die bleibende Krümmung 0'',029.
Belastung 200 Pf. Überdieſs 20 »	1'',165 0'',126	Daſs hier sowohl die erste ganz unschädliche Beugung bei einer Last von 200 Pf. verhältniſsmäſsig gegen den vorhergehenden Versuch um etwas zu groſs eingetreten ist, und eben so die zweite bei der Last von 220 Pf., wo sie in Summa 1'',291, kann nur daher kommen, daſs die Stange nach ihrer flachen Seite vielleicht an einigen Stellen ungleich dick war, was mit dem Maſsstabe zu finden wohl nicht möglich ist. Die bleibende Krümmung nach Abnahme der 220 Pf. 0'',05.
Belastung 280 Pf. Überdieſs 25 »	0'',5 0'',046	Bei Abnahme der vollen Last von 305 Pf., und der dadurch erfolgten Beugung von 0'',546, war eine bleibende Krümmung von 0'',02 vorhanden.
Belastung 145 Pf. Überdieſs 15 »	0'',86 0'',09	Bei Abnahme der vollen Last von 160 Pf., und der Beugung von 0'',95, blieb eine Krümmung von 0'',03.
Belastung 350 Pf. Überdieſs 30 »	0'',55 0'',048	Bei Abnahme der vollen Last von 380 Pf. blieb von der Beugung 0'',598 eine Krümmung von 0'',028 zurück.
Belastung 180 Pf. Überdieſs 20 »	1'',2 0'',14	Bei Abnahme der vollen Last von 200 Pf. blieb von der Beugung 1'',34 eine Krümmung von 0'',03 zurück.

Nummer des Versuchs.	Bestimmung der untersuchten Stange.	Vierseitig prismatisch.			Entfernung der Auflagen der Stangen von einander.
		Höhe	Breite	Durchschnittsfläche	
		in Zollen.			
20	Eine vom Hrn. *Huber* in Märzzuschlag aus gegärbtem Scharschachstahl verfertigte Stange, zu der Kette der Carlsbrücke bestimmt.	0″,5833	2″	1□″,1666	Auf 2 Auflagen in der Entfernung von 48″ an beiden Enden unterstützet.
21	Ein zweites solches Kettenglied	0″,5833	2″	1□″,1666	Eben so 48″
22	Ein drittes solches Kettenglied.	0″,5833	2″	1□″,1666	Eben so 48″
23	Ein viertes solches Glied.	0″,5833	2″	1□″,1666	Eben so 48″
24	Ein fünftes solches Glied.	0″,5833	2″	1□″,1666	Eben so 48″

Nach diesen in der vorliegenden Tabelle enthaltenen Versuchsergebnissen will ich nun, in Folge der von Hrn. *Thomas Tredgold*, Civil-Ingenieur in England, gegebenen Verfahrungsregeln, die wichtige Frage lösen: Wie weit man solche Gattungen Eisen oder Stahl, wie Österreich im Überflusse hat, bei Verwendung in Anspruch nehmen könne, ohne die geringste Besorgniſs für ihre, und zwar permanente, hinlängliche Widerstandsfähigkeit?

Ich besitze zwar die erste in England von Hrn. *Tredgold* herausgegebene Originalauflage seines dieſsfälligen Werkes, unter dem Titel: *A practial Essay on the*

Belastung in der Mitte.	Senkung in Zollen.	Anmerkungen.
Belastung 470Pf. Überdieſs 30 »	1'',09 0'',075	Bei Abnahme der ganzen Belastung von 500 Pf. blieb von der Beugung 1'',165 eine Krümmung von 0'',02 zurück.
Belastung 470Pf.	1'',13	Bei Abnahme des Gewichtes blieb keine Krümmung zurück.
Belastung 470Pf.	1'',12	Bei Abnahme des Gewichtes fand eine sehr kleine Krümmung, die höchstens 0'',01 betragen konnte, Statt, daher ich diesen Versuch in der Berechnung nur mit 465 Pf. Gewicht aufnehme.
Belastung 470Pf.	1'',05	Bei Abnahme des Gewichtes keine Spur von Krümmung.
Belastung 470Pf.	1'',1	Bei Abnahme des Gewichtes war abermals keine Krümmung sichtbar.

Strength of cast Iron, habe aber noch mehr eine in Leipzig bei *Baumgärtner* herausgekommene Übersetzung der zweiten Auflage des Originals im Jahre 1826 darum benützt, weil in selber ungemein viele Vermehrungen und höchst interessante Verbesserungen vorkommen.

Zu bedauern ist nur, daſs die gewiſs verdienstliche Übersetzung eines so belehrenden Werkes mit so weniger Sorgfalt redigirt ist, daſs selbe oft von sinnstörenden Fehlern im Texte und in den Formeln wimmelt, und daſs nur derjenige dieselben finden wird, der das Werk nicht liest, sondern mit der Feder in der Hand studirt.

Für Jene, die diesen Aufsatz nicht nur lesen, son-

dern gründlicher über die Sache belehret oder überzeugt seyn wollen, werde ich allezeit, so oft ich eine Rechnungsformel hier gebrauche, Seite und §. in Klammern gestellt beisetzen, wo sich in der erwähnten Übersetzung das für einen Zeitschriftsartikel zu Weitläufige zur nöthigen Begründung und Erläuterung findet.

Zuerst will ich für alle in der Tabelle enthaltenen Eisengattungen, nach den Ergebnissen der zehn ersten Versuche, die Gröſse der Ausdehnung berechnet darstellen, welche jede Art Eisen, ohne Nachtheil seines Gefüges, also ohne Kraftverlust aushält. Dazu dienet (Seite 170, §. 212)

$$\frac{3 . h . D\Delta}{2 l^2} = \varepsilon.$$

Um ein für alle Mal den Werth der Buchstaben, die in dieser und allen folgenden gebrauchten algebraischen Formeln vorkommen, zu bestimmen, will ich ihre Bedeutung hier ansetzen:

$\varepsilon =$ der gröſsten unschädlichen, in den Gränzen der natürlichen Elasticität bleibenden, bei der Entlastung verschwindenden Ausdehnung der untersuchten Stange, in Theilen der Stangenlänge.

$D\Delta$, oder zuweilen kürzer bloſs $d =$, der bei Auflegung von Lasten bemerkten Krümmung der Stange in Decimal-Zollen ausgedrückt.

$L =$ die Länge der Stange in Zollen.

$L' =$ die Länge im Fuſsmaſs.

$l =$ die halbe Länge der Stange in Zollen.

$l' =$ die halbe Länge im Fuſsmaſs.

$h =$ das Maſs der verticalen Seitenflächen des Prisma der Stange, oder die Höhe.

$b =$ der Horizontalflächen desselben Prisma, oder die Breite beider in Zollen.

$w =$ die bei der Untersuchung aufgelegte Last in Pfunden.

f = die höchste Last, welche auf einen Stab von 1□″ Durchschnitt als Basis, ohne Beeinträchtigung der Kraft desselben, wirken kann.

Im Versuche Nro. 1 ist also

$$l = 23'',$$
$$h = 1'',$$
$$DA = d = 0'',495.$$

Diese Werthe, in die Formel substituirt, geben $\frac{3 \cdot 1'' \cdot 0,495}{2,23''^2} = 0,0014 = \frac{1}{712}$ = der gröfsten Verlängerung ε, der solches Eisen mit Beibehaltung seiner Stärke ausgesetzt werden darf, und die wieder verschwindet, wenn die Last zu wirken aufhöret.

Bei dem Versuche Nro. 2 $\varepsilon = 0'',00149 = \frac{1}{668}$.

» » » » 3 $\varepsilon = 0'',00116 = \frac{1}{857}$.

» » » » 4 $\varepsilon = 0'',00114 = \frac{1}{874}$.

Den fünften Versuch, da die Verlängerung bei dem Umstande, dafs die Stange im Versuche nur an einem Ende belastet, aber das andere befestiget war, durch eine umständlichere Formel berechnet werden mufs, will ich um so mehr übergehen, weil es ohnehin dieselbe Stange wie im vorigen Versuche war.

Bei dem Versuche Nro. 6 $\varepsilon = 0'',00104 = \frac{1}{958}$.

» » » » 7 $\varepsilon = 0'',000908 = \frac{1}{1100}$.

» » » » 8 $\varepsilon = 0'',00078 = \frac{1}{1277}$.

» » » » 9 $\varepsilon = 0'',000787 = \frac{1}{1269}$.

» » » » 10 $\varepsilon = 0'',000768 = \frac{1}{1301}$.

Das Eisen Nro. 2 erleidet die gröſste Verlängerung von allen übrigen, welche auch wieder der Kraft unbeschadet bei Abnahme des Gewichtes verschwindet, also muſs seine Elasticität die gröſste seyn; auch wenn solches Eisen, was aus altem Brucheisen eingerennet und ausgeschmiedet worden ist, durch eine Gewalt abgerissen wird, so sind am Bruche die Kanten des Prisma nicht so sehr zusammen gezogen und conisch, als bei Eisen im neunten und zehnten Versuche, die bei weitem weniger Elasticität haben, also weniger Bestreben und Vermögen, ihre ursprüngliche Form, durch äuſsere Gewalt angegriffen, wieder herzustellen.

Aus einer solchen Bemerkung kann z. B. ein Drahtzieher bei der Wahl des Eisens, das er in Draht verwandeln will, Gebrauch machen. Will er guten und starken Draht machen, so nehme er vom Eisen Nro. 2, aber er muſs es öfter durch die Zugeisenlöcher gehen lassen, und darf keine Nummer derselben überspringen, denn wie das Eisen das Ziehloch, welches es streckte, verläſst, so stellet es sich wieder zum Theil in seiner vorigen Dicke her, und gehet ohne einige Gewalt gewiſs nicht wieder durch dasselbe Loch des Zieheisens; will er aber nur recht schnell seinen Draht erzeugen, unbekümmert um dessen nachherige bessere Eigenschaften, so nehme er nur das minder elastische Eisen, das schnell die angemessene Dicke des Loches annehmen, sich aber zu Federn schwerlich so gut als Draht von der andern Gattung Eisen brauchen lassen wird.

Senket sich eine Kettenbrücke, deren Ketten aus Eisen der Art Nro. 2 gemacht sind, durch groſse Lasten mehr als eine andere von der anderen Art Eisen construirt, so ist das kein Beweis, daſs mehr Gefahr damit verbunden ist, denn die alte Gestalt oder Horizontalrichtung der Brücke wird sich leicht herstellen; aber

weniger elastisches Eisen dürfte leicht eine gröfsere Senkung behalten.

Aus dem ersten Versuche, der umständlich in der Tabelle aufgeführt ist, ergibt sich der wichtige Satz, dafs die Ausdehnung eines Stabes durch eine Kraft, die in der Richtung seiner Länge wirkt, bei einerlei Querschnitt im geraden Verhältnisse zum aufgelegten Gewichte steht, so lange dadurch die Gränzen der vollkommenen Elasticität des in Anspruch genommenen Körpers nicht überschritten werden. Diese Gränzen müssen wohl beachtet werden; denn sobald man die elastische Kraft überschreitet, so wird gröfsere Ductilität bemerkbar.

Man kann einen sehr wichtigen Vortheil aus der Anwendung dieses Grundsatzes ziehen, nämlich wenn man die Dehnungsfähigkeit eines Körpers einmal kennet, das heifst, wenn man weifs, um wie viel er sich unter einer gewissen Last, wäre selbe auch bei weitem nicht die gröfste, die er auszuhalten vermag, beugen wird, so darf man nur diese Last auf ihn einwirken lassen, und die Gröfse der Beugung, die natürlich mit einer Verlängerung verbunden ist, beobachten. Entspricht sie der voraus gemachten Bestimmung, so ist der Körper in seinem Wesen und Natur nicht verändert, also gesund und brauchbar; tritt aber einmal eine verhältnifsmäfsig gröfsere Beugung ein, so kann man die Construction sicher als gefahrvoll ansehen.

Bauet man gröfsere Werke, und besonders Werke, wie z. B. Kettenbrücken, wo Menschenleben gefährdet werden kann, so ist es sehr räthlich, sich über den vorlauten Spott der Empiriker weg zu setzen, und fleifsig die Anzahl der Versuche zu mehren, ohne dafs es nöthig ist, jedes Stück etwa in Rücksicht der Elasticität zu versuchen, was wohl in Ansehung der absoluten Festig-

keit unerläßlich bleibet, da die dahin gehörigen Versuche gegen solche Fehler gerichtet sind, die bei jedem einzelnen Stück Statt haben können, und nicht immer leicht zu entdecken sind. Es gibt freilich noch ein bequemeres Mittel, was die Mühe der Versuche sparet, nämlich der größere Masseaufwand, oder die Benützung vorgegangener Erfahrungen; dieses letzte ist auch das beste, besonders wenn der Vorgänger auf richtigen und geprüften Grundsätzen sein Constructions-System gebauet hat.

Durch dieselbe Formel, welche uns oben die Verlängerung nach den Versuchsergebnissen für das Eisen gegeben hat, ist auch für die Versuche mit Stahl die Verlängerung berechnet worden.

Bei dem Versuche Nro. 11 $\varepsilon = 0'',001939 = \frac{1}{515}$.

» » » » 12 $\varepsilon = 0'',001696 = \frac{1}{589}$.

» » » » 14 $\varepsilon = 0'',00187 = \frac{1}{534}$.

» » » » 15 $\varepsilon = 0'',00165 = \frac{1}{606}$.

» » » » 16 $\varepsilon = 0'',0014 = \frac{1}{705}$.

» » » » 17 $\varepsilon = 0'',001219 = \frac{1}{820}$.

» » » » 18 $\varepsilon = 0'',001559 = \frac{1}{641}$.

» » » » 19 $\varepsilon = 0'',0017 = \frac{1}{578}$.

» » » » 20 $\varepsilon = 0'',00165 = \frac{1}{606}$.

» » » » 21 $\varepsilon = 0'',001716 = \frac{1}{582}$.

» » » » 22 $\varepsilon = 0'',00168 = \frac{1}{545}$.

Bei dem Versuche Nro. 23 $\varepsilon = 0'',00159 = \frac{1}{626}$.

» » » » 24 $\varepsilon = 0'',00167 = \frac{1}{597}$.

Auch auf diese Resultate der Berechnung passen alle obigen schon bei Vergleichung der Ergebnisse für das Eisen gemachten Bemerkungen. Nur auf eines mufs ich aufmerksam machen: in allen Fällen, wo ich mit derselben Stange die Versuche doppelt machte, z. B. Versuch 11 und 12, 14 und 15, 16 und 17, 18 und 19, habe ich, ungeachtet aller erdenklichen Sorgfalt, stets einige Unterschiede in den Resultaten der Verlängerungsberechnung erhalten, was nach der Theorie nicht seyn soll; allein diese Theorie setzt voraus, dafs die Durchschnittsmafse, besonders die Höhe des Prisma, auch richtig und vollkommen genau durch die ganze Länge der Stange dieselbe seyn soll; der Schmid aber, der mit solcher Genauigkeit arbeiten soll, wird wohl nicht zu finden seyn, weil sogar die Mafse so genau zu nehmen sehr schwer gefunden ist. Die kleinsten Unterschiede von der Höhe des Prisma machen, je kleiner dieselbe an sich ist, um so gröfsere, für die Praxis aber gewifs bedeutungslosere Unterschiede.

Im Durchschnitte beweisen diese Resultate, um wie viel der Stahl das Eisen an Elasticität übertrifft; er kann beträchtlich mehr sich ausdehnen, und doch wieder seine alte Form, folglich auch seine vorige Länge einnehmen. Gehet selbst seine Ausdehnung über die Gränzen seiner Elasticität, wird die Stange abgerissen, so behält der Stahl noch die Kraft, seine Seitenform beizubehalten, die Zusammenziehung der Bruchwände hat nicht oder kaum Statt, während der Eisenbruch fast zu zwei Drittel, ja zur Hälfte seiner Fläche zugespitzet

wird, weil die von der äufseren Gewalt ihm aufgezwungene Form bleibender ist.

Diese Eigenschaft des Stahles hat noch einen wichtigen Vortheil für die Anwendung bei Constructionen, die einer sogenannten lebenden Kraftwirkung, d. i. einem Stofs ausgesetzt sind; der Stofs wird weniger durch den starren Widerstand eines möglichst unelastischen Körpers, sondern blofs durch die Nachgiebigkeit desselben in seinem Kraftmomente aufgehoben; eine Thatsache, die Jeder eingestehen wird, der jemals einen fallenden Körper beobachtet hat, wenn er auf einen elastischen Bund Stroh, statt auf Steine fiel; der weiche elastische Halm wird oft kaum beschädiget, während von demselben Stofs ein fester Marmor, ja selbst eine gufseiserne Platte in tausend Trümmer zersplittert würde. Eben so wird der Stahl weniger durch einen Hammerstreich leiden und abspringen, als ein Eisenstab, vorausgesetzt, beide seyen im Durchschnitte gleich stark und gleich lang, und wohl zu merken, der Stahl sey nicht künstlich gehärtet.

Der Unterschied der Temperatur kann eben aus diesem Grunde, wie mir scheint, nicht so nachtheilig auf Stahl, als auf das minder elastische Eisen wirken, obwohl Viele das Gegentheil besorgen, und von diesem Umstande stets die erste Einwendung hernehmen, so oft von der Verwendung des Stahles zu Kettenbrücken die Rede ist. Freilich auch da hat man stets den gehärteten Stahl vor Augen, und führet Beispiele an, dafs man am Ende glauben müfste, eine zu der Nordpol-Expedition mitgenommene Messerklinge aus Stahl würde, wenn man einen Seehund zerlegen wollte, in der Faust des Jägers in Stücke springen. Zum Glück sind solche Facta nicht immer wahr, oder unrichtige, auch wohl gar keine

Beobachtungen vorhanden, warum ein Stahlstück selbst gehärtet in der oder jener Gelegenheit gesprungen ist.

Dem ungeachtet, aus wahrer Ehrfurcht gegen die Empirie, habe ich die Gelegenheit dieses Winters von 1827 zu 1828, der es am Wechsel der Temperatur wahrlich nicht fehlen liefs, dazu benützet, um auch hier einen practischen Versuch zu machen. Ich liefs nämlich eine Stahlstange, in Kärnthen zu Wolfsberg, in der Fabrik der Hrn. Gebrüder *Rosthorn* erzeugt, ungeachtet selbe nicht mehr als höchstens $0\square'',52$ Durchschnitt hatte, im Freien durch die ganze Zeit vom 15. November bis halben Februar d. J. ununterbrochen dem Zuge von 300 Centn. der Länge nach ausgesetzt, sie erfuhr doch nicht den geringsten Unfall oder Verlängerung; ja selbst als ein heftiger Orcan ein darüber hoch aufgestelltes Dach einstürzte, was freilich bei gelinderer Temperatur geschehen ist, litt sie dadurch doch nichts.

Zum Schlusse des Gegenstandes der Elasticitätsfähigkeit des Eisens und Stahles will ich nun alle die Resultate zur Übersicht zusammenstellen und vergleichen, dann auch zeigen, wie dieses nach meinen Versuchen gefundene Mittelverhältnifs zu jenem passe, was geschicktere Ingenieure und Physiker in dieser Beziehung gefunden haben.

Aus neun Versuchen für Eisen verschiedener Gattung ist das mittlere Verhältnifs der Ausdehnungsfähigkeit in den Gränzen der Elasticität

$$\varepsilon = 0'',001052 = \frac{1}{919}.$$

Bei den dreizehn Versuchen mit Stahl, eingerechnet die vier Nro. 16, 17, 18 und 19 mit damascirtem Stahl, der etwas eisenartiges hat, ist im Durchschnitt

$$\varepsilon = 0'',001641 = \frac{1}{609}.$$

Wenn man der Wahrheit oder der Anempfehlung einer Sache Glauben verschaffen will, so mufs man auch die kleinsten Nachtheile, die man durch Beobachtungen auffindet, nicht verschweigen, und darum will ich erinnern, dafs diese grofse Ausdehnungsfähigkeit des Stahles bei gewissen Gelegenheiten, z. B. bei seiner Anwendung zur Construction einer Kettenbrücke, ohne allen Zweifel tiefere Senkungen der Bahn selbst, also bedeutendere Schwingungen in verticaler Richtung hervorbringen wird, als eine gleich stark belastete Brücke von Eisen. Ich mufs mir vorbehalten, diesen Satz später noch durch Rechnung zu beweisen. Dagegen für Ankertaue kann es wohl unmöglich einem Zweifel unterworfen seyn, dafs der Stahl ein ungemein viel vortheilhafteres Material ist als Eisen, denn der in ewiger Bewegung und Stöfsen bestehende Kampf mit den Elementen ist wahrlich eine lebendige Kraft, und wird mit der so elastischen Rückwirkung, wie fast 2 gegen 1, leichter bestanden.

Es ist sehr Schade, dafs über den Stahl so wenige Versuche von anderen geschickten Physikern gemacht worden sind, oder wenigstens mir nicht bekannt waren, um zu vergleichen, wie selbe mit meinen Erfahrungen übereinstimmen. Hr. *Tredgold* (Seite 104, §. 95) führt einige nach Hrn. *Duleau* gemachte Versuche an, die umständlicher auch in Hrn. *Navier's Résumé des Leçons données à l'école royale des Ponts et Chaussées, Paris* 1826, *chez F. Didot* (Seite 42, §. 71) beschrieben sind.

Beide diese Schriftsteller geben zu erkennen dafs sie die Erfolge der Versuche für unregelmäfsig halten; allein es ist wohl schwer darüber zu urtheilen, denn von der ersten versuchten Gattung, nämlich englischem Gufsstahl, mit *Huntsmann* bezeichnet, ist z. B. ausdrücklich wenigstens in *Tredgold* gesagt, dafs er im ungetem-

perten Zustande versucht wurde; aber von der zweiten weiſs man nur, daſs es deutscher cementirter Stahl, mit *Fonstmann* bezeichnet, war, ob gehärtet oder nicht, ist nicht gesagt. Überdieſs ist Cementstahl ein in verschlossenen Büchsen durch Ausglühen mit Kohlenstoff in Stahl verwandeltes Eisen; bei dieser Stahlerzeugung kommt sehr viel auf den Grad an, in welchem das Eisen mit Kohlenstoff gesättiget wird; etwas ganz anderes ist es, wo dieser Kohlenstoff, und noch überdieſs selbst andere Metalle, z. B. Mangan, schon von der Natur im Erze sind, wie es bei dem steiermärkischen und kärnthnerischen Spateisen, und besser gesagt Stahlerzen geschieht, das nach der Schmelzmanipulation schon aus dem Hochofen als vollkommener gleichartiger Stahl in Flossen kommt; in diesem Falle ist freilich weit mehr Gleichförmigkeit zu erwarten, wie meine Versuche beweisen.

Auch ist noch ein Umstand zu bemerken. Hr. *Duleau* hat mit ziemlich starken Stangen, besonders von deutschem Stahl, seine Versuche über die Beugung gemacht, und dabei ein verhältniſsmäſsig sehr geringes Gewicht, nämlich 10 Kilogramm = 17,85 Pf. unseres Gewichtes, als Last angewendet; seine Beugungen waren also sehr gering, und wie ich aus eigener Erfahrung weiſs, nicht leicht richtig zu bestimmen. Ich habe mir übrigens doch die Mühe gegeben, alle im *Navier's* Werke angegebenen Data der Versuche nach unserem Maſs und Gewicht zu berechnen, dann aber nach meinen Versuchen aus der höchsten Ausdehnungsfähigkeit $= \frac{1}{609}$ der Länge, und aus dem weiter unten vorkommenden höchsten Gewichtsverhältnisse, welches eine solche Ausdehnung zu Wege bringt, auszumitteln, wie viel die Beugungen der *Duleau*'schen Stangen erlitten haben würden,

wenn das verhältnifsmäfsig richtige Gewicht auf die Mitte der Stangen gelegt worden wäre; und da fand ich diesen Einflufs der Ungleichförmigkeit bei weitem weniger; aber so viel zeigte sich mir deutlich, dafs der Cementstahl wirklich noch die Natur des Eisens beibehalten hat, denn wenn man diesen mit den verhältnifsmässig gröfseren Gewichten belastet hätte, z. B. die Stangen im Versuche Nro. 4 mit 81 Pf., in Nro. 5 mit 317 Pf., in Nro. 6 mit 377 Pf., in Nro. 7 mit 361 Pf., und in Nro. 8 mit 470 Pf., so hätten sich die Stangen alle um $\frac{1}{500}$ der Länge ausgedehnt, und diefs hätten sie ohne bleibende Beugung gewifs nicht, ja kaum ohne Bruch ausgehalten; ein Beweis, dafs sie die Stärke des Stahls nicht hatten, also wahrscheinlich das, was wir Stahl nennen, nicht vollkommen war.

Die englische Gufsstahlstange, ganz auf dieselbe Art berechnet im Versuche Nro. 1 und 2 mit dem gehörigen Gewicht als Last, zeigte eine Verlängerung, die ganz vollkommen mit meinen Versuchen einstimmet, nämlich im Durchschnitte $\frac{1}{620}$ der Länge. Die höchste Last, welche ein solcher Stahl ohne Nachtheil der Elasticität aushalten kann, ist auf die Gröfse eines Quadratzoll-Querschnittes bei 500 Centn. W. G. berechnet; reducirt man den von Hrn. *Tredgold* in der kleinen Tafel (Seite 105) gegebenen Modulus der Elasticität = 34000000 Pf. a. v. d. p. Gewicht nach diesen Verhältnissen, so findet man, dafs auch er sein höchstes Tragvermögen ohne Nachtheil der Elasticität auf 58438 Pf. a. v. d. p. Gewicht beiläufig berechnet haben müsse. Im Gufsstahl ist überhaupt das Verhältnifs zwischen Eisen und Kohlenstoff richtiger, also auch der Stahl vollkommener, doch leider ist der Weg der Erzeugung zu kostbar, wenigstens

für den Aufwand zu großsen Constructionen; wo uns aber in Österreich die Natur mit eben so gutem und höchst wohlfeilen Stahl hinlänglich versieht, wäre es eine unverantwortliche Vernachläſsigung, von diesem kostbaren Schatze nicht Gebrauch zu machen, und ich glaube, daſs es meine Pflicht ist, darauf durch meine Erfahrungen aufmerksam zu machen.

Nun wäre noch übrig, das Verhältniſs zwischen der Last, die eine Stange ohne Schaden und ohne bleibende Änderung ihrer Dimensionen tragen kann, zu derjenigen zu finden, die den Bruch bewirket. Weil aber die Abreiſsungsversuche schon theils schwerer zu machen, theils mit der Zerstörung der versuchten Körper verbunden sind, so mangelt es noch an ganz richtigen Vergleichungen der beiden Gränzpuncte, nämlich dem Verhältniſs der unschädlichen Anstrengung zur zerstörenden oder den Bruch bewirkenden. Wo ich beides an derselben Stange versucht habe, will ich es auch anführen, und so gut als möglich diesen Abgang ersetzen. Die Rechnungsformel zur Ausmittelung von f (dessen Bedeutung oben angegeben wurde) ist folgende:

$$f = \frac{3\,L\,w}{2\,b\,h^2}.$$

Dieselbe, auf den Versuch Nro. 1 meiner Versuchstabelle angewendet, gibt:

$L = 46''$, $w = 225$ Pf., $b = 0'',5$, $h = 1''$,

daher die Formel in Ziffern:

$$\frac{3\,.\,46''\,.\,225\ \text{Pf.}}{2\,.\,0'',5\,.\,1''^2} = 31050\ \text{Pf.}$$

Für die übrigen Versuche gebe ich nun sowohl bei Eisen als später für Stahl nur den Werth f, den dann Jeder selbst nachrechnen kann, da er alle Data in der Tabelle finden wird.

Versuch Nro.	2	$f = 37185$	Pf.
» »	3	$f = 23020$	»
» »	4	$f = 33377$	»
» »	6	$f = 20000$	»
» »	7	$f = 21243$	»
» »	8	$f = 20828$	»
» »	9	$f = 20050$	»
» »	10	$f = 20164$	»

Diese Ergebnisse zusammen genommen geben für die Widerstandsfähigkeit des Eisens 25213 Pf.

Was den Versuch Nro. 2 belanget, so habe ich schon oben bei Gelegenheit der Verlängerungsberechnung gesagt, daſs ich die ausnehmende Güte dieser Stange dem Umstande zuschreibe, daſs selbe aus altem kleinen Eisen, unter dem sich auch vielleicht einiger Stahl befunden haben kann, verfertiget worden ist.

Ein weit auffallenderer Umstand aber ist mir bei dem Eisen der Stange, die zum Versuche Nro. 4 gebraucht wurde, vorgekommen; den, ungeachtet ich auſser Stande bin, die Thatsache derzeit noch genügend zu erklären, hier umständlich zu bemerken mir sehr nothwendig und nützlich scheint, um zu ähnlichen Versuchen Anlaſs zu geben, welche die Sache vielleicht aufklären mögen. Es begegnete mir nämlich der Fall, daſs eine der für die Carlsbrücke bestimmten Stahlstangen während der Probe mit einem weit geringeren Gewichte, als sie tragen sollte, absprang, und da ich am Bruche durchaus keinen Fehler wahrnehmen konnte, so fand sich endlich, daſs wegen einer fehlerhaften Bohrung die angebrachte Gewalt des Probegewichtes in einer schiefen Richtung gegen die Längenachse der Stange gewirket hat, und ich muſste natürlich darin mit Übereinstimmung des Ausspruches obigen Grundsatzes (Seite 98) schlieſsen, daſs dieses die Ursache des Bruches der Stange war. Um aber das

auch practisch zu beweisen, so liefs ich von dem nämlichen Eisen, welches zu dem Versuche in der Tabelle Nro. 4 gebraucht worden ist, kleine solche Stangen, wie sie für die Maschine brauchbar waren, verfertigen, welche die Leser dieser Zeitschrift aus dem dritten Bande derselben kennen.

Bei einer dieser Stangen liefs ich die Löcher, welche dazu dienen, um die Bolzen zur Befestigung aufzunehmen, wie gewöhnlich senkrecht auf die Achse der Länge bohren, bei der zweiten aber liefs ich die Hälfte des Loches in der Dicke an einer Seite ausreiben, so dafs, als die Stange eingespannt ward, der Zug offenbar schief durch die Achse gehen mufste. So eingerichtet schritt ich zum Abreifsungsversuche, und es waren zu meinem Erstaunen nicht weniger als 68 Pf. erforderlich, um endlich den Bruch zu bewirken, als die ordentlich gebohrte Stange versucht ward. Ich mafs den Querschnitt derselben auf das Genaueste, verglich auch das Gewicht eines Stückes von 1 Zoll Länge der abgerissenen Stange, welches 35 Gran betrug, und fand, dafs der Querschnitt durchaus nur 2□''',6, also eine Seite 1''',6 betragen hat. Das ist also der 55,38ste Theil eines vollen Quadratzolles im Querschnitte; rechnet man nun, dafs die Wirkung des Probehebels das 20fache des aufgelegten Gewichtes + dem eigenen Gewichtsmomente des Hebels selbst ist, so kommt auf eine so kleine Eisenstange das ungeheure Gewicht von 1480 Pf., die erforderlich waren, den Bruch zu Stande zu bringen, was also für solches Eisen auf den ganzen Quadratzoll-Querschnitt 82035 Pf. macht.

Dieser Erfolg ist aber um so gewisser erprobet, da auch die zweite solche Stange, ungeachtet einer unganzen Ader im Querschnitte, auf den Quadratzoll 61440 Pf., die dritte absichtlich falsch gebohrte 55200 Pf., und

die vierte ebenfalls falsch gebohrte 50176 Pf. auf den Quadratzoll Stärke bewiesen hat. Ein so kraftvolles Eisen ist mir durchaus noch nie vorgekommen, ungeachtet es im Übrigen alle Eigenschaften, besonders am Bruche, selbst die gewöhnliche conische Zusammenziehung der Ränder, die Weichheit, den faserigen, ziemlich dunkelgrauen Bruch an sich zeigte, also Eisen im eigentlichen Sinne war. Ob auch die anderen Gattungen Eisen, nämlich jene, die für *f* ein fast ähnliches Resultat gaben, wie die Stange Nro. 1 und 2, eine gleiche Zähigkeit unter gleichen Umständen beweisen werden, bin ich fast entschlossen, bei erster Gelegenheit zu versuchen. Es wäre höchst merkwürdig, die Ursachen auszumitteln, die das Eisen zu einer so bedeutenden Kraft erheben können; ich gestehe, daſs ich eine Beimischung von Stahl vermuthe, was ich um so mehr zu glauben Ursache habe, da die Stange, von der ich hier Erwähnung machte, in meiner Gegenwart in dem *Huber*'schen Stahlhammer zu Märzzuschlag aus derselben Esse geschmiedet worden ist, wo damals sonst durchaus nur Stahl gearbeitet worden ist. In steirischen Hämmern überhaupt werden die Flossen auf Stahl und Eisen aus denselben Radwerken genommen, und oft nur willkürlich in Stahl- und Eisenflossen sortiret, es ist also wohl sehr möglich, daſs sodann ein Mittelding von beiden bei dem Einrennen unter den Hammer kommt, und so das Eisen diese auſserordentliche Stärke dem fremden, aber gewiſs nur vortheilhaften Zusatz verdanket.

Von den Eisenstangen, welche ich zu Versuchen von der k. k. Hauptgewerkschaft erhalten habe, zeigte eine im Versuche Nro. 1 ebenfalls eine Belastungsfähigkeit von 31050 Pf., und eine ähnliche habe ich laut den gleich anfangs mitgetheilten Abreiſsungsversuchen, aber mit der groſsen Hebelmaschine gebrochen; dort zeigte

selbe nur eine dem Bruche widerstehende Kraft von 50280 Pf.; dieses, glaube ich immer, ist weniger als die eigentliche Kraft, denn diese grofse Maschine ist zwar für ihre Bestimmung, nämlich auf Kettenglieder mit einem Male jene Last wirken zu lassen, welche sie als Kette tragen sollen, ungemein vortheilhaft und gut gebäuet, aber zu Versuchen, wo man die Gewichte immer nach und nach bis zum Äufsersten vermehren mufs, ist selbe etwas unbehülflich, und ungeachtet ich schon eine bedeutende Verbesserung daran in der Rücksicht angebracht habe, so ist doch noch das Nachtragen der grofsen Gewichte gegen Ende des Versuches mit Beschwerlichkeiten verknüpfet, die selbst nachtheilig auf die eingespannte Stange wirken können, und also den Bruch früher herbeiführen, als er durch das Gewicht bewirket worden wäre, das doch sein wahres Mafs des Widerstandes zeigen soll.

Die höchste Widerstandsfähigkeit des Stahles, nach der Versuchstabelle berechnet mit derselben Formel, zeiget

für den Versuch Nro. 11 $f = 50370$ Pf.
» » » » 12 $f = 55327$ »
» » » » 14 $f = 51060$ »
» » » » 15 $f = 55327$ »
» » » » 16 $f = 38640$ »
» » » » 17 $f = 40020$ »
» » » » 18 $f = 48500$ »
» » » » 19 $f = 49684$ »
» » » » 20 $f = 49730$ »
» » » » 21 $f = 49730$ »
» » » » 22 $f = 49730$ »
» » » » 23 $f = 49730$ »
» » » » 24 $f = 49730$ »

Ungeachtet die Versuche Nro. 16, 17, 18 und 19

eigentlich nicht mit vollkommenen Stahl, wie ich oben schon meine Meinung äufserte, gemacht worden sind, und daher auch ein geringeres Widerstandsvermögen haben, so will ich doch aus allen dreizehn Versuchen das Durchschnittsverhältnifs mit $f = 49044$ Pf. annehmen. In der Ausführung der Kette für die Carlsbrücke ging ich noch sicherer, und blieb bei der Anwendung von 40000 Pf. Widerstandsfähigkeit stehen, obwohl die Last als Wirkung auf die Kette ebenfalls noch bedeutend höher angenommen und berechnet ist.

Ich machte noch aufserdem einen Versuch, welchen ich wegen seiner Einfachheit als ein sehr schickliches Mittel, die Tragfähigkeit auszumitteln, zur häufigen Anwendung und Wiederholung, um diese gewifs nützlichen Erfahrungen weiter auszubreiten, Jedermann anrathe.

Ich nahm eines der für die Carlsbrücke bestimmten Kettenglieder, welches auf die breite Seite auf zwei feste Auflagen, in der Entfernung von 61″,5, niedergelegt wurde; es hatte auf diese Art eine Horizontalbreite von 2″, und eine Höhe von 0″,5833. Auf die Mitte der Entfernung der Abstände brachte ich mittelst der gewöhnlichen Wagschale das Gewicht derselben, und das halbe Gewicht der Stange selbst eingerechnet, eine Last von 155 Pf., liefs so das Ganze durch einige Stunden stehen, und mafs nun die Tiefe der auf der Stange entstandenen Krümmung, welche = 0″,654 gefunden ward. Nun berechnete ich aus dem angewendeten Gewichte 155 Pf., mit welcher unschädlichen Anstrengung dieser Stahl auf die Basis eines Quadratzolles - Querschnitt belastet war, und bezeichne dieses Ergebnifs durch f', die Last 155 Pf. $= w'$

$$f' = \frac{3 \cdot L w'}{2 b h^2} = 21061 \text{ Pf.}$$

Offenbar ist nun dieses weit unter dem oben im

Durchschnitt für Stahl berechneten $f = 49044$; da sich aber $f' : f = w'$ zu der unbekannten Last verhält, die eigentlich auf die Mitte gelegt werden sollte, so wollen wir diese mit W bezeichnen, und werden finden

$$W = \frac{f w'}{f'} = 367 \text{ Pf.}$$

Nun frägt es sich: Welche Beugung hatte denn diese Belastung hervorgebracht? Die Beugungen unter gleichen Umständen des Versuches auf dieselbe Stange verhalten sich inner den Gränzen der Elasticität, wie die aufgelegten Gewichte, also $w' : d' = W : D$, daher

$$D = \frac{d' W}{w'} = \frac{0'',654 \,.\, 367 \text{ Pf.}}{155 \text{ Pf.}} = 1'',586.$$

Aus dieser Beugung D das Verhältnifs der Verlängerung gesucht durch die bekannte Formel

$$\varepsilon = \frac{3hD}{2l^2} = \frac{3 \,.\, 0'',5833 \,.\, 1'',586}{2 \,.\, 30'',75^2} = 0'',0001645 = \frac{1}{606}.$$

Da dieses Verlängerungsverhältnifs mit dem oben im Durchschnitt für Stahl berechneten fast ganz übereinstimmt, so zeiget sich klar, dafs auch bei diesem verhältnifsmäfsig geringen Gewichte von 155 Pf., und der dabei beobachteten Krümmung, sich alle Verhältnisse der wahren Stärke solcher Stangen, aus was immer für Material, ergeben, wovon einmal der Werth von f und ε bekannt ist.

Ein Mehreres hierüber in diesen Aufsatz einzuschalten, da selber eigentlich nur die Resultate meiner Versuche zum Zwecke hat, scheinet nicht an seinem Platze zu seyn; allein beide oben angeführten Werke der Herren *Tredgold* und *Navier* enthalten so viel Nützliches und Bestimmtes darüber, dafs es nicht genug empfohlen werden kann, sich mit selben vertraut zu machen.

Ich habe in diesem Aufsatze weiter oben gesagt, dafs durch Rechnung zu beweisen sey, dafs der Stahl,

ungeachtet er, in den Gränzen seiner Elasticität belastet, bei weitem mehr Widerstand leistet, als in eben diesen Gränzen Eisen, doch sich unter gleicher Last mehr verlängert. Diese Berechnung, auf alle früheren Versuche gestützet, will ich in Kürze noch anfügen, da wir in den Fall kommen können, von solchen Erfahrungen Gebrauch zu machen.

Eine Stahlkette an einer Brücke, welche z. B. 50 Klafter lang wäre, bestimmt, eine Last von 5000 Centner inner den Gränzen ihrer Elasticität zu tragen, müfste bei der Gröfse der Tragfähigkeit des Stahls von 50000 Pf. auf einen Zoll Querschnitt 10 Quadratzoll stark seyn, und würde sich um $\frac{1}{609}$ ihrer Länge ausdehnen, also um 5″,9 länger werden, sobald sie mit dem Gewicht der 5000 Centner beladen wird. Dagegen, wenn die Kette von Eisen gemacht würde, so ist, da ihre Elasticität nur 25000 Pf. auf den Quadratzoll-Querschnitt beträgt, eine Stärke der Kette von 20□″ nöthig, und diese würden sich mit gleicher vollen Last um $\frac{1}{919}$ ihrer Länge ausdehnen, also die Kette nur um 3″,91 länger werden. Aber nicht nur bei dieser, der Widerstandskraft beider Ketten angemessenen höchsten Belastung, sondern auch bei der weit geringeren von 1000 Centner wird die Stahlkette sich bei ihrer Stärke von 10□″ um 1″,18, die Eisenkette aber nur um 0″,78 verlängern, die verticalen Oscillationen der Bahn daher sich wie ungefähr 1 : 1,5 verhalten.

So selten die Versuche sind, welche bisher über die Eigenschaften des Stahles von anderen Physikern unternommen worden sind, so habe ich doch, und zwar von Hrn. *Tredgold* selbst, ein Paar solche in Beziehung der seitlichen Belastung in einem englischen Journale

gefunden, was den Titel *Repertory of arts and manufactures, May* 1825, führt, die ich nicht nur zur Beleuchtung meiner eigenen obigen Versuche und der daraus hergeleiteten Rechnungs-Resultate, sondern vorzüglich zur Aufklärung des Verhältnisses von Stahl im gehärteten Zustande diesem Aufsatze noch anfügen will.

Hr. *Tredgold* nahm einen Stahlbarren, der geschmiedet, dann durch ein Walzwerk gleichgestreckt und so weit gehärtet war, dafs er der Feile widerstand, legte selben auf zwei um 12'',534 Wiener Zoll entfernte Auflagen, und zwar so, dafs dessen aufliegende Flächen 0'',9159 Breite, die vertical stehenden aber 0'',3598 Höhe hatten; bei diesem Stabe, in seiner Mitte mit 439 Pf. Wien. Gew. belastet, war eine Beugung von 0',0864 bemerklich, welche bei Abnahme der Last gänzlich verschwand. Wird nun nach oben gezeigten Formeln zuerst die Verlängerung berechnet, so ist

$$\varepsilon = 0'',001187 = \frac{1}{842},$$

und die höchste für diesen Zustand des Stahles der Elasticität unschädliche Belastung auf die Basis eines Wiener Zolles $f = 69570;$

daher jene Gewalt, welche nöthig wäre, um ein Prisma dieses Stahles um seine Längeneinheit, die bei uns einen Wien. Zoll seyn soll, zu verlängern oder zu verkürzen, und die Hr. *Tredgold* den Modulus der Elasticität nennet:

$$= \frac{f}{\varepsilon} = \frac{69570 \text{ Pf.}}{\frac{1}{842}} = 58,586000 \text{ Pf.}$$

Dann untersuchte Hr. *Tredgold* eine zweite Stahlstange, die aber nicht gehärtet war, und so wie jene, die ich zu meinen Versuchen brauchte, der Feile leicht nachgab.

Bei diesem Stabe waren die Auflagen 23'',13 entfernt, die Breite desselben, auf der er lag, 0'',887, und die Höhe der Seitenflächen 0'',347. Ein in der Mitte aufgelegtes Gewicht von 173 Pf. bewirkte eine Beugung von 0'',6. Aus diesen Angaben die Verlängerung berechnet, so ging selbe $\varepsilon = 0'',001978 \frac{1}{505}$ hervor, schwand aber bei abgenommenem Gewichte ganz.

Für das bekannte Maſs der Widerstandsfähigkeit eines Quadratzolles $f = 56194$ Pf., und aus beiden zusammen den Modulus der Elasticität

$$\frac{f}{\varepsilon} = 28401000.$$

Hr. *Tredgold* ging noch weiter in diesen, alle Aufmerksamkeit verdienenden Versuchen, und entdeckte noch folgende Umstände.

Die erste Stange zeigte unter derselben Last dieselbe Beugung, wenn

1. selbe bis zur rothgelben Strohfarbe abgelassen wurde.
2. Auch noch, wenn der Stahl bis zur blauen Farbe abgelassen war. Wurde sie
3. aber durch Rothglühen gehitzet, und dann sehr allmählich abgekühlt, so zeigte zwar eine Last von 196,35 Pf. noch keine bleibende Krümmung, doch scheinet es, daſs man nicht viel weiter mit der Belastung gehen durfte.
4. Wurde selbe nun neuerlich gehitzet und auf das stärkste gehärtet, so brachte erst eine Last von 624 Pf. eine Beugung von 0'',00482, die bleibend war, zu Wege; die Vermehrung der Last um 17,85 Pf. vermehrte die bleibende Krümmung um gleiche 0'',00482, endlich brach sie ganz ab unter der Last von 1035 Pf.

Die zweite Stange, als sie gehärtet worden war, dafs sie der Feile widerstand:

1. unter gleicher Belastung wie das vorige Mal gleiche Beugungen.
2. Ward sie bis zur strohgelben Farbe des Stahles abgelassen, so brachten 232 Pf. zwar keine, dagegen 267 Pf. schon eine bleibende Krümmung hervor, und mit 687 Pf. brach die Stange ab.

Sobald es Zeit und andere Geschäfte zulassen, werde ich Versuche dieser Art ebenfalls unternehmen, und selbe mitzutheilen nicht ermangeln.

Es beruhiget mich übrigens sehr, dafs meine Resultate so nahe mit denen Hrn. *Tredgold's* übereinstimmen, und läfst mich mit Grunde hoffen, dafs das von mir gewählte Versuchsverfahren ziemlich das richtige seyn dürfte.

II.

Physikalisch - chemische Untersuchung der Trinkquelle, Vincentiusbrunnen, zu Luhatschowitz in Mähren;

von

Joh. Planiawa.

Wenn sich gleich in dem binnen kurzer Zeit durch sein Mineralwasser so berühmt gewordenen Luhatschowitz vier verschiedene Quellen befinden, und eine physikalisch - chemische Untersuchung schon aus dem Gesichtspuncte betrachtet, »dafs sie alle denselben Grundursprung haben,« verdienten: so liefsen doch die Stunden meiner Mufse dieses keineswegs zu, und ich war

somit genöthiget, mein Augenmerk nur auf Eine, aber auch auf die Wichtigste zu richten. Das aus dem Vincenzbrunnen geschöpfte Wasser, welches in so großer Menge in alle Provinzen der österreichischen Monarchie, ja sogar ins Ausland verführt und allgemein gerühmt wird, war es nun, welches ich einer physikalisch-chemischen Untersuchung unterzog.

Wenn gleich dieses Heilwasser schon früher von Mehreren, namentlich Sr. Excellenz dem Herrn Grafen v. *Mittrowsky*, Herrn M. Dr. *Spenkuch*, und dem ehemaligen k. k. Physikus des Hradischer Kreises, Herrn M. Dr. *A. F. Kiesewetter* auf seinen Gehalt an mineralischen Substanzen untersucht wurde, so hielt ich eine dem gegenwärtigen Stande der chemischen Wissenschaft gemäfs durchgeführte Analyse nicht für überflüssig, und gelangte wirklich in der Folge zu der Überzeugung, dafs sie nicht nur nicht überflüssig, sondern sogar nöthig sey.

Die von mir darin entdeckten Stoffe, namentlich das Jod, Brom und Fluor, ferner das Kalium-, Baryum-, Strontium-, Siliciumoxyd und das Manganoxydul waren als dessen Bestandtheile nicht bekannt, wenn gleich erst die Kenntnifs ihres Vorhandenseyns den Heilkünstler in den Stand setzt, sich die bereits bekannten Wirkungen des Wassers auf den Organismus mit bestimmter Gewifsheit zu erklären, und mit Sicherheit auf die bisher noch unbekannt gebliebenen zu schliefsen.

Das Vorhandenseyn der vier Salzbilder aber ist besonders für den Forscher der Natur von sehr grofser Wichtigkeit. Einmal, und zwar die Gegenwart des Jods und des Broms, weil diese anscheinend nur dem Meere angehörenden Stoffe, die nur in sehr wenigen Mineralwässern Europas gefunden wurden (und in denen das Jod nicht selten in so geringer Menge vorkommt, dafs es kaum durch Reagentien zu entdecken ist), sich im-

mer mehr und mehr auch als ein Eigenthum des Festlandes erweisen. Aber weit wichtiger ist das Vorkommen aller in einer anderen Beziehung. Seit der ersten Entdeckung des Jods in Mineralwässern war ich nämlich der Meinung, daſs dieser Stoff ein beständiger Begleiter des Chlors seyn müsse, und seitdem Hr. *Balard* das Brom in dem, an Chlorsodium so reichen, Meerwasser entdeckte, ging ich zu der umfassenderen Meinung über, daſs nicht nur diese Dreie, sondern auch das Fluor als viertes Halogen, stets als wechselseitige Begleiter auftreten müssen. Von dieser vorgefaſsten Meinung ausgegangen, suchte ich erst das Jod in unserem Mineralwasser, und durch den glücklichen Erfolg aufgemuntert auch das Fluor, welches sich schon durch das Angefressenwerden der Verdünstungsgläser deutlich kund gab. Das Vorhandenseyn aller Dreie bestimmte mich endlich, dem Brom nachzuspüren, und mehrfach angestellte Versuche haben auch da meine Bemühungen mit einem glücklichen und meiner Annahme günstigen Resultate gekrönt. (Auch in dem salzreichen Wasser der neu errichteten Badeanstalt zu Napagedl bei Hradisch fand ich in Verbindung mit dem k. Kreisarzte, Herrn M. Dr. *Alois Carl*, etwas Jod.)

Sollte sich nun diese wechselseitige Begleitung der Salzbilder auch in anderen Mineralwässern erweisen, was zu bezweifeln ich bei fernerem Nachdenken über diesen Gegenstand immer weniger Grund finde, so scheint die Natur selbst hiemit einen Fingerzeig zu geben, daſs vielleicht diese vier analogen Stoffe als verschiedene Modificationen eines und desselben Grundstoffes fortwährend in einander übergehen, und somit unter verschiedenen Formen und Verhältnissen, immer mehr oder weniger, als wechselseitige Begleiter auftreten müssen.«
Übrigens wird man aus der Existenz dieser und der an-

deren in unserem Wasser gefundenen Stoffe auch auf die gleichzeitige Existenz fester Verbindungen derselben in der Nähe dieser Quellen hingewiesen, und dem Mineralogen öffnet sich dann ein neues Forschungsfeld am vaterländischen Boden.

I. Physikalische Untersuchung der Trinkquelle.

1. Temperatur.

Die Temperatur dieses Wassers ist bei + 25° Cels. Luftwärme = + 13,75° Cels. gefunden worden. Zur Winterszeit soll dieselbe kaum 2° niedriger seyn, so dafs das Wasser im Brunnen, selbst bei der strengsten Kälte, nicht gefriert.

2. Specifisches Gewicht.

Die Bestimmung des specifischen Gewichtes dieses Mineralwassers im frisch geschöpften Zustande wird durch das starke Blasenwerfen desselben unmöglich gemacht. Dem zu Folge wählte ich hierzu ein etwas an der Luft abgestandenes Wasser, welches ich in einem kleinen mit einem gut eingeschliffenen Stöpsel versehenen Fläschchen, mehrmal mit destillirtem Wasser vergleichend, wog; hierdurch fand ich das specifische Gewicht desselben = 1,00766, jenes des destillirten Wassers bei + 17,5° Cels. = 1,00000 gesetzt. (Zu einer anderen Zeit habe ich sein spec. Gewicht = 1,008035 als Mittel mehrerer ebenfalls sehr genauer Versuche gefunden, was für eine Veränderlichkeit des Salzgehaltes desselben spricht, und die ich auch in zu verschiedenen Monaten geschöpftem Wasser gefunden habe.)

3. Durchsichtigkeit.

Frisch aus der Quelle geschöpft ist dieses Wasser vollkommen klar und durchsichtig, entwickelt fortwäh-

rend Kohlenstoffsäuregas in grofser Menge, welches sich an der ganzen Innenfläche des Gefäfses in Bläschen ansetzt, und dann in die Höhe steigt. Steht es aber nur eine kurze Zeit mit der Atmosphäre in Berührung, so bekommt es ein gelblichbraunes glänzendes Oberhäutchen (entstanden durch die höhere Oxydation des darin vorhandenen Eisenoxyduls durch das atmosphärische Oxygen), welches sich dann als ein gelbbrauner pulveriger Niederschlag zu Boden setzt. Steht es längere Zeit mit der Atmosphäre in Berührung, so verliert es mit dem gröfsten Theile seiner Kohlenstoffsäure auch seine Durchsichtigkeit, weil die durch dieselbe aufgelöst erhaltenen Erden sich als Subcarbonate an den Wänden und am Boden des Gefäfses absetzen, wobei das Wasser auch ein dergleichen Häutchen bekommt. Wird aber ein mit Kohlenstoffsäuregas gefülltes Gefäfs unter dem Wasserspiegel der Quelle damit gefüllt, und gut verschlossen, so behält es so lange seine vollkommene Klarheit und Durchsichtigkeit, als dem Sauerstoff aller Zutritt verwehrt, und das Entweichen des Kohlenstoffsäuregases verhindert wird.

4. Geschmack.

Zu bekannt ist jedem Badegaste der sehr angenehme und erfrischende Geschmack dieses Wassers unmittelbar an der Quelle, welchen es, auch versendet, doch nur zum Theil beibehält, weil man bei dem Füllen die Flaschen nicht sogleich verstopft, um ihr Zerspringen zu verhindern, wodurch es also eine sehr grofse Menge an Kohlenstoffsäuregas verliert, wefshalb auch das bekanntlich von Kohlenstoffsäuregas herrührende Prickeln in der Nase bei dem frisch geschöpften Wasser in einem viel höheren Grade als in dem versandten wahrgenommen wird.

5. Geruch.

Dieses Wasser ist vollkommen geruchlos. Das stark prickelnde Gefühl in der Nase rührt bekanntlich von dem Kohlenstoffsäuregas her. Bei feuchter Witterung wollen Viele einen Schwefelwasserstoffgeruch darin bemerkt haben, obgleich es keine schwefelsauren Salze enthält.

6. Gasentwickelung aus dem Wasser.

Durch die ununterbrochen aufsteigenden gröſseren und kleineren Gasblasen wird die Quelle im beständigen Aufwallen erhalten, wobei manche Gasblasen oft so stark sind, daſs sie einen Raum von mehreren Kubikzollen einnehmen. Da ich keine Gelegenheit hatte, die chemische Constitution dieses Gases kennen zu lernen, so behalte ich mir die Analyse desselben für eine schicklichere Zeit vor, und werde nicht ermangeln, die Resultate derselben in dieser Zeitschrift bekannt zu machen.

7. Absatz an den Abfluſskanälen.

Dieser ist gelblichweiſs, stellenweise bräunlich, so daſs die einen Schichten desselben beinahe weiſs sind, während andere immer dunkler und dunkler erscheinen, und sich endlich ins Braune verziehen, aus dem sie wieder stufenweise in das Weiſse zurückkehren. Sein Gefüge ist theils derb, theils körnig, theils pulverig und nicht selten auch krystallinisch, wornach sich auch sein Cohäsionszustand richtet. Er besteht aus den mittelst der Kohlenstoffsäure in dem Mineralwasser aufgelöst gewesenen Metall- und Metalloidoxyden im kohlenstoffsäuerlichen Zustande, und entsteht dadurch, daſs sich das bei der Berührung der Atmosphäre schnell bildende Eisenoxyd und das Manganoxyd als kohlenstoffsäuerliche Hydrate absetzen, denen später beim steigenden Verluste an Kohlenstoffsäure die durch dieselbe aufgelöst

gewesenen Erden, ebenfalls im kohlenstoffsäuerlichen Zustande, nachfolgen, und um so eisenfreier, also ungefärbter sind, je später sie niederfallen. Von der mehr oder weniger langsamen Ausscheidung der Kohlenstoffsäure und der mehr oder weniger ruhigen Beschaffenheit des Wassers hängt es ab, ob dieser Niederschlag die Krystallform annimmt, oder aber als derber, körniger oder pulveriger Ansatz in den Rinnen erscheint.

II. Chemische Untersuchung der Trinkquelle.

1. Prüfung durch Reagentien.

a. Prüfung des frisch geschöpften, so wie auch des abgekochten Wassers.

1. Frisches Wasser röthete schnell das Lackmuspapier; die Farbe verschwand jedoch nach dem Trocknen ganz. Eben so wurde Lackmustinctur stark geröthet.

2. Kurkumäpapier wurde im frischen Wasser leicht gebräunt; im gekochten fand aber die Bräunung sehr stark Statt.

3. Geröthetes Lackmuspapier wurde im gekochten Wasser sogleich blau.

4. Lilienpapier wurde im gekochten und ungekochten Wasser schön lichtgrün gefärbt.

5. Fernambukpapier wurde durch dasselbe ebenfalls bleibend gebläut.

6. Säuren brachten durchgehends ein sehr starkes Aufbrausen, selbst in dem an der Luft durch mehrere Stunden abgestandenen Wasser, hervor.

7. Im Wasser gelöstes Cyaneisenkalium brachte erst keine, später eine blaue Färbung hervor, die jedoch bald wieder verschwand, weil das gebildete Cyaneisen wieder von dem im Mineralwasser vorhandenen Alkali zersetzt wurde. Eine vorhergegangene Sättigung des

Alkalis mit Essigsäure bewirkte, dafs die blaue Farbe blieb, die, wie natürlich, durch höhere Oxydation des Eisens an der Atmosphäre immer intensiver wurde. Auch in wohlverschlossenen versandten Flaschen findet noch eine blaue Färbung in mehr oder weniger hohem Grade Statt. Gekochtes Wasser blieb farbenlos.

8. Ein mit Holz zerschlagener Gallapfel färbte frisches Wasser purpurroth, später violett, und dann blauschwarz. Im gekochten fand blofs die durch das Alkali hervorgerufene schmutzig grüne Färbung nach einiger Zeit Statt.

9. Kalkwasser erzeugte, mit der Hälfte seines Volumens des Wassers gemischt, augenblicklich eine starke Trübung, und bald setzte sich ein weifser Niederschlag in Menge ab.

10. Alkohol in dem Verhältnisse von 2 : 1, und Äther in dem Verhältnisse von 1 : 4, wurden mit demselben gemischt. Nach Verdünstung der geistigen Flüssigkeiten war kein fettes oder harziges Oberhäutchen wahrzunehmen.

11. Frisch geschöpftes, abgestandenes, so wie auch gekochtes Wasser mit etwas Stärkekleister gemischt und mit Salpetersäure übersättigt, wurde nach etwa drei Minuten violett, später prächtig rosenroth, und liefs einen dergleichen voluminösen Bodensatz fallen. Ein geringeres Quantum von Stärkekleister brachte eine schöne dunkelblaue Färbung mit einem dergleichen Bodensatze hervor.

12. Kohlenstoffsäuerliche Alkalien brachten in dem Wasser eine bedeutende Trübung hervor. Mit reinen Alkalien war diese Trübung augenblicklich viel stärker. Gekochtes und rein filtrirtes Wasser wurde nicht getrübt.

13. Kohlenstoffsaure Alkalien brachten in dem gekochten und abfiltrirten Wasser keine Trübung hervor.

b. **Prüfung des mit Essigsäure etwas übersättigten Wassers.**

14. Im Wasser gelöstes salpetersaures Silberoxyd brachte in dem Wasser einen häufigen blendend weifsen käsigen Niederschlag hervor. Ein Strich ins Bräunliche konnte bei aller Vorsicht nicht bemerkt werden, ein Beweis, dafs keine Humussäure oder irgend eine andere organische Substanz vorhanden sey.

15. Im Wasser gelöstes Chlorine-Baryum brachte nicht die mindeste Trübung hervor, selbst nicht nach längerem Stehen. Eben so verhielt sich das deutazotsaure Baryumoxyd.

16. Oxalsaures Kaliumoxyd brachte eine starke Trübung hervor. Der später gebildete häufige Niederschlag löste sich in Deutazotsäure vollkommen auf.

17. Eine gewisse Quantität des mit Essigsäure gesättigten Wassers wurde mit oxalsaurem Ammoniak gefällt, der Niederschlag durchs Filtriren abgesondert, und die Flüssigkeit hierauf mit basisch phosphorsaurem Ammoniak versetzt; es entstand eine leichte Trübung, die sich später zu einem spärlichen krystallinischen Niederschlag ausbildete, der nach etwa zwei Tagen häufiger wurde.

18. Im Wasser gelöstes Anthrazothion-Kalium brachte anfangs keine Färbung hervor; doch nach längerem Stehen an der Luft nahm man, gegen weifses Papier gehalten, eine leichte Röthung wahr.

c. **Prüfung auf Kaliumoxyd, und die während des Kochens niedergefallenen Erden.**

19. Einige Unzen des Wassers wurden bis zur Trockne verdünstet, mit wenig Wassers behandelt, die Flüssigkeit vom Bodensatze getrennt, mit Hydrochlorinesäure gesättigt, und hierauf mit Platinchloridlösung versetzt; es entstand ein krystallinischer Niederschlag

von Chlorine-Platinkalium in bedeutender Menge. Wasser, welches zu verschiedenen Zeiten geschöpft worden, lieferte immer denselben Niederschlag, zum Beweise, daſs das Kaliumoxyd kein periodischer Bestandtheil desselben sey.

20. Der durchs Kochen aus dem Wasser gefällte Niederschlag wurde feingepulvert in einem reinen Silbertiegel mit Deutoxythionsäurehydrat übergossen und etwas erwärmt, nachdem man den Tiegel mit einem mit Kupferstechermasse überzogenen Uhrglase, in welche ein Name einradirt war, vorher bedeckte. Nach einigen Minuten wurde Letzteres abgenommen, und erst mit Wasser, dann aber die fettharzige Materie mit Äther abgewaschen, worauf sich fand, daſs Hydrofluorinsäure vorhanden gewesen sey: denn der Name war sehr deutlich zu lesen, ja er war so tief, daſs man mit einer Nadel in den Zügen herumfahren konnte, ohne auszugleiten. Daſs nicht Schwefelsäure auf das Glas wirkte, hat ein Nachversuch gelehrt.

21. Mit Hydrochlorinesäure behandelter Niederschlag lieſs nach dem Einkochen der Flüssigkeit und Wiederauflösen der trockenen Masse Siliciumoxyd zurück.

22. Die von dem Siliciumoxyd getrennte Flüssigkeit wurde sehr stark von allen Reagentien auf Eisenoxyd afficirt.

23. Da Phosphorsäure und Hydrofluorinesäure einander wechselseitig zu begleiten pflegen, so wurde eine halbe Maſs des Wassers verdünstet, mit einem Übermaſse von Kalkwasser versetzt, und die Flüssigkeit zur Klärung hingestellt; der hierdurch erhaltene Niederschlag wurde nun in Salpetersäure aufgelöst, die Auflösung filtrirt, mit Ammoniak neutralisirt, und hierauf mit essigsaurem Bleioxyd versetzt, worauf sich, selbst nach längerer Zeit, kein Niederschlag bildete, woraus

sich auf die völlige Abwesenheit der Phosphorsäure schliefsen läfst.

Aus diesen Präliminäruntersuchungen der Luhatschowitzer Trinkquelle geht hervor, dafs sie folgende Stoffe im gelösten Zustande enthalte:

1. Carbonsäure,
2. Hydrofluorinesäure,
3. Hydrochlorinesäure,
4. Hydrojodinesäure,
5. Kaliumoxyd,
6. Sodiumoxyd,
7. Calciumoxyd,
8. Magniumoxyd,
9. Siliciumoxyd,
10. Eisenoxydul,

und wie sich aus dem Verfolge der Analyse ergeben wird:

11. Hydrobromsäure,
12. Baryumoxyd,
13. Strontiumoxyd,
14. Manganoxydul.

Die Bestimmung der quantitativen Verhältnisse dieser Stoffe, so wie die Art und Weise, wie sie mit einander verbunden sind, ist den folgenden Blättern vorbehalten. Hierbei mufs ich übrigens noch bemerken, dafs ich die Wasserstoffsäuren nicht als solche, sondern blofs ihre Grundstoffe in Verbindung mit den metallischen Basen der ihnen entsprechenden Oxyde, aus einem weiter unten anzugebenden Grunde, anführen werde.

2. Quantitative Bestimmung der Bestandtheile der Trinkquelle.

a. Quantitative Bestimmung der gasförmigen Bestandtheile.

1. Da ich selbst nicht Gelegenheit hatte, das Wasser an der Quelle auf seinen Gasgehalt zu prüfen, so

nahm ich die mir bisher als die genauesten Resultate bekannten Bestimmungen des Hradischer k. Kreisphysikus, Herrn M. Dr. *Alois Carl*, welche er mir vor einigen Jahren gütigst mittheilte, an. Seinen Versuchen zu Folge ist das Gas ganz reine Kohlenstoffsäure, und beträgt in 9 Kubikzollen Wassers, bei + 16,25° Cels. und 28,50 W. Z. Barometerstand gemessen, 13,5 Kubikzolle. Da hier aber weder Barometer- noch Thermometerstand normal sind; so ist, in Bezug auf den normalen Barometerstand von 28 Par. Zolle, das Gasvolumen = 13,37, und mit gleichzeitiger Correctur für die Temperatur von 0° Cels. = 12,602 Wien. Kub. Z. Es sind nämlich

28,5 Wien. Zolle = 27,734 Par. Zolle, folglich

I. $28 : 27{,}734 = 13{,}5 : x$ und

$$x = \frac{27{,}734 \times 13{,}5}{28} = 13{,}37 \text{ Wien. Kub. Zollen}$$

bei 28 Par. Z. und + 16,25° Cs.; ferner

II. $13{,}37 : (1 + 0{,}00375)\,16{,}25 = 12{,}602$ Wien. Kub. Z. bei 28 Par. Z. und 0° Cs.

2. Da man nun das Kohlenstoffsäuregas als eine Auflösung des Kohlenstoffdunstes im Sauerstoffgase betrachten kann, das spec. Gewicht des letzteren = 16,00 (jenes des Wasserstoffgases = 1,00 gesetzt), und der stöchiometrische Werth des ersteren = 44,25, folglich sein spec. Gewicht $= \frac{32 + 12{,}25}{2} = 22{,}125$ ist, und 1 W. K. Z. Wasserstoffgases 0,02245 Gr. wiegt; so ist das Gewicht von 12,602 Wien. Kub. Z. Kohlenstoffsäuregases = 6,25949 Gr., weil

$$(22{,}125 \times 0{,}02245) \times 12{,}602 = 6{,}25949 \text{ ist.}$$

3. Nun wurden aber diese 6,25949 Gr. Kohlenstoffsäuregas aus 9 K. Z. oder (mit Berücksichtigung des spec. Gewichtes des Wassers) aus 2270 Gr. Wassers erhal-

ten; dem zu Folge entsprechen 10,000 Gr. unseres Mineralwassers 27,5748 Gr. derjenigen Kohlenstoffsäure, welche beim Kochen entwickelt wird, und die in der Folge um so viel vermehrt werden mufs, als an die Alkalien und Erden, um sie im kohlenstoffsäuerlichen Zustande zu erhalten, gebunden zurückgeblieben ist.

b. Quantitative Bestimmung der festen Bestandtheile des Wassers.

4. 10,000 Grane Wassers, welches im August 1827 geschöpft worden ist, wurden, nachdem die Kohlenstoffsäure sich durch Aussetzen an die Luft gröfstentheils verflüchtigte, in einer Glasschale bei gelinder, niemals den Kochpunct erreichender, Temperatur zur Trockne verdünstet. Das in der Schale Zurückgebliebene wurde mittelst eines abgerundeten und polirten scharfen Stahlmessers herausgenommen, und in einen reinen Silbertiegel gethan, wozu auch noch das Wasser, womit die Schale ausgespült wurde, kam. Nun wurde der Tiegel zuerst über einer Weingeistlampe bis zur gänzlichen Verknisterung des Chlorinesodiums erhitzt (wobei ich die Vorsicht beobachtete, ihm eine möglichst schiefe Stellung zu geben, um jedem Salzverluste durchs Ausspritzen vorzubeugen), dann aber im offenen Feuer der Rothglühhitze ausgesetzt. Die Salzmasse schmolz vollkommen, und wurde in diesem Zustande 5—8 Minuten erhalten. Geschmolzen erschien sie lichtgrün, nahm aber nach dem Auskühlen eine erst gelblich-, später weifsgrüne Farbe an; sie wurde noch heifs gewogen, und betrug nach Abzug des Gewichtes des Tiegels 65,70 Gran.

5. Der erhaltene Wasserrückstand wurde nun mit heifsem destillirten Wasser ausgelaugt, das Ganze aufs Filtrum gegossen, die erhaltene klare Flüssigkeit im Silbertiegel verdünstet, das Salz bei Beobachtung der oben

angeführten Vorsicht scharf ausgetrocknet und hierauf im Kohlenfeuer geschmolzen, wobei es ruhig flofs, und nach dem Auskühlen kaum merklich einen Stich ins Gelbliche hatte. Noch heifs gewogen fand man sein Gewicht = 58,70 Gran. Es wurde neuerdings im Wasser gelöst, um es von dem durch das Sodiumoxyd stets aufgelöst erhaltenen geringen Antheile Magniumoxyds zu befreien, dessen Quantität nach dem Abklären der Flüssigkeit und Ausglühen des erhaltenen Bodensatzes = 0,200 Gran gefunden wurde, so dafs also 10,000 Grane dieses Mineralwassers an im Wasser löslichen Bestandtheilen 58,50 Gran enthalten. Diese Salzlösung wurde mit *A* bezeichnet.

6. 10,000 Grane Wassers wurden mit reiner Salpetersäure etwas übersättigt, und hierauf mit salpetersaurem Silberoxyd im Übermafse versetzt. Der entstandene weifse Niederschlag wurde gesammelt, gewaschen, getrocknet, in einem Glasschälchen geschmolzen und gewogen; das Gewicht der geschmolzenen Masse betrug nach Abzug des Schälchens 63,80 Gran.

Ein anderer mit 5000 Granen Wassers angestellter Versuch lieferte nach scharfem Austrocknen, ohne jedoch geschmolzen worden zu seyn, 32,12 Gran Chlorsilbers, was für die Richtigkeit der oben gefundenen Menge spricht.

7. Da bei der Präliminäruntersuchung dieses Mineralwassers gefunden wurde, dafs es Jodine enthält, da ich ferner aus dem Vorhandenseyn dreier Salzbilder auf die Gegenwart des vierten erst neu entdeckten schlofs, da endlich auch diese beiden die Eigenschaft besitzen, mit dem Silber im Wasser unlösliche Verbindungen einzugehen: so mufs der mittelst des salpetersauren Silberoxyds aus dem Wasser erhaltene Niederschlag aufser dem Chlorsilber auch noch Jod- und Bromsilber führen.

Zur Bestimmung des Jodgehaltes wurde folgendes Verfahren befolgt.

8. 34780 Gran Wassers wurden bis auf ein Zehntel des anfänglichen Volumens verdünstet, die Flüssigkeit von den niedergefallenen Erden getrennt, mit Salpetersäure etwas übersättigt, filtrirt, und hierauf mit einer heiſsen Lösung des salpetersauren Silberoxyds niedergeschlagen. Der erhaltene Niederschlag, dessen Gewicht 221,90 Gr. betrug, wurde fein gerieben, mit tropfbar-flüssigem reinen Ammoniak und Wasser gekocht, hierauf noch mit einer groſsen Menge Ammoniaks und Wassers versetzt, um selbst nach dem Abkühlen die sonst unvermeidliche und falsche Resultate verursachende Krystallisation des Doppelsalzes aus Ammonium, Silberoxyd und Hydrochlorinesäure zu verhindern, und in einer vollgefüllten wohlverschlossenen Flasche zum vollkommenen Absetzen des Jodsilbers hingestellt. Nach Verlauf von etwa fünf Wochen wurde die klare Flüssigkeit abgezogen, der Rest aufs Filtrum gegossen, mit verdünntem reinen Ammonium gewaschen, und erst zwischen Löschpapier, dann aber in der Wärme scharf ausgetrocknet. Ein zweites, demselben am Gewichte gleiches Filtrum wurde mitgetrocknet, und beim Wägen in die Gegenschale gelegt; die Differenz war 0,47 Gran, und gab die aus 34780 Gr. Wassers gebildete Menge Jodsilbers an, welches für 10,000 Grane desselben 0,136 beträgt; denn es ist

$$34780 : 10000 = 0,47 : x,$$

$$x \text{ ist also } = \frac{10000 \times 0,47}{34780} = 0,136.$$

9. Nun handelte es sich darum, die Existenz des Broms in dem Wasser zu erweisen, und wenn dieſs geschehen ist, seine Menge wo möglich auch zu bestimmen. Ersteres geschah dadurch, daſs man durch eine

aus etwa einer Maſs Wassers gewonnene concentrirte Salzlösung reines Chlorgas leitete, und die bräunlich gewordene Flüssigkeit mit Äther vermischte, der ihr sogleich die Farbe entzog, aber durch Zusatz von etwas Kaliumoxydhydratlösung wieder entfärbt wurde. Der nach der Verdünstung des Äthers zurückgebliebene salzige Anflug gab mit Chlorwasser wieder eine bräunliche Lösung, die vom Äther wieder entfärbt wurde. Dieſs lieſs mich auf das Vorhandenseyn des Broms schlieſsen, zu dessen Ausscheidung ich folgendes Verfahren wählte.

10. 40,000 Gr. Wassers wurden zur Trockne verdünstet, der Rückstand mit Wasser behandelt, das Flüssige von dem Unlöslichen getrennt, nochmals verdünstet und im Wasser gelöst, von dem noch in der Lösung vorhandenen kleinen Bodensatze getrennt, und hierauf mit reiner Hydrochlorinesäure gesättigt. Durch die filtrirte Flüssigkeit wurde nun ein Strom gewaschenen Chlorgases geleitet, wodurch sie sich braun färbte. Sie wurde hierauf mit Äther geschüttelt, welcher sich hierdurch braun färbte, und mittelst Baumwolle von der wässerigen Flüssigkeit getrennt wurde, die man dann noch mit einer Portion Äthers versetzte, und diesen wieder abzog. Sämmtlicher Äther wurde mit einigen Tropfen Ammoniaks versetzt, die Flüssigkeit mit reiner Salpetersäure neutralisirt, und hierauf mit salpetersaurem Silberoxyd versetzt. Der entstandene Niederschlag war ziemlich gelb, und deutlich vom reinen Chlorsilber zu unterscheiden. Da er aber aus Jodsilber und Bromsilber nebst etwas Chlorsilber, welches sein Daseyn der im Übermaſse zugesetzten und vom Äther ebenfalls aufgenommenen Chlorine verdankte, bestand, und Bromsilber im Ammoniak gleich dem Chlorsilber auflöslich ist: so wurde der gewaschene Niederschlag mit verdünntem reinen Ammoniak übergossen, einige Zeit da-

mit in Berührung erhalten, die Flüssigkeit dann von dem abgesetzten Jodsilber abgegossen und mit Hydrochlorinesäure etwas übersättigt; der niedergefallene gelbliche Niederschlag bestand nun bloſs aus Brom- und Chlorsilber, und wog nach scharfem Austrocknen 1,20 Gran. Da dieses Quantum zu den nachfolgenden Versuchen verwendet worden, so konnte man das Brom nicht quantitative bestimmen; nur der Farbe des erhaltenen gemengten Niederschlages nach geschlossen, konnte das Bromsilberquantum auf $^1/_3$ des ganzen Niederschlags mit ziemlicher Sicherheit, also auf 0,40 Gran angesetzt werden.

11. Ein Theil des Gemenges aus Chlor- und Bromsilber wurde mit concentrirter Schwefelsäure übergossen, und das Gemenge erwärmt, worauf man einige röthliche Dämpfe wahrnahm.

Eine andere Portion des Niederschlages wurde mit verdünnter Hydrochlorinesäure übergossen und erwärmt; das Gemenge stieſs erstickende, zum Husten sehr stark reizende Dämpfe aus, und selbst nach dem Auskühlen nach einigen Stunden war dieser reizende Geruch sehr wahrnehmbar, während die zum Versuche angewandte verdünnte Säure bei dem Riechen nicht die mindeste Beschwerde verursachte.

Die vom vorhergehenden Versuche abgegossene Flüssigkeit mit reiner verdünnter Salpetersäure versetzt und das Ganze erhitzt, entwickelte weiſse, mit rothbraunen Streifen durchzogene Dünste.

Das im Ammoniak unaufgelöst Gebliebene wurde mit Hydrochlorinesäure übergossen, etwas erwärmt, hierauf mit Stärke und dann mit Salpetersäure versetzt; sogleich entstand eine violette Färbung der Masse, die immer intensiver wurde, und endlich recht dunkel erschien, ein Beweis, daſs das im Ammoniak unaufgelöst Gebliebene Jodsilber sey.

12. Bei 3. haben wir aus 10,000 Gr. Wassers 63,80 Gr. einer geschmolzenen Masse erhalten, welche aus Chlorsilber und etwas Brom- und Jodsilber besteht, und worin das Jodsilber (nach 5.) 0,136 Gr., das Bromsilber aber beiläufig 0,10 Gr. beträgt. 10,000 Gr. unseres Mineralwassers lieferten also:

an Chlorsilber	. 63,80 — (0,136 + 0,100) =	63,564 Gr.
» Bromsilber	. 63,80 — (63,564 + 0,136) =	0,100 Gr.
» Jodsilber	. 63,80 — (63,564 + 0,100) =	0,136 Gr.
	Zusammen .	63,800 Gr.

13. Da nun 1 stöchiometrischer Antheil Chlorsilbers (= 143,776) aus 1 stöch. Antheil Chlors und 1 stöch. Anth. Silbers besteht, so entspricht oben angeführtes Quantum desselben 15,681 Gr. Chlors; denn es ist

$$143{,}776 : 35{,}470 = 63{,}564 : x,$$

$$x \text{ ist also } = \frac{35{,}470 \times 63{,}564}{143{,}776} = 15{,}681.$$

Ferner besteht das Bromsilber ebenfalls aus 1 stöch. Antheile Broms (= 75,410) und 1 stöch. Anth. Silbers (= 108,306), wornach sich die Quantität des in 10,000 Gr. Wassers enthaltenen Broms, aus der gewiſs nicht zu hoch, wenn nicht vielmehr zu niedrig angesetzten Menge Bromsilbers berechnet, zu 0,04105 Gr. ergibt; denn es ist wieder

$$183{,}716 : 75{,}41 = 0{,}10 : x,$$

$$x \text{ also } = \frac{75{,}41 \times 0{,}10}{183{,}716} = 0{,}04105.$$

Endlich ist die Zusammensetzung des Jodsilbers den beiden Vorhergehenden entsprechend, und dem zu Folge sein stöch. Werth = 231,512, woraus sich ergibt, daſs das, der aus 10,000 Gr. erhaltenen Jodsilbermenge entsprechende, Jodquantum 0,072 Gr. sey. Es ist nämlich

$$231{,}512 : 123{,}206 = 0{,}136 : x,$$

x ist also $= \frac{123{,}206 \times 0{,}136}{231{,}512} = 0{,}072.$

10,000 Gr. der Lubatschowitzer Trinkquelle enthalten also an

Chlor	. . . . . .	15,68100 Gr.,
Brom	. . . . . .	0,04105 Gr.,
Jod	. . . . . .	0,07206 Gr.,
oder an		
Hydrochlorsäure	.	16,123100 Gr.,
Hydrobromsäure	.	0,041594 Gr.,
Hydrojodsäure	. .	0,072584 Gr.

14. Die bei 2. erhaltene und mit *A* bezeichnete wohlgereinigte Salzlösung wurde mit reiner Hydrochlorinesäure, unter Vermeidung alles Verspritzens, etwas übersättigt, bis zum Rückstande von etwa 1 Kubikzolle verdünstet, und mit reiner Platinchloridlösung bis zur Doppelsalzbildung versetzt; es entstand ein bedeutender Niederschlag von Chlorplatinkalium, von welchem die Flüssigkeit abgegossen und bis zum Krystallisationspuncte verdünstet wurde. Die Krystallisation wurde durch häufiges Umschütteln gestört, und die Flüssigkeit nach dem Auskühlen zur Ruhe hingestellt. Nach etwa 24 Stunden wurde die Salzmasse schnell mit Wasser behandelt, das hierbei vorgefundene Chlorplatinkalium dem erst Erhaltenen zugesetzt, alles mit Alkohol abgespület, hierauf scharf getrocknet und gewogen; sein Gewicht betrug 8,40 Gran, und deutet auf 1,36 Gran Kaliums oder auf 1,637 Gr. Kaliumoxyds.

Es ist nämlich 1 stöch. Anth. Chlorplatinkaliums = 243,07, und besteht aus 1 stöch. Anth. Kaliums (= 39,26), 1 stöch. Anth. Platins (= 97,40), und 3 stöch. Anth. Chlors (= 35,47 × 3).

Es verhält sich also:

$$243{,}07 : 39{,}26 = 8{,}40 : x,$$

x also $= \frac{39{,}26 \times 8{,}40}{243{,}07} = 1{,}360$ Gr. Kaliums, und da 1 stöch. Antheil desselben 1 stöch. Antheil Oxygens aufnimmt, um sich in Oxyd zu verwandeln, so entspricht diese Menge 1,637 Gr. Kaliumoxyds.

15. Da uns nun die Quantitäten derjenigen Salzbilder bekannt sind, welche im Wasser leicht lösliche Verbindungen mit Kalium und Sodium liefern; da wir ferner aus den Vorversuchen, mit Berücksichtigung der Verwandtschaftsäufserungen, wissen, dafs die Ersteren in der geschmolzenen Salzmasse nur an Eins oder an Beide der Letzteren gebunden seyn können; und da endlich nach 11. der Kaliumgehalt in 10,000 Gr. Wassers nur 1,360 Gr. beträgt: so sehen wir uns im Stande, die den Salzbildern entsprechende Quantität des Sodiums, und, nach Abzug der Verbindungen von dem Totalgewichte der Salzmasse, auch jene des im Wasser vorhandenen kohlenstoffsauren Sodiumoxyds bestimmen zu können. Was das Kalium betrifft, so besitzt dieses unter gewöhnlichen Umständen eine gröfsere Verwandtschaft zum Chlor als zu den übrigen zwei Salzbildern, und da wir jetzt nur diese Umstände berücksichtigen müssen: so wollen wir erst die demselben entsprechende Chlorquantität bestimmen, um dann auf die Quantität des Sodiums und jene des kohlenstoffsäuerlichen Sodiumoxyds der geschmolzenen Salzmasse sicher schliefsen zu können.

16. Das Chlorkalium besteht aus gleichen stöch. Antheilen Chlors und Kaliums, und dem zu Folge ist sein stöch. Werth $= 74{,}73$, worin also 35,47 Chlors enthalten sind; es ist aber

$$39{,}26 : 35{,}47 = 1{,}36 : x \text{ und}$$

$$x = \frac{35{,}47 \times 1{,}36}{39{,}26} = 1{,}2287.$$

Es verbinden sich also 1,36 Gr. Kaliums mit 1,2287 Gr. Chlors zu 2,5887 Gr. Chlorkaliums.

Nun bleiben uns noch 15,6810 — 1,2287 = 14,4523 Gr. Chlors, welche an Sodium gebunden seyn müssen; und da das Chlorsodium dem Chlorkalium analog zusammengesetzt, der stöch. Werth des Sodiums aber = 23,31 ist: so verhält sich

I. $35{,}47 : 23{,}31 = 14{,}4523 : x$, und

x ist $= \frac{23{,}31 \times 14{,}4523}{35{,}47} = 9{,}4695$ — dem rückständigen Chlor entsprechendes Sodium.

Ferner: das Brom- so wie auch das Jodsodium haben dieselbe Zusammensetzung, und es ist

II. $75{,}41 : 23{,}31 = 0{,}04105 : x$,

x ist aber $= \frac{23{,}31 \times 0{,}04105}{75{,}41} = 0{,}01269$ — dem Brom entsprechendes Sodium; und endlich

III. $123{,}206 : 23{,}31 = 0{,}072 : x$,

x aber $= \frac{23{,}31 \times 0{,}072}{123{,}206} = 0{,}01362$ — dem Jod entsprechendes Sodium.

17. Dem vorhergehenden Paragraphe zu Folge entsprechen:

1,36 Gr. Kaliums 1,2287 Gr. Chlors, und liefern . .	: 2,58870 Gr. Chlorkaliums.
14,4523 Gr. Chlors 9,4695 Gr. Sodiums, und liefern	: 23,92180 Gr. Chlorsodiums.
0,04105 Gr. Broms 0,01269 Gr. Sodiums, und liefern	: 0,05374 Gr. Bromsodiums.
0,07200 Gr. Jods 0,01362 Gr. Sodiums, und liefern . .	: 0,08562 Gr. Jodsodiums.
Zusammen	: 26,64986 Gran.

Werden nun diese 26,64986 Gr. von der aus 10,000 Gr. Wassers erhaltenen geschmolzenen Salzmasse abgezogen, so zeigt der Rest die Menge des kohlenstoffsäuer-

lichen Sodiumoxyds an, aus dem sich dann die Quantität des im Wasser gelöst erhaltenen kohlenstoffsauren Salzes genau bestimmen läfst. Nun betrug der reine Salzgehalt von 10,000 Gr. Wassers . . . 58,50000 Gr.; und das Gesammtgewicht der Chloride, Bromide und Jodide ist . . . . . = 26,64986 Gr., folglich bleibt an kohlenstoffsäuerlichem

Natriumoxyd . . . . 31,85014 Gr.,

welche Menge 18,6606 Gr. reinen Natriumoxyds entspricht. Denn es ist: $\frac{62,62 \times 31,85}{106,87} = 18,6606$.

18. Den Vorversuchen zu Folge ist in diesem Mineralwasser auch Hydrofluorinesäure enthalten, und ich unterliefs es nicht, auch diese quantitativ zu bestimmen. Zu diesem Ende wurden 100,000 Gr. des Mineralwassers langsam verdünstet, der gut ausgewaschene erdige Niederschlag in einem Platintiegel in verdünnter Hydrochlorinesäure aufgelöst, die Auflösung filtrirt, und mit reinem Ammoniak in gut verschlossenen Gefäfsen niedergeschlagen. Der erhaltene gut ausgewaschene Niederschlag wurde nun im Platintiegel mit Schwefelsäurehydrat übergossen, das Ganze bis zur gänzlichen Verflüchtigung der Hydrofluorinesäure erhitzt, hierauf in vielem Wasser gelöst, das Eisenoxyd durch reines Ammoniak entfernt, und die filtrirte Flüssigkeit mit oxalsaurem Ammoniak versetzt, worauf sich ein Niederschlag bildete, welcher nach dem Trocknen und Ausglühen 0,75 Gr. kohlenstoffsäuerlichen Calciumoxyds lieferte; welche Menge 0,2776 Gr. Fluors entspricht. Es ist nämlich

$$101,25 : 37,47 = 0,75 : x \text{ und } x = \frac{37,47 \times 0,75}{101,25} = 0,27756.$$

10,000 Gewichtstheile des Wassers enthalten also $\frac{0,2776}{10} = 0,02776$ Gr. Fluors in ihrer Grundmischung.

(Der Beschlufs folgt.)

III.

Über die Gestalt der Bruchstücke zerschossener Glastafeln;

von

August Neumann.

Ich machte vor Kurzem den Versuch, ein Bret mittelst einer Unschlittkerze zu durchschiefsen. Diefs brachte mich auf den Gedanken, auch eine Glasscheibe mittelst einer abgeschossenen Kugel zu durchbohren. Dafs solches schon früher sowohl durch Kanonen als auch durch andere Schiefsgewehre sey bewerkstelliget worden, ist bekannt; es befindet sich selbst in dem physikalischen Museum der hiesigen Universität eine mittelst einer Granate durchschossene Scheibe, bei welcher das Glas übrigens ganz unverletzt ist. Ich bediente mich bei meinen Versuchen einer Jagdflinte, und hing die Glasscheiben in einem einfachen Netze aus Bindfäden an einem Baume auf. Die Scheiben, welche ich zu den ersten Versuchen nahm, hatten eine Länge von etwa 10'', und eine Breite von beiläufig 8''. Diese wurden jedes Mal blofs in Trümmer geschossen, obgleich ich die Pulverladung immer vermehrt hatte. Später nahm ich Scheiben von beiläufig 18'' Länge und 16'' Breite, und es glückte mir, ein Loch von der Gröfse der abgeschossenen Kugel mit einem etwas matten Rande zu erhalten.

Wenn aber der beabsichtigte Versuch auch mehrmals mifslungen ist, so war er doch nicht ohne Ausbeute. Denn als ich meine Aufmerksamkeit auf die zu Boden gefallenen Trümmer richtete: fand ich sie ganz anders gebildet, als die Trümmer eines durch Druck oder Schlag gebrochenen Glases; am meisten waren sie noch denen ähnlich, die man erhält, wenn erhitztes

Glas schnell abgekühlt wird. Die strahlige Figur, und die sanft gekrümmten Linien, die gewöhnlich beim zerbrochenen Glase entstehen, finden hier ganz und gar nicht Statt. Die Bruchkanten hatten immer bauchförmige Ein- und Ausbiegungen (Fig. 9, 10, 11) *), welche Krümmungen selbst wieder nicht glatt, sondern mehr zackig waren, und wieder aus ganz kleinen Einbiegungen bestanden, ähnlich den gröſseren. Die Bruchfläche selbst ist ferner nicht, wie beim gewöhnlichen Zerspringen des Glases, senkrecht (oder wenig von dieser Lage abweichend) auf die Fläche der Scheibe, sondern (wie Fig. 10) von den verschiedensten Neigungen, die nicht allmählich in einander übergehen, sondern eine Art von Winkelstufen bilden, die gleichfalls verschiedene Neigungen gegen einander haben, so zwar, daſs die nicht glatten Bruchflächen mit einer groben, schlecht verfertigten Feile verglichen werden könnten, wenn nämlich der Meiſsel beim Hauen derselben unter verschiedenen Winkeln gehalten würde, und zugleich Schläge von ungleicher Stärke erhielte; daher denn die Einschnitte nicht überall gleiche Tiefe haben, und die Furchen nicht unter einander parallel seyn könnten. Dieſs ist übrigens nur eine beiläufige Beschreibung eines solchen Bruchstückes, dessen Form ganz eigenthümlich ist, und eine genaue Beschreibung kaum zuläſst.

Ich glaubte aber auf diese Form der Trümmer aufmerksam machen zu sollen, indem es gewiſs eine sonderbare Erscheinung ist, daſs ein und eben derselbe Körper so sehr von einander verschiedene Formen beim Zerbrechen zeigt, da doch, in Beziehung auf die Ursache des Zerbrechens, der Unterschied bloſs in der verschiedenen Geschwindigkeit des Schlages besteht.

*) Fig. 10 ist eine perspectivische Ansicht.

IV.

Über die terrestrischen Oculare;

von

I. I. Littrow.

Zur vollständigen Behandlung der Fernröhre ist, nebst der bereits gegebenen Bestimmung des Objectivs und des astronomischen Oculars mit zwei Linsen, noch die des sogenannten terrestrischen Oculars übrig, welches letzte gewöhnlich aus vier Linsen besteht, und eine eigene Untersuchung erfordert. Da aber hier die Anzahl der Brennweiten, der Distanzen, der conjugirten Vereinigungsweiten u. d. gl. zu groſs wird, um für jede einzelne Bestimmung auf die ursprünglichen Formeln der Dioptrik zurückzugehen, so ist eine *allgemeine Methode* nothwendig, Probleme dieser Art bequemer aufzulösen, als es wohl früher von *Klügel*, *Langsdorf* und anderen optischen Schriftstellern geschehen seyn mag.

Es seyen p die Brennweite, a und α die beiden conjungirten Vereinigungsweiten, und $z = p\omega$ der Öffnungshalbmesser der ersten Linse oder des Objectivs. Für die zweite, dritte... Linse wollen wir dieselben Grössen durch $p' a' \alpha' \ldots$ und $p'' a'' \alpha'' \ldots$ bezeichnen, und der Kürze wegen annehmen

$$A = \frac{\alpha'}{a'},\quad A' = \frac{\alpha''}{a''},\quad A'' = \frac{\alpha'''}{a'''} \ldots \text{ und}$$

$$B = \frac{\alpha}{a'},\quad B' = \frac{\alpha'}{a''},\quad B'' = \frac{\alpha''}{a'''} \text{ u. s. w.}$$

Nennt man m die Vergröſserung des Fernrohres, so hat man für n Linsen

$$\left.\begin{aligned} m &= B \,.\, B' \,.\, B'' \,.\, B''' \ldots B^{n-2} \quad \text{und} \\ 0 &= \omega' + \frac{\omega''}{B'} + \frac{\omega'''}{B'B''} + \frac{\omega''''}{B'B''B'''} \ldots + \frac{\omega^{n-1}}{B'B''B'''\ldots B^{n-2}} \end{aligned}\right\} \ldots (\text{I.}),$$

wo die letzte Gleichung bekanntlich die Bedingung ausdrückt, dafs die Gegenstände durch das Fernrohr mit einem farbenlosen Rande erscheinen.

Diese zwei Gleichungen bestimmen also zwei der Gröfsen B, B', B'' . . ., wenn die übrigen, so wie die Öffnungsfactoren ω', ω'', ω''' . . . entweder gegeben, oder willkürlich angenommen werden, da unser Problem, wegen der gröfseren Anzahl von unbestimmten Gröfsen, selbst zu den unbestimmten Aufgaben gehört.

Für das halbe Gesichtsfeld φ des Fernrohres hat man

$$\varphi = \frac{\omega^{n-1} - \omega^{n-2} + \omega^{n-3} - \omega^{n-4} \ldots \mp \omega'' \pm \omega'}{m \pm 1};$$

das obere Zeichen, wenn n gerade, und das untere, wenn n ungerade ist.

Kennt man auf diese Art die Gröfsen B, ω und φ, so findet man die Gröfsen A, A', A'' . . . durch folgende Gleichungen, deren Beweise aus den ersten Gründen der Optik ich hier übergehen kann:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{A\omega'}{A+1} &= (B+1)\varphi \\
\frac{A'\omega''}{A'+1} &= (BB'-1)\varphi + \omega' \\
\frac{A''\omega'''}{A''+1} &= (BB'B''+1)\varphi + \omega'' - \omega' \\
\frac{A'''\omega''''}{A'''+1} &= (BB'B''B'''-1)\varphi + \omega''' - \omega'' + \omega' \text{ etc.}
\end{aligned}\right\} \ldots \text{(II.)}$$

Man wird dabei bemerken, dafs das erste a und das letzte α immer unendlich ist, weil die Strahlen bei jedem Fernrohre parallel auf die erste Linse fallen, und eben so parallel wieder aus der letzten Linse austreten sollen, woraus zugleich folgt, dafs das erste $\alpha = p$ und das letzte a, oder $a^{n-1} = p^{n-1}$, also auch das letzte A, oder $A^{n-1} = \infty$ ist, so dafs z. B. für $n = 5$ die letzte der Gleichungen (II.) in folgende übergeht:

$$\omega'''' = (m-1)\,\varphi + \omega''' - \omega'' + \omega',$$

welche mit dem oben für φ gegebenen Ausdrucke identisch ist.

Kennt man also auch mittelst der Gleichungen (II.) die Gröfsen A, A', A'' . . ., so hat die eigentliche Bestimmung des Fernrohres oder des gesuchten Oculares keine weitere Schwierigkeit. Diese Bestimmung besteht nämlich in der Angabe der Brennweiten $p'\,p''\,p'''$ . . . der Linsen, und ihrer Distanzen $\Delta = \alpha + a'$, $\Delta' = \alpha' + a''$, $\Delta'' = a'' + a'''$ u. s. w., und man findet diese Gröfsen durch folgende Ausdrücke:

$$\left.\begin{array}{llll}
p' = \dfrac{A\alpha}{(1+A)B} & \text{und} & \Delta = \dfrac{(1+B)\alpha}{B} \\[2ex]
p'' = \dfrac{AA'\alpha}{(1+A)BB'} & \text{»} & \Delta' = \dfrac{(1+B')A\alpha}{BB'} \\[2ex]
p''' = \dfrac{AA'A''\alpha}{(1+A'')BB'B''} & \text{»} & \Delta'' = \dfrac{(1+B'')AA'\alpha}{BBB''} \\[2ex]
p'''' = \dfrac{AA'A''A'''\alpha}{(1+A''')BB'B''B'''} & \text{»} & \Delta''' = \dfrac{(1+B''')AA'A''\alpha}{BB'B''B'''} \\[2ex]
\quad\text{etc.} & & \quad\text{etc.}
\end{array}\right\}\ldots\text{(III.)}$$

Will man endlich noch die Vereinigungsweiten a', α'; a'', α'' . . . kennen, so erhält man sie durch folgende einfache Ausdrücke:

$$\left.\begin{array}{llll}
a' = \dfrac{\alpha}{B} & \text{und} & \alpha' = \dfrac{A\alpha}{B} \\[2ex]
a'' = \dfrac{A\alpha}{BB'} & \text{»} & \alpha'' = \dfrac{AA'\alpha}{BB'} \\[2ex]
a''' = \dfrac{AA'\alpha}{BB'B''} & \text{»} & \alpha''' = \dfrac{AA'A''\alpha}{BB'B'} \\[2ex]
a'''' = \dfrac{AA'A''\alpha}{BB'B''B'''} & \text{»} & \alpha'''' = \dfrac{AA'A''A'''\alpha}{BB'B''B'''} \\[2ex]
\quad\text{etc.} & & \quad\text{etc.}
\end{array}\right\}\ldots\text{(IV.)}$$

wodurch also das Fernrohr in allen seinen Theilen vollständig bestimmt ist.

Es wird kaum nöthig seyn, zu erinnern, dafs die Aus-

drücke der Distanzen Δ, Δ', Δ'' ... der Linsen, ihrer Natur nach, immer positive Gröfsen seyn müssen, welchem gemäfs also die Wahl der Gröfsen B, B', B'' ... vorgenommen werden soll. Ist ferner B, B' oder B'' ... negativ, so wird dadurch angezeigt, dafs kein reelles Bild zwischen die Linsen I., II. oder II., III. oder III., IV. fällt u. f. Ferner ist bekannt, dafs das Auge, um das ganze Gesichtsfeld zu übersehen, bei einem Systeme von n Gläsern in der Entfernung

$$\frac{a^{n-1} \cdot \omega^{n-1}}{a A A' A'' \ldots A^{n-3} \varphi}$$

hinter der letzten Linse stehen soll, und dafs daher dieser Ausdruck selbst positiv seyn mufs. Da endlich die Öffnungshalbmesser der Linsen wegen dem Gesichtsfelde immer gröfser seyn müssen, als die Öffnungshalbmesser wegen der Helligkeit, so hat man

$$\omega' > \frac{z}{B p'}, \quad \omega'' > \frac{z}{A' B B' p''}, \quad \omega''' > \frac{z}{A'' B B' B'' p'''}, \text{ etc.}$$

wo z den Öffnungshalbmesser des Objectivs bezeichnet: alles bekannte Bedingungen, welchen die Einrichtung eines jeden Fernrohrs unterliegt, und bei denen ich mich daher nicht weiter aufhalte.

* * *

Geht man nun zu der Anwendung der vorhergehenden allgemeinen Auflösung unseres Problemes, zu einigen speciellen Fällen über, und betrachtet man unter diesen zuerst die Fernröhre mit drei Linsen, so sey des gröfseren Gesichtsfeldes wegen $\omega'' = -\omega'$. Nimmt man auf den farbigen Rand keine Rücksicht, so hat man blofs die beiden ersten der Gleichungen (I.) und (II.), oder

$$m = B B' \quad \text{und} \quad \frac{A}{A+1} = -\frac{2(B+1)}{m-1}.$$

Läſst man also B unbestimmt, so ist

$$B' = \frac{m}{B} \quad \text{und} \quad A = -\frac{2(B+1)}{m+2B+1},$$

also geben die Gleichungen (III.)

$$p' = -\frac{2(B+1)\alpha}{(m-1)B}, \qquad \Delta = \frac{(B+1)\alpha}{B},$$

$$p'' = -\frac{2(B+1)\alpha}{m(m+2B+1)}, \quad \Delta' = -\frac{2(B+m)(B+1)\alpha}{mB(m+2B+1)}.$$

Ist B negativ, so fällt das einzige wahre Bild des Fernrohrs zwischen II. und III., und die Gleichung $\Delta = \left(\frac{1}{B}+1\right)\alpha$ zeigt, daſs das negative B zwischen die Grenzen 1 und α fallen muſs, und daſs der für die Ausübung vortheilhafteste Werth von $B=m$ ist.

Ist aber B positiv, so fällt das wahre Bild zwischen I. und II., und die letzten Gleichungen selbst zeigen, daſs $B>m$ seyn muſs.

Nimmt man aber auch auf den farbigen Rand Rücksicht, so geben die Gleichungen (I.) und (II.)

$$m = BB', \quad \frac{A}{A+1} = -\frac{2(B+1)}{m-1} \quad \text{und} \quad B'=1,$$

woraus folgt $B=m$ und $A = -\frac{2(m+1)}{3m+1}$, und daher nach den Gleichungen (III.)

$$p' = -\frac{2(m+1)\alpha}{m(m-1)}, \quad \Delta = \frac{(m+1)\alpha}{m},$$

$$p'' = -\frac{2(m+1)\alpha}{m(3m+1)}, \quad \Delta' = -\frac{4(m+1)\alpha}{m(3m+1)},$$

so daſs hier nur *eine* Bestimmung für jeden Werth von m Statt hat, während vorhin die Werthe von p', p'', Δ und Δ'' durch die willkürliche Annahme des Werthes von B noch mannigfaltig abgeändert werden können. Da endlich hier $B' = +1$ ist, so fällt das wahre Bild nie zwischen I. und II., was alles mit den Resultaten meines

vorhergehenden Aufsatzes über die astronomischen Oculare mit zwei Linsen vollkommen übereinstimmt, daher ich hier nicht weiter dabei verweile.

* * *

Gehen wir zu den Ocularen mit vier Linsen über, und nehmen wir an $\omega' = \theta\omega$, $\omega'' = \omega$ und $\omega''' = -\omega$, so ist $\varphi = \frac{(\theta - 2)\omega}{m + 1}$. Dieses vorausgesetzt, geben die Gleichungen (I.):

$$m = B B' B'' \quad \text{und} \quad 0 = B' B'' \theta + B'' - 1.$$

Läſst man also die Gröſse B' unbestimmt, so ist

$$B'' = \frac{1}{B'\theta + 1} \quad \text{und} \quad B = \frac{m(B'\theta + 1)}{B'},$$

und mit diesen Werthen von B und B'' geben die Gleichungen (II.):

$$A = \frac{(B' m\theta + B' + m)(\theta - 2)}{B' m\theta(3 - \theta) - m(\theta - 2) + 2B'} \quad \text{und}$$

$$A' = \frac{(B' m\theta + m - 1)(\theta - 2) + \theta(m + 1)}{(m + 1)(1 - \theta) - (B' m\theta + m - 1)(\theta - 2)}.$$

Substituirt man die gefundenen Werthe von A und B in den Gleichungen (III.), so erhält man die gesuchten Ausdrücke von p', p'', p''' und Δ, Δ', Δ'' für die Bestimmung des Oculars mit drei Linsen, und in diesen Ausdrücken wird man die Werthe der beiden unbestimmten Gröſsen θ und B, unter den oben angezeigten Beschränkungen, nach Willkür annehmen können, so daſs die Auflösung unserer Aufgabe eine in doppelter Beziehung unendliche Anzahl von Bestimmungen zuläſst.

Sucht man z. B. das gröſstmögliche Gesichtsfeld zu erhalten, so wird man $\theta = -1$ setzen, wodurch $\varphi = \frac{3\omega}{m+1}$ wird, und damit geben die Gleichungen (III.) für die Construction des Rohres folgende Ausdrücke:

$$p' = \frac{3(m - mB' + B')\alpha}{m(m+1)(1-B')} \text{ und } \Delta = \frac{(m - mB' + B')\alpha}{m(1-B')},$$

$$p'' = \frac{(3mB' + 2 - 4m)p'}{4mB' - 2B' - 3m} \quad » \quad \Delta' = \frac{3(1+B')\Delta}{4mB' - 2B' - 3m},$$

$$p''' = \frac{(m+1)(1-B')p'}{5m - 3mB' - 1} \quad » \quad \Delta'' = \frac{(2-B')(3mB + 2 - 4m)\Delta'}{(1+B')(5m - 3mB' - 1)}.$$

Soll B' positiv seyn, so zeigen diese Gleichungen, dafs man $B' > 2$ annehmen mufs, und dann ist B und B'' negativ, oder das einzige wahre Bild des Fernrohres fällt zwischen die IIte und IIIte Linse. Nimmt man z. B. für einen besonderen Fall $B = \frac{5}{2}$, so ist $B'' = -\frac{2}{3}$ und $B = -\frac{3m}{5}$, und die letzten Gleichungen geben für die Construction des gesuchten Oculars:

$$p' = \frac{(3m-5)\alpha}{m(m+1)}, \qquad \Delta = \frac{(3m-5)\alpha}{3m},$$

$$p'' = \frac{(3m-5)(7m+4)\alpha}{2m(m+1)(7m-5)}, \qquad \Delta' = \frac{7(3m-5)\alpha}{2m(7m-5)},$$

$$p''' = \frac{3(3m-5)(7m+4)\alpha}{2m(7m-5)(5m+2)}, \qquad \Delta'' = \frac{(3m-5)(7m+4)\alpha}{2m(7m-5)(5m+2)}.$$

So hat man für das specielle Exempel $\theta = -1$, $B' = \frac{5}{2}$, $m = 60$, $\alpha = 56.9$ und $\omega = \frac{1}{4}$

$$p' = 2.72, \quad \Delta = 55.32,$$
$$p'' = 1.39, \quad \Delta' = 1.40,$$
$$p''' = 0.84, \quad \Delta'' = 0.28,$$

und überdiefs nach den Gleichungen (IV.)

$$a' = -1.58,$$
$$\alpha' = 1.00,$$
$$a'' = 0.40,$$
$$\alpha'' = -0.56 \quad \text{und} \quad \varphi = 42.3 \text{ Minuten}.$$

Das Vorhergehende zeigt hinlänglich das Verfahren, welches man bei der Bestimmung eines jeden Oculars von drei oder vier Linsen zu beobachten hat, ein Verfahren, das nach der zu einem gegebenen Zwecke ange-

nommenen Wahl der Constanten des Problemes in blossen einfachen Substitutionen besteht, und daher keiner weiteren Erläuterung bedarf.

* * *

Wir gehen nun zu dem eigentlichen Gegenstande dieser Untersuchungen, zu den sogenannten *terrestrischen Ocularen von vier Linsen* über.

Nehmen wir zuerst an, daſs die zwei wahren Bilder des Fernrohrs von fünf Linsen zwischen II., III. und III., IV. fallen, oder daſs B' und B'' positiv, B und B''' aber negativ sind. Um ein groſses Gesichtsfeld zu erhalten, sey $\omega' = \frac{2\omega}{\sqrt{m}}$, $\omega'' = 0$ und $\omega''' = -\omega$, so wie $\omega'''' = +\omega$, so hat man

$$\varphi = \frac{2\omega}{m + \sqrt{m}}.$$

Dieses vorausgesetzt, geben die Gleichungen (I.), und die zweite der Gleichungen (II.)

$$m = B B' B'' B''',$$

$$0 = \frac{2}{\sqrt{m}} - \frac{1}{B' B''} + \frac{1}{B' B'' B'''},$$

$$0 = \frac{(B B' - 1)}{m + \sqrt{m}} + \frac{1}{\sqrt{m}}, \quad \text{woraus folgt}$$

$B B' = -\sqrt{m}$, $B'' B''' = -\sqrt{m}$ und $(2B' - 1) B'' = \sqrt{m}$.

Da $B''' = \frac{a'''}{a^{IV}}$ negativ seyn soll, so ist auch a''' negativ, und da $\Delta''' = a''' + a''''$ immer positiv seyn muſs, so ist $a'''' > a'''$, oder es ist $B'' < 1$, und daher, wie die letzten Gleichungen zeigen, $B'' > \sqrt{m}$ und $B' < 1$. Da ferner B'' positiv ist, so zeigt die Gleichung

$$(2B' - 1) B'' = \sqrt{m},$$

daſs $B' > \frac{1}{2}$ ist. Es fällt also B' zwischen die engen Grenzen $\frac{1}{2}$ und 1, und da $B = -\frac{\sqrt{m}}{B'}$ war, so fällt auch B zwischen die Grenzen $\sqrt{m}$ und $2\sqrt{m}$.

Nimmt man also für B das arithmetische Mittel der beiden letzten Werthe, oder ist $B = -\frac{3}{2}\sqrt{m}$, so erhält man $B' = \frac{2}{3}$, $B'' = 3\sqrt{m}$ und $B''' = -\frac{1}{3}$. Damit geben die Gleichungen (II.)

$$A = \frac{2 - 3\sqrt{m}}{5\sqrt{m}} \quad \text{und} \quad A'' = -\frac{2(1 + 3\sqrt{m})}{1 + 5\sqrt{m}},$$

wo die Gröſse A' unserer freien Bestimmung überlassen bleibt, da $\omega'' = 0$ ist.

Substituirt man diese Werthe von A und B in den Gleichungen (III.), und setzt man der Kürze wegen

$$P = 3\sqrt{m} - 2 \quad \text{und} \quad R = 3\sqrt{m} + 1,$$
$$Q = \sqrt{m} + 1 \quad \text{»} \quad S = 5\sqrt{m} + 1,$$

so erhält man für die gesuchte Bestimmung des Oculars die Ausdrücke:

$$p' = \frac{P \cdot a}{3Q\sqrt{m}} \quad \text{und} \quad \Delta = \frac{P \cdot a}{3\sqrt{m}},$$
$$p'' = \frac{PA' \cdot a}{5m(1 + A')} \quad \text{»} \quad \Delta' = \frac{P \cdot a}{3m},$$
$$p''' = \frac{2PRA' \cdot a}{15Qm\sqrt{m}} \quad \text{»} \quad \Delta'' = \frac{PRA' \cdot a}{15m\sqrt{m}},$$
$$p'''' = \frac{2PRA' \cdot a}{5Sm\sqrt{m}} \quad \text{»} \quad \Delta''' = \frac{4PRA' \cdot a}{15Sm\sqrt{m}}.$$

Für das halbe Gesichtsfeld hat man $\varphi = \frac{1719}{m + \sqrt{m}}$ Minuten, wenn $\omega = \frac{1}{4}$ ist; für den Ort des Auges aber hinter der fünften Linse $K = \frac{PQR \cdot A'a}{5m^2 S}$. Die willkürliche Gröſse A' kann so bestimmt werden, daſs z. B. $p'''' = 1$ Zoll ist. Der Öffnungshalbmesser wegen dem Gesichtsfelde und wegen der Helligkeit wird für jede Linse auf die bekannte Art bestimmt. Die oben gefundenen Ausdrücke sind übrigens identisch mit jenen, welche *Klügel* auf einem anderen weniger einfachen Wege findet.

Nehmen wir zweitens an, dafs die zwei wahren Bilder zwischen die Linsen I., II. und IV., V. fallen; eine Voraussetzung, die weder in *Klügel*, noch in den zahlreichen optischen Schriften *Euler's* u. a. gefunden wird, nach welcher aber wohl die Oculare *Fraunhofer's* gebaut sind. Dieser Annahme gemäfs ist also B und B''' positiv, B' und B'' aber negativ, und wenn a'', a''' positiv und a', a'' negativ ist, so mufs $B' < 1$ so wie $B'' < 1$ seyn. Ist ferner, wie zuvor, $\omega' = \omega'''' = \frac{1}{4}$, $\omega''' = -\frac{1}{4}$ und $\omega'' = 0$, so geben die Gleichungen (I.), und die zweite der Gleichungen (II.)

$$\left.\begin{array}{c} m = B B' B'' B''' \\ B B' = 2 - m \\ B'''(1 - B' B'') = 1 \end{array}\right\},$$

woraus man durch Elimination von B' und B'' erhält

$$1 + \frac{m}{B} = -\frac{m}{(m-2) B''}.$$

Da aber das negative $B'' < 1$ ist, so ist auch, wie die letzte Gleichung zeigt:

$$B < \frac{m(m-2)}{2}.$$

Ferner gibt die zweite jener Gleichungen

$$-B' = \frac{m-2}{B},$$

und da $B < \frac{1}{2} m (m-2)$ ist, so ist auch $-B' > \frac{2}{m}$, so dafs also das negative B' zwischen die Grenzen 1 und $\frac{2}{m}$ fallen mufs. Setzt man also $-B' = \frac{\theta}{m}$, wo θ zwischen 2 und m liegen wird, so erhält man mittelst der vorhergehenden Gleichungen

$$B = \frac{m(m-2)}{\theta}, \quad B' = -\frac{\theta}{m},$$

$$B'' = -\frac{m}{m+\theta-2} \quad \text{und} \quad B''' = \frac{m+\theta-2}{m-2}.$$

Mit diesen Werthen von B geben aber die Gleichungen (II.)

$$\frac{A}{A+1} = \frac{m(m-2)+\theta}{(m-1)\theta} \quad \text{und}$$

$$\frac{A''}{A''+1} = \frac{m(\theta-2)+4-2\theta}{(m-1)(m+\theta-2)}.$$

Substituirt man endlich die gefundenen Werthe von A, B . . . in den Gleichungen (III.), so erhält man für die gesuchte Construction des Oculars die Ausdrücke:

$$p' = \frac{Pa}{m(m-1)(m-2)} \quad \text{und} \quad \Delta = \frac{Pa}{m(m-2)},$$

$$p'' = -\frac{A'}{A'+1} \cdot \frac{Pa}{(m-2)Q} \quad » \quad \Delta' = \frac{Pa}{m(m-2)^2},$$

$$p''' = \frac{A'(\theta-2).Pa}{m(m-1)Q} \quad » \quad \Delta'' = \frac{A'(\theta-2).Pa}{m(m-2)Q},$$

$$p'''' = \frac{A'(\theta-2)(m-2).Pa}{QRm} \quad » \quad \Delta''' = \frac{A'(\theta-2)(2m-4+\theta)Pa}{QRm},$$

wo der Kürze wegen gesetzt wurde

$$P = m(m-2)+\theta,$$
$$Q = m(\theta-m+2)-2\theta,$$
$$R = (m+1)(m-2)+\theta.$$

Diese Ausdrücke geben daher wieder eine in doppelter Beziehung unendliche Anzahl von Auflösungen, da in ihnen die zwei Gröſsen θ und A' im Allgemeinen nach Willkür angenommen werden können. Die positive Gröſse θ muſs aber, dem Vorhergehenden gemäſs, zwischen den Grenzen 2 und m genommen werden, daher auch P und R positiv, Q aber negativ ist, wenn $\theta < m-2$ genommen wird, woraus zugleich folgt, daſs die negative Gröſse $A' > 1$ seyn muſs, damit die Werthe von Δ, Δ', Δ'' und Δ''' immer positiv werden, wie sie es ihrer Bedeutung nach seyn müssen.

Ist z. B. für einen besonderen Fall $\theta = 3$, $m = 60$ und $a = 60$ Zoll, so hat man $P = 3483$, $Q = -3306$

und $R = 3541$, also auch

$$p' = 1.0178, \qquad \Delta = 60.0517,$$
$$p'' = \frac{A'}{A'+1} \cdot 1.0899, \qquad \Delta' = 1.0354,$$
$$p''' = -A' \cdot 0.0179, \qquad \Delta'' = -A' \cdot 0.0182,$$
$$p'''' = -A' \cdot 0.0174, \qquad \Delta''' = -A' \cdot 0.0354.$$

Für das specielle Beispiel $A' = -2$ endlich ist

$$p' = 1.018, \qquad \Delta = 60.052,$$
$$p'' = 2.180, \qquad \Delta' = 1.035,$$
$$p''' = 0.036, \qquad \Delta'' = 0.036,$$
$$p'''' = 0.035, \qquad \Delta''' = 0.071.$$

Andere Werthe von θ und A' werden verschiedene zur Ausführung geeignete Einrichtungen dieses terrestrischen Oculares geben, von denen allen das halbe Gesichtsfeld $\varphi = \frac{859}{m-1}$ Minuten, und die Entfernung des Auges von der letzten Linse $K = \frac{A A' A''}{m}$ ist.

* * *

Allein die von *Fraunhofer* construirten Oculare von vier Linsen lassen sich durch die vorhergehenden Ausdrücke nicht darstellen. Um die analytischen Ausdrücke für diese letzten zu finden, wollen wir die genauen Abmessungen derselben zu Grunde legen, welche Hr. Regierungsrath *Prechtl* in seiner Dioptrik *) mitgetheilt hat. Man bemerkt ohne Mühe, daſs die acht von ihm gemessenen Oculare im Allgemeinen zu zwei verschiedenen Classen gehören, und daſs unter ihnen die folgenden Nro. II. Seite 210, Nro. III. Seite 211, Nro. IV. Seite 212, Nro. V. Seite 214, und Nro. VI. Seite 216, die beinahe durchaus die stärkeren Vergröſserungen ent-

*) Practische Dioptrik etc., von *J. J. Prechtl*. Wien 1828.

halten, nach einer und derselben Theorie construirt worden sind. Diese fünf erwähnten Oculare sind, mit den nöthigen Verbesserungen der Brennweiten der Objective, folgende:

m	$\frac{\alpha}{p}$	p'	p''	p'''	p''''	Δ'	Δ''	Δ'''	$\frac{p'}{p''}$	$\frac{p'}{p'''}$	$\frac{p'}{p''''}$	$\frac{\Delta'}{\Delta''}$	$\frac{\Delta'}{\Delta'''}$
70	44.43	1.22	1.49	1.70	0.94	1.81	2.79	1.43	0.82	0.71	1.30	0.65	1.26
66	58.61	1.71	2.09	2.38	1.31	2.55	3.92	2.01	0.82	0.72	1.30	0.65	1.26
60	56.56	1.82	2.23	2.55	1.40	2.72	4.19	2.15	0.82	0.71	1.30	0.65	1.26
42	31.15	1.45	1.78	2.02	1.11	2.16	3.32	1.71	0.82	0.71	1.30	0.65	1.26
26	20.22	1.56	1.91	2.18	1.20	2.33	3.58	1.84	0.82	0.71	1.30	0.65	1.26

Da für alle terrestrischen Oculare *Fraunhofer's* die zwei wahren Bilder zwischen die Linsen I., II. und IV., V. fallen, so müssen für sie die beiden Gröfsen B' und B'' negativ seyn. Sucht man aber diese Werthe von B' und B'' für die fünf Fälle der vorhergehenden Tafel, so findet man, dafs sie für alle eben so constant sind, wie die angeführten Verhältnisse der Brennweiten und der Distanzen der Linsen, und dafs man für diese Fernröhre hat $B' = -\frac{3}{10}$ und $B'' = -5$. Sucht man endlich aus den durch die Tafel gegebenen Elementen nach der bekannten Methode die Öffnungscoefficienten, so erhält man eben so übereinstimmend für alle fünf Fälle $\omega' = \frac{8}{10}\,\omega$, $\omega'' = \frac{3}{10}$, $\omega''' = -\omega$ und $\omega'''' = +\omega$.

Diese Öffnungsfactoren und die zwei Gröfsen B', B'' werden hinreichen, die Theorie der *Fraunhofer*'schen Oculare dieser Art zu entwickeln.

Zuerst geben die Gleichungen (I.)

$$\left.\begin{array}{c} m = B B' B'' B''' \quad \text{und} \\ 0 = \omega' + \dfrac{\omega''}{B'} + \dfrac{\omega'''}{B' B''} + \dfrac{\omega''''}{B' B'' B'''} \end{array}\right\},$$

von welchen die zweite die Bedingung des farbenlosen Randes enthält. Substituirt man in ihr die gefundenen Werthe von ω' und B' B'', so erhält man

$$B''' = \frac{10}{10 - 8 B' B'' - 3 B''},$$

und da es bekanntlich hinreichend ist, wenn man der Bedingung des farbenlosen Randes nur sehr nahe genug thut, so kann man $B''' = \frac{1}{2}$ annehmen, wodurch die letzte Gleichung mit einer hier mehr als hinlänglichen Genauigkeit dargestellt wird. Substituirt man dann die erhaltenen Werthe von $B' = -\frac{3}{10}$, $B'' = -5$ und $B''' = \frac{1}{2}$ in der ersten der vorhergehenden Gleichungen, oder in $m = B B' B'' B'''$, so erhält man $B = \dfrac{4m}{3}$.

Geht man jetzt zu den Gleichungen (II.) über, so hat man, wenn man die gefundenen Werthe von ω und B substituirt, da nach dem Vorhergehenden

$$\varphi = \frac{\omega'''' - \omega''' + \omega'' - \omega'}{m - 1} = \frac{15\,\omega}{10\,(m-1)} \quad \text{ist:}$$

$$\frac{A}{A + 1} = \frac{5\,(4m + 3)}{8\,(m - 1)}, \quad \text{also auch} \quad A = -\frac{5\,(4m + 3)}{12m + 23}.$$

$$\frac{A'}{A' + 1} = \frac{2m - 23}{3(m - 1)}, \quad \text{»} \quad \text{»} \quad A' = \frac{2m - 23}{m + 20}.$$

$$\frac{A''}{A'' + 1} = -\frac{(5m + 4)}{2\,(m - 1)} \quad \text{»} \quad \text{»} \quad A'' = -\frac{(5m + 4)}{7m + 2}.$$

Substituirt man endlich die erhaltenen Ausdrücke von A, B . . . in den Gleichungen (III.), so findet man

für die Construction der gegebenen Oculare *Fraunhofer's* folgende Gleichungen:

$$p' = \frac{15\,(4m+3)\,\alpha}{32\,m\,(m-1)} \quad \text{und} \quad \Delta = \frac{(4m+3)\,\alpha}{4m},$$

$$p'' = \frac{80\,(2m-23)\,p'}{9\,(12m+23)} \quad \text{»} \quad \Delta' = \frac{35\,\Delta}{12\,m+23},$$

$$p''' = \frac{3\,(5m+4)\,p''}{19\,(m+20)} \quad \text{»} \quad \Delta'' = \frac{8\,(2m-23)\,\Delta'}{7\,(m+20)},$$

$$p'''' = \frac{4\,(m-1)\,p'''}{7m+2} \quad \text{»} \quad \Delta''' = \frac{3\,(5m+4)\,\Delta''}{4\,(7m+2)}.$$

Setzt man für einen besonderen Fall $m = 70$, so geben die vorhergehenden Ausdrücke

$$p' = 0.02746\,\alpha \quad \text{und} \quad \Delta = 1.01071\,\alpha,$$
$$p'' = 0.03310\,\alpha \quad \text{»} \quad \Delta' = 0.04099\,\alpha,$$
$$p''' = 0.03906\,\alpha \quad \text{»} \quad \Delta'' = 0.06090\,\alpha,$$
$$p'''' = 0.02191\,\alpha \quad \text{»} \quad \Delta''' = 0.03286\,\alpha,$$

also auch die Verhältnisse

$$\frac{p'}{p''} = 0.83, \quad \frac{p'}{p'''} = 0.70, \quad \frac{p'}{p''''} = 1.3$$

$$\text{und} \quad \frac{\Delta'}{\Delta''} = 0.67, \quad \frac{\Delta'}{\Delta'''} = 1.25$$

nahe mit den Verhältnissen der vorhergehenden Tafel übereinstimmend. Eine nur sehr geringe Änderung der beiden Elemente B' und B'', oder der Öffnungshalbmesser würde hinreichen, die Übereinstimmung der Theorie mit den Abmessungen, wenn es nothwendig wäre, noch weiter zu treiben, vorausgesetzt, daſs man sich in den durch die vorhergehende Tafel gegebenen Abmessungen der Brennweiten und der Distanzen der Linsen noch bis auf die letzten Hunderttheile des Zolles versichert halten kann.

V.

Berechnung der Vortheile des Banquiers im Pharaospiele;

von

Gustav Adolph Greisinger,

Hauptmann im k. k. Ingénieurs-Corps.

Aufgabe.

A verpflichtet sich mit *B* unter folgenden Bedingungen zu spielen:

B nimmt ein Spiel von 52 Karten (wie das beim Whist gebräuchliche), und mischt es beliebig, zieht dann eine Karte nach der andern ab, und legt die ungeraden auf die eine, die geraden auf die andere Seite. *A* setzt eine Anzahl Gulden $= n$ auf eine beliebige Karte, z. B. auf die Dame (ohne Berücksichtigung der Farbe), welchen Satz er an *B* verliert, wenn die Dame als ungerade Karte, und von *B* gewinnt, wenn sie als gerade Karte erscheint. *B* behält sich aber vor, dafs ihm *A* die Hälfte des Satzes n zahlen müsse, wenn die Dame als gerade und ungerade in demselben Paare erscheint, dafs *A* das ganze Spiel von 52 Karten mit Beibehaltung des Satzes n auf der Dame durchspiele, und dafs endlich die letzte Karte (die auf der dem *A* günstigen Seite liegt) nichts gelte.

Auflösung.

Um uns diese zu erleichtern, wollen wir anfangs nur den aus den Doubletten (dem Erscheinen der Dame als ungerade und gerade in demselben Paare) für *B* entspringenden wahrscheinlichen Gewinn suchen.

Bedenken wir, dafs unter $2x$ Karten $1.2.3.4 \ldots . 2x$

verschiedene Permutationen gleich möglich sind, die nach der Stellung, welche die vier Damen darin behaupten, theils dem A, theils dem B, theils keinem von beiden Gewinn bringen, so müfsten wir, um unsere Aufgabe zu lösen, alle dem Banquier aus den einzelnen Permutationen entspringenden Gewinnste, getheilt durch $1.2.3.4....2x$, addiren, hievon die Summe aller dem A entspringenden Gewinnste, ebenfalls getheilt durch $1.2.3.4....2x$, abziehen, um so den wahrscheinlichen Gewinn des B bei einmaligem Durchspielen zu finden.

Mit andern Worten, wir müfsten die Summe aller Gewinnsterwartungen des A von jener des B (bei einmaligem Durchspielen) abziehen, der bejahende Unterschied gibt den wahrscheinlichen Gewinn des B.

So ungeheuer dieses Unternehmen auf den ersten Blick scheint, so wird es durch die Betrachtung ungemein vereinfacht, dafs nur die Stellungen der vier Damen überhaupt, nicht aber die Permutation derselben, noch jene der übrigen $2x-4$ Karten auf den Gang des Spiels, das ist auf Gewinn oder Verlust des A und B einen Einflufs übt. In Rücksicht auf *diesen* lassen sich sämmtliche Permutationen in neun Classen theilen, wovon drei dem A, fünf dem B, und eine keinem von beiden Gewinn bringen. Sie sind:

Zu Gunsten des A.

I^{te} Classe. Alle vier Damen als zweite Karten vierer Paare erscheinend. Gewinn des $A=n+n+n+n=4n$.

II^{te} Classe. Drei Damen als zweite Karten dreier Paare, die vierte aber als erste Karte eines Paares, nirgends zwei Damen in demselben Paare. Gewinn für $A =n+n+n-n=2n$.

III^{te} Classe. Zwei Damen als zweite Karten zweier Paare,

die beiden andern in einem Paare beisammen. Gewinn des $A = n + n - \frac{n}{2} = \frac{3n}{2}$.

Zu Gunsten des *B*.

IV^te^ Classe. Vier Damen als erste Karte vierer Paare. Gewinn des $B = n + n + n + n = 4n$.

Vte Classe. Drei Damen als erste Karten dreier Paare, die vierte als zweite Karte eines Paares, nirgends zwei Damen in demselben Paare. Gewinn des B

$$= n + n + n - n = 2n.$$

VI^ste^ Classe. Eine Dame als erste Karte eines Paares; die zweite als zweite Karte eines andern; die beiden übrigen in einem Paare beisammen. Gewinn des B $= n - n + \frac{n}{2} = \frac{n}{2}$.

VII^te^ Classe. Zwei Damen als erste Karten in zwei Paaren, die beiden andern in einem Paare beisammen. Gewinn des $B = n + n + \frac{n}{2} = \frac{5n}{2}$.

VIII^te^ Classe. Alle vier Damen in zwei Paaren. Gewinn des $B = \frac{n}{2} + \frac{n}{2} = n$.

Weder *A* noch *B* günstig.

IX^te^ Classe. Zwei Damen als erste Karten zweier Paare, die beiden andern als zweite Karten zweier andern Paare. Gewinn des $A = -n - n + n + n = 0$.
Gewinn des $B = +n + n - n - n = 0$.

* * *

Suchen wir nun zuvörderst, wie viel Permutationen in jeder dieser Classen enthalten sind, wenn wir auf die Permutation der vier Damen unter sich, und auf jene der übrigen $2x - 4$ Karten keine Rücksicht nehmen; dann geben ihre Anzahlen, mit

$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \times 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots\ldots 2x - 4$
multiplicirt, die Zahlen der in jeder Classe wirklich enthaltenen gleichmöglichen Stellungen der $2x$ Karten.

Iste Classe. Hier bilden die vier Damen in ihren verschiedenen Stellungen alle Combinationen zu vieren unter x Paaren. Diese Classe enthält folglich

$$\frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \text{ Stellungen.}$$

IIte Classe. Hier kann die vierte Dame x verschiedene Stellungen einnehmen, und bei jeder derselben können die übrigen drei Damen in allen Paaren, mit Ausnahme desjenigen, worin die erste sich befindet, also in $x - 1$ Paaren als Combinationen zu dreien erscheinen. Diese Classe enthält also

$$\frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \text{ Stellungen.}$$

IIIte Classe. Hier können zwei Damen in jedem der x Paare beisammen seyn, also x verschiedene Stellungen einnehmen; bei einer jeden derselben können die übrigen zwei Damen alle Combinationen zu zweien unter den übrigen $(x - 1)$ Paaren bilden. Diese Classe enthält folglich $\frac{x(x-1)(x-2)}{1 \cdot 2}$ Stellungen.

IVte Classe. Die Zahl der darin enthaltenen Stellungen ist gleich jener der Isten Classe $= \frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$.

Vte Classe. Die Zahl der darin enthaltenen Stellungen ist gleich jener der IIten Classe $= \frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$.

VIste Classe. Hier können die zwei in einem Paare befindlichen Damen x verschiedene Stellungen einnehmen, die dritte Dame kann bei jeder derselben $x - 1$ Mal, die vierte endlich bei jeder der hierdurch entstandenen Stellungen $x - 2$ Mal angebracht werden. Diese Classe enthält also $x(x-1)(x-2)$ Stellungen.

VII^te^ Classe. Die Zahl der in ihr enthaltenen Stellungen ist jener der III^ten^ Classe gleich $= \frac{x(x-1)(x-2)}{1 \cdot 2}$.

VIII^te^ Classe. Hier bilden die zwei Paare Damen alle Combinationen zu zweien unter x Paaren. Diese Classe enthält also $\frac{x(x-1)}{1 \cdot 2}$ Stellungen.

IX^te^ Classe. Hier bilden zwei Damen alle Combinationen zu zweien unter x Paaren, und bei jeder dieser Stellungen können die beiden andern Damen so oftmals angebracht werden, als Combinationen zu zweien unter den übrigen $x-2$ Paaren möglich sind. Diese Classe enthält also $\frac{x(x-1)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{(x-2)(x-3)}{1 \cdot 2}$ Stellungen.

Die Zahlen der in den neun Classen enthaltenen Stellungen, mit $1.2.3.4 \times 1.2.3.4 \ldots (2x-4)$ multiplicirt, geben die Zahlen der in jeder Classe enthaltenen gleichmöglichen Permutationen, deren Summe nothwendig $1.2.3.4 \ldots (2x-1)\, 2x$ seyn muſs. Wir erhalten so:

I^ste^ Classe. $\frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot 1.2.3.4 \times 1.2.3 \ldots 2x-4$
$= x(x-1)(x-2)(x-3) \cdot 1.2.3.4 \ldots 2x-4.$

II^te^ Classe. $\frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot 1.2.3.4 \times 1.2.3.4 \ldots 2x-4$
$= 4 \cdot x(x-1)(x-2)(x-3) . 1.2.3.4 \ldots 2x-4.$

III^te^ Classe. $= \frac{x(x-1)(x-2)}{1 \cdot 2} \cdot 1.2.3.4 \times 1.2.3.4 \ldots 2x-4$
$= 3.4 . x(x-1)(x-2) . 1.2.3.4 \ldots 2x-4.$

IV^te^ Classe. $= x(x-1)(x-2)(x-3) . 1.2.3.4 \ldots 2x-4.$

Vte Classe. $= 4x(x-1)(x-2)(x-3) . 1.2.3.4 \ldots 2x-4.$

VI^ste^ Classe $= 1.2.3.4 . x(x-1)(x-2) . 1.2.3.4 \ldots 2x-4.$

VII^te^ Classe. $= 3.4 . x(x-1)(x-2) . 1.2.3.4 \ldots 2x-4.$

VIII^te^ Classe. $= \frac{x(x-1)}{1 \cdot 2} \cdot 1.2.3.4 \times 1.2.3.4 \ldots 2x-4$
$= 3.4 . x(x-1) . 1.2.3.4 \ldots 2x-4.$

IX^te^ Classe. $= \frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{1.2.1.2} .1.2.3.4 \times 1.2.3.4....2x-4$

$= 1.2.3.x(x-1)(x-2)(x-3).1.2.3.4...2x-4.$

Die Summe aller dieser Ausdrücke ist offenbar:

$$[16x(x-1)(x-2)(x-3)+48x(x-1)(x-2)+12x(x-1)]1.2.3..2x-4$$
$$= (16x^4 - 48x^3 + 44x^2 - 12x).1.2.3.4....2x-4$$
$$= (4x^3 - 12x^2 + 11x - 3).2.1.2.3.4....2x-4.2x$$
$$= (x-1)(2x-1)(2x-3).2.1.2.3.4....(2x-4)2x$$
$$= 1.2.3.4.5....(2x-4)(2x-3)(2x-2)(2x-1)2x,$$

wie es seyn muſs.

Multipliciren wir nun die Zahlen der in den ersten drei Classen enthaltenen Permutationen mit dem aus jeder derselben für *A* entspringenden Gewinne, addiren alle diese Producte, und theilen diese Summe durch

$$1.2.3.4....2x,$$

so ist dieſs die Summe aller Gewinnsterwartungen des *A*, so wie dasselbe Verfahren mit den übrigen fünf Classen (die letzte hat keinen Einfluſs) die Summe aller Gewinnsterwartungen des *B* gibt.

Die erstere von letzterer abgezogen gibt uns endlich den wahrscheinlichen Gewinn des *B* bei einmaligem Durchspielen des Spiels.

Für *A* erhalten wir so:

$$\frac{x(x-1)(x-2)(x-3).1.2.3.4....2x-4 \times 4n}{1.2.3.4....2x}$$
$$+ \frac{4x(x-1)(x-2)(x-3).1.2.3.4....2x-4 \times 2n}{1.2.3.4....2x}$$
$$+ \frac{3.4.x(x-1)(x-2).1.2.3.4....2x-4 \times \frac{2}{3}n}{1.2.3.4....2x}.$$

Für *B* erhalten wir:

$$\frac{x(x-1)(x-2)(x-3).1.2.3.4\ldots.2x-4\times 4n}{1.2.3.4\ldots.2x}$$

$$+\frac{4x(x-1)(x-2)(x-3).1.2.3.4\ldots.2x-4\times 2n}{1.2.3.4\ldots.2x}$$

$$+\frac{1.2.3.4.x(x-1)(x-2).1.2.3.4\ldots.2x-4\times\frac{1}{2}n}{1.2.3.4\ldots.2x}$$

$$+\frac{3.4.x(x-1)(x-2).1.2.3.4\ldots.2x-4\times\frac{5}{2}n}{1.2.3.4\ldots.2x}$$

$$+\frac{3.4.x(x-1).1.2.3.4\ldots.2x-4\times n}{1.2.3.4\ldots.2x}.$$

Bei Vergleichung der beiden Summen findet sich ihr Unterschied:

$$=\frac{1.2.3.4.n\times 1.2.3\ldots.2x-4\times x(x-1)(x-2)}{1.2.3.4\ldots.2x}$$

$$+\frac{3.4.n.1.2.3.4\ldots.2x-4.(x-1)x}{1.2.3.4\ldots.2x}$$

$$=\frac{2.1.2.3.4.n.1.2.3.4\ldots.2x-4.x(x-1)(x-2)}{2.1.2.3.4\ldots.2x}$$

$$+\frac{1.2.3.4.n.1.2.3.4\ldots.2x-4.(x-1)x}{2.1.2.3.4\ldots.2x}$$

$$=\frac{n(2.(x-2)+1)\,1.2.3.4\ldots.2x-4.x(x-1)}{1.2.1.2.3.4\ldots.2x}$$

$$=\frac{n.(2x-3)\,1.2.3.4\ldots.2x-4.x(x-1)}{1.2.1.2.3.4\ldots.2x}$$

$$=\frac{3n.1.2.3.4.(2x-4)(2x-3)(2x-2)\,2x}{1.2.3.4\ldots.2x}=\frac{3n}{2x-1}.$$

So reducirt sich die ganze Rechnung auf einen höchst einfachen Ausdruck, und man sieht leicht, dafs der Geübtere durch Hinweglassung der Isten, IIten, IVten, Vten und IXten Classe, die sich offenbar tilgen mufsten, so wie durch Unterdrückung des Factors

$$1.2.3.4\ldots.2x-4$$

im Zähler und Nenner sämmtlicher Producte sie sehr vereinfachen konnte.

Was den Vortheil des B durch das Nichtgelten der letzten Karte anbelangt, so entspringt dieser nur aus jenen Permutationen, in welchen eine Dame als letzte Karte erscheint. So oft diefs der Fall ist, und die vorletzte Karte dabei keine Dame ist, gewinnt B augenscheinlich n; oder vielmehr A erhält n nicht, welches ihm doch, wenn die letzte Karte gälte, gehörte. Ist aber gleichzeitig auch die vorletzte Karte eine Dame, so gewinnt B offenbar $\frac{n}{2}$; denn gälte die letzte Karte, so entstünde eine Doublette, und B gewänne nur $\frac{n}{2}$, während er jetzt n gewinnt. Die Zahl der Permutationen, bei denen die beiden letzten Karten Damen sind, findet sich leicht $= 3 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots\ldots 2x - 2$, und der hieraus für B entspringende wahrscheinliche Gewinn durch die letzte Karte

$$= \frac{3 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots\ldots 2x-2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots\ldots 2x} \cdot \frac{n}{2} = \frac{6n}{(2x-1)\,2x} = \frac{3n}{x(2x-1)}.$$

Eben so leicht findet man die Zahl der Permutationen, bei denen die letzte Karte eine Dame, die vorletzte aber keine ist $= 4 \cdot (2x-4)\, 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot (2x-2)$, und hieraus entspringt dem B der wahrscheinliche Gewinn

$$= \frac{4n\,(2x-4) \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots\ldots 2x-2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots\ldots 2x}$$

$$= \frac{4n\,(2x-4)}{(2x-1)\,2x} = \frac{2n\,(2x-4)}{x\,(2x-1)}.$$

Durch das Nichtgelten der letzten Karte erwächst also dem B ein wahrscheinlicher Gewinn

$$= \frac{3n}{x\,(2x-1)} + \frac{2n\,(2x-4)}{x\,(2x-1)} = \frac{(4x-5)\,n}{x(2x-1)}.$$

Addirt man hiezu den früher gefundenen, dem B aus den Doubletten entspringenden wahrscheinlichen Gewinn $= \frac{3n}{2x-1}$, so erhalten wir

$$\frac{(4x-5)n}{x(2x-1)} + \frac{3n}{2x-1} = \frac{(4x-5)n+3nx}{x(2x-1)} = \frac{(7x-5)n}{x(2x-1)}$$

als den gesammten wahrscheinlichen Gewinn des Banquiers bei einmaligem Durchspielen des Spiels unter den angeführten Bedingungen. Setzen wir nunmehr $x = 26$, so wird dieser Gewinn

$$= \frac{(182-5)n}{26 \cdot 51} = \frac{177\,n}{1326} = (0.1334\ldots.)\,n$$

über 13 $^1/_3$ Procent des Satzes.

Herr *Brunacci* hat im ersten Theile seines vortrefflichen Werkes: *Corso di matematica sublime. Tomo I°. Firenze* 1804, Seite 279—291, die so eben abgehandelte Aufgabe, genau unter denselben Bedingungen wie wir, mittelst der Differenzrechnung gelöst. Allein es ist zu bedauern, dafs dieser grofse Mathematiker nicht vorsichtig genug zu Werke gegangen ist. Er verliert im Verfolge seiner Behandlung aus den Augen, was er eigentlich sucht, und gelangt so zu einem Resultate von 15 $^1/_2$ Procent circa. Er würde das Doppelte unseres Resultates, nämlich 26,69 .... Procente gefunden haben, wenn er nicht bei dem Übergange von der gefundenen Formel zu Zahlen einen neuen Fehlschlufs gemacht hätte, der die Folgen seines früheren Irrthumes etwas mildert. Das Fehlerhafte in dem Verfahren des Herrn *Brunacci* ist es, was mich veranlafste, die Auflösung unsers Problems auf dem directesten Wege zu suchen, der uns zu dem Resultate von 13 $^1/_3$ Procent führte.

Da übrigens die Art, wie Hr. *Brunacci* die Differenzrechnung zur Auflösung unserer Aufgabe verwendet, äufserst sinnreich, und eines so grofsen Mathematikers würdig ist, so will ich sie in dem Folgenden, unter Vermeidung seines Irrthums, anwenden, und wir werden dann unfehlbar unser bereits gefundenes Resultat wieder finden.

Herr *Brunacci* löst die Aufgabe anfangs ebenfalls nur in Rücksicht auf die Doubletten, und berechnet erst nachträglich den aus der letzten Karte entspringenden Vortheil des *B*. In diesem letztern Theile der Rechnung stimmt er ganz mit uns überein. Seine Methode zur Bestimmung des aus den Doubletten entspringenden wahrscheinlichen Gewinns des *B* besteht im Wesentlichen darin, daſs er die Summe der Gewinnsterwartungen des *B*, und jene des *A* in zwei Theile spaltet, deren einer aus dem ersten Kartenpaare, der andere aber aus den übrigen $x - 1$ Paaren entspringt, wodurch er zu Differenzgleichungen gelangt, deren Integrirung keiner Schwierigkeit unterliegt. Der Unterschied der beiden Summen gibt dann den wahrscheinlichen Gewinn des *B*.

Wir werden das Verfahren des Hrn. *Brunacci* dadurch noch vereinfachen, da wir gleich unmittelbar diesen Unterschied der Summen der Gewinnsterwartungen des *A* und *B* als Functionen von x suchen, indem wir übrigens auch wieder vorläufig nur den aus den Doubletten entspringenden Gewinn des *B* berücksichtigen. Hiezu wird es aber nöthig (was auch Hr. *Brunacci* thut), die Aufgabe erst für eine, dann für zwei, für drei, und endlich für vier Damen unter $2x$ Karten zu lösen, wie man sich aus dem Verfolge der Auflösung überzeugen wird.

Nennen wir die Wahrscheinlichkeit, daſs im ersten Paare sich keine Dame befindet, bei einer, zwei, drei, vier Damen unter $2x$ Karten . . P'_1, P'_2, P'_3, P'_4;

jene, daſs im ersten Paare sich eine dem *B* günstige Dame befindet, wie oben . . . . P''_1, P''_2, P''_3, P''_4;

jene, daſs im ersten Paare sich eine dem *A* günstige Dame befindet, wie oben . . . . . . P'''_1, P'''_2, P'''_3, P'''_4;

jene endlich, daſs im ersten Paare sich zwei Damen befinden, wie oben . . . . P_1'''', P_2'''', P_3'''', P_4'''';

ferner den wahrscheinlichen Gewinn des B
für eine Dame unter $2x$ Karten . . . . $F^1 x$,
für zwei Damen unter $2x$ Karten . . . . . . $F^2 x$,
für drei Damen unter $2x$ Karten . . . . . . $F^3 x$,
für vier Damen unter $2x$ Karten . . . . . . $F^4 x$:

so wird

I. für eine Dame unter $2x$ Karten:

$$P_1' = \frac{x-1}{x} \,.\; P_1'' = \frac{1}{2x} \,.\; P_1''' = \frac{1}{2x} \,.\; P_1'''' = 0 \,.\; F^1 x = 0.$$

II. Für zwei Damen unter $2x$ Karten:

$$P_2' = \frac{(x-1)(2x-3)}{x(2x-1)} \,.\; P_2'' = \frac{(2x-2)}{x(2x-1)} \,.\; P_2''' = \frac{(2x-2)}{x(2x-1)}$$

$$P_2'''' = \frac{1}{x(2x-1)}.$$

Um aber F_x'', den Unterschied der Summen der Gewinnsterwartungen des A und B zu bestimmen, oder welches eben so viel ist, die Summe sämmtlicher Gewinnsterwartungen des A und B, die erstere verneinend genommen, theilen wir diese in vier Classen, je nachdem in dem ersten Paare keine Dame, eine dem A günstige, eine dem B günstige, oder endlich zwei Damen sich befinden. So enthält die erste dieser Classen, deren Wahrscheinlichkeit $P_2' = \frac{(x-1)(2x-3)}{x(2x-1)}$ ist, offenbar

$$\frac{(x-1)(2x-3)}{x(2x-1)} \left[0 + F_{x-1}^2\right].$$

Die zweite Classe aber, deren Wahrscheinlichkeit $P_2'' = \frac{(2x-2)}{x(2x-1)}$ ist, enthält

$$\frac{(2x-2)}{x(2x-1)} \left[n + F_{x-1}^1\right] = \frac{(2x-2)\,n}{x(2x-1)}, \text{ weil } F_{x-1}^1 = 0 \text{ ist.}$$

Die dritte Classe, deren Wahrscheinlichkeit

$P'''_2 = \frac{2x-2}{x(2x-1)}$, enthält

$$\frac{2x-2}{x(2x-1)}\left[-n + F^1_{x-1}\right] = -\frac{(2x-2)n}{x(2x-1)},$$

weil wieder $F^1_{x-1} = 0$ ist.

Die vierte Classe endlich, deren Wahrscheinlichkeit $P''''_2 = \frac{1}{x(2x-1)}$, enthält

$$\frac{1}{x(2x-1)}\left[\frac{n}{2} + F^1_{x-1}\right] = \frac{n}{2x(2x-1)}, \text{ da } F^1_{x-1} = 0.$$

Alle vier Classen, mit ihren Zeichen addirt, geben

$$F^2_x = \frac{(x-1)(2x-3)}{x(2x-1)} \cdot F^2_{x-1} + \frac{n}{2x(2x-1)}.$$

Um hieraus F^2_x zu finden, multipliciren wir die Gleichung mit $x(2x-1)$, und erhalten

$$x(2x-1)F^2_x = (x-1)(2x-3)F^2_{x-1} + \frac{n}{2};$$

setzen dann $x(2x-1)F^2_x = p_x$, so wird

$$F^2_x = \frac{p_x}{x(2x-1)} \text{ und } F^2_{x-1} = \frac{p_{x-1}}{(x-1)(2x-3)},$$

also auch $p_x = p_{x-1} + \frac{n}{2}$; ferner auch $p_{x+1} = p_x + \frac{n}{2}$, endlich Δ (Differenz) $p_x = \frac{n}{2}$, und wenn wir integriren

$p_x = \Sigma\frac{n}{2} = \frac{nx}{2} + Const.$ Allein für $x = 0$ wird

$$F^2_x = 0, \text{ also auch } C = 0, \; p_x = \frac{nx}{2} \text{ und}$$

$$F^2_x = \frac{nx}{2x(2x-1)} = \frac{n}{2(2x-1)}.$$

III. Für drei Damen unter $2x$ Karten.

Hier wird $P'_3 = \frac{(x-2)(2x-3)}{x(2x-1)}$, $P''_3 = \frac{(2x-3)3}{x(2x-1)}$,

$$P'''_3 = \frac{(2x-3)3}{x(2x-1)} \text{ und } P''''_3 = \frac{3}{x(2x-1)}.$$

Nun entspringen dem B aus den vier obigen Classen:

aus der I^sten $\frac{(x-2)(2x-3)}{x(2x-1)}\left[0+F^3_{x-1}\right]$,

aus der II^ten $\frac{(2x-3)3}{2x(2x-1)}\left[n+F^2_{x-1}\right]$,

aus der III^ten $\frac{(2x-3)3}{2x(2x-1)}\left[-n+F^2_{x-1}\right]$,

aus der IV^ten $\frac{3}{x(2x-1)}\left[\frac{n}{2}+F^1_{x-1}\right]$. Also wird

$$F^3_x=\frac{(x-2)(2x-3)}{x(2x-1)}F^3_{x-1}+\frac{(2x-3)3}{x(2x-1)}F^2_{x-1}+\frac{3n}{2x(2x-1)},$$

weil $F^1_{x-1}=0$.

Es ist aber, wie wir fanden,

$$F^2_x=\frac{n}{2(2x-1)},\quad \text{also}\quad F^2_{x-1}=\frac{n}{2(2x-3)},$$

mithin $F^3_x=\frac{(x-2)(2x-3)}{x(2x-1)}F^3_{x-1}+\frac{3n}{x(2x-1)}$.

Multipliciren wir mit $x(2x-1)$, so wird

$$x(2x-1)F^3_x=(x-2)(2x-3)F^3_{x-1}+3n,$$

und wenn wir $x(2x-1)F^3_x=q_x$, also $F^3_x=\frac{q_x}{x(2x-1)}$ setzen, wodurch $F^3_{x-1}=\frac{q_{x-1}}{(x-1)(2x-3)}$ wird, folgt

$$q_x=\frac{x-2}{x-1}q_{x-1}+3n.$$

Abermals mit $(x-1)$ multiplicirt, wird

$$(x-1)q_x=(x-2)q_{x-1}+3n(x-1)$$

und $(x-1)q_x=r_x$ gesetzt,

wodurch $q_x=\frac{r_x}{x-1}$ und $q_{x-1}=\frac{r_{x-1}}{x-2}$ wird, erhalten wir

$$r_x=r_{x-1}+3n(x-1),\quad r_{x+1}=r_x+3nx$$

oder $\Delta r_x=3nx$.

Endlich wird $r_x=\Sigma 3nx$, oder weil

$$\Sigma x=\frac{x(x-1)}{2}+C,\quad r_x=\frac{3nx(x-1)}{2}+C,$$

$$q_x = \frac{3nx}{2} + \frac{C}{x-1} \quad \text{und}$$

$$F^3_x = \frac{\frac{3nx}{2} + \frac{C}{x-1}}{x(2x-1)} = \frac{3n}{2(2x-1)} + C,$$

wobei jedoch C wieder $=0$ gefunden wird.

IV. Für vier Damen unter $2x$ Karten.

Hier wird $P'_4 = \frac{(x-2)(2x-5)}{x(2x-1)}$, $P''_4 = \frac{(2x-4)\,2}{x(2x-1)}$,

$$P'''_4 = \frac{(2x-4)\,2}{x(2x-1)} \quad \text{und} \quad P''''_4 = \frac{C}{x(2x-1)}.$$

Nun entspringen für B aus den obigen vier Classen:

aus der I^sten $\frac{(x-2)(2x-5)}{x(2x-1)}\left[0 + F^4_{x-1}\right]$,

aus der II^ten $\frac{(2x-4)\,2}{x(2x-1)}\left[n + F^3_{x-1}\right]$,

aus der III^ten $\frac{(2x-4)\,2}{x(2x-1)}\left[-n + F^3_{x-1}\right]$,

aus der IV^ten $\frac{C}{x(2x-1)}\left[\frac{n}{2} + F^2_{x-1}\right]$. Also wird

$$F^4_x = \frac{(x-2)(2x-5)}{x(2x-1)} F^4_{x-1} + \frac{(2x-4)\,4}{x(2x-1)} F^3_{x-1}$$
$$+ \frac{3n}{x(2x-1)} + \frac{6}{x(2x-1)} F^2_{x-1}.$$

Es ist aber, wie wir früher fanden,

$$F^3_x = \frac{3n}{2(2x-1)}, \quad \text{also} \quad F^3_{x-1} = \frac{3n}{2(2x-3)},$$

$$F^2_x = \frac{n}{2(2x-1)}, \qquad F^2_{x-1} = \frac{n}{2(2x-1)},$$

mithin $F^4_x = \frac{(x-2)(2x-5)}{x(2x-1)} F^4_{x-1}$

$$+ \frac{(2x-4)\,4 \cdot 3n}{x(2x-1)(2x-3)} + \frac{3n}{x(2x-1)} + \frac{6n}{2x(2x-1)(2x-3)}$$

oder $F^4_x = \frac{(x-2)(2x-5)}{x(2x-1)} F^4_{x-1} + \frac{(18x-30)}{x(2x-1)(2x-3)}$,

also auch

$$x(2x-1)\ F^4_x = (x-2)(2x-5)\ F^4_{x-1} + \frac{(18x-30)n}{2x-3}.$$

Setzen wir nun $x(2x-1)\ F^4_x = s_x$, also

$$F^4_x = \frac{s_x}{x(2x-1)}\quad F^4_{x-1} = \frac{s_{x-1}}{(x-1)(2x-3)},\ \text{so wird}$$

$$s_x = \frac{(x-2)(2x-5)}{(x-1)(2x-3)}\ s_{x-1} + \frac{(18x-30)n}{2x-3},$$

und mit $(x-1)(2x-3)$ multiplicirt:

$$(x-1)(2x-3)\ s_x = (x-2)(2x-5)\ s_{x-1} + (18x-30)(x-1)n.$$

Und setzen wir

$$(x-1)(2x-3)\ s_x = t_x \quad \text{oder} \quad s_x = \frac{t_x}{(x-1)(2x-3)},$$

wodurch $s_{x-1} = \dfrac{t_{x-1}}{(x-2)(2x-5)}$ wird, so folgt

$$t_x = t_{x-1} + (18x-30)(x-1)n,$$

$$\text{und}\quad t_{x+1} = t_x + (18x^2-12x)n,\ \text{oder}$$

$\Delta t_x = (18x^2-12x)n$ und $t_x = \Sigma(18x^2-12x)n + C.$

Allein

$\Sigma x^2 = \dfrac{x(x-1)(2x-1)}{1\ .\ 2\ .\ 3}$, also $\Sigma\, 18x^2 = 3x(x-1)(2x-1)$,

und $\Sigma x = \dfrac{x(x-1)}{1\ .\ 2}$, also $\Sigma\, 12x = 6x(x-1)$, folglich

$$t_x = [3x(x-1)(2x-1) - 6x(x-1)]\ n + C,$$

$$s_x = \frac{t_x}{(x-1)(2x-3)} = n\left[\frac{3x(2x-1)}{2x-3} - \frac{6x}{2x-3}\right] + \frac{C}{(x-1)(2x-3)}$$

und

$$F^4_x = \frac{s\,.\,x}{x(2x-1)} = \frac{2x-3}{3n} - \frac{6n}{(2x-1)(2x-3)} + \frac{C}{x(x-1)(2x-1)(2x-3)}$$

wobei abermals $C = 0$ ist. Also wird

$$F^4_x = \frac{3n}{2x-3} - \frac{6n}{(2x-1)(2x-3)} = \frac{(6x-3)n-6n}{(2x-1)(2x-3)}$$

$$= \frac{(6x-9)n}{(2x-1)(2x-3)} = \frac{3n}{2x-1}.$$

Dasselbe Resultat, welches wir früher auf directem Wege fanden, und zu dem noch der aus der letzten Karte

entspringende wahrscheinliche Gewinn des B zu addiren kommt, den Hr. *Brunacci*, so wie wir $\frac{(4x-5)n}{x(2x-1)}$ findet.

Die genaue Prüfung der Bedingungen unserer Aufgabe hat mich auf ein drittes Verfahren geführt, den gesammten dem Banquier aus den Doubletten sowohl als aus dem Nichtgelten der letzten Karte entspringenden Vortheil zu herechnen, das ich seiner ungemeinen Kürze halber hier mittheile.

Stellen wir uns nämlich vor, statt des Spielers A habe eine Gesellschaft von x Spielern die Verbindlichkeiten und Vortheile desselben so übernommen, dafs der erste für die Ereignisse des ersten Paares, der zweite für jene des zweiten Paares etc., der x^{te} endlich für jene des x^{ten} Paares allein haftet. Der wahrscheinliche Verlust eines jeden der $x-1$ Spieler (den x^{ten} abgerechnet) entspringt augenscheinlich nur aus der Möglichkeit des Eintreffens einer Doublette in dem ihm zugetheilten Paare, in welchem Falle er $\frac{n}{2}$ verliert. Die Wahrscheinlichkeit dieses Ereignisses ist

$$p_4'''' = \frac{6}{x(2x-1)},$$

und der damit verbundene wahrscheinliche Verlust eines jeden der $x-1$ Spieler

$$\frac{6}{x(2x-1)} \cdot \frac{n}{2} = \frac{3n}{x(2x-1)}.$$

Anders verhält es sich mit dem x^{ten} Spieler; er kann *nie* etwas gewinnen, und verliert jedel Mal n Gulden, so oft die vorletzte Karte eine Dame ist. Die Wahrscheinlichkeit dieses Ereignisses ist offenbar $\frac{4}{2x} = \frac{2}{x}$, mithin der wahrscheinliche Verlust des x^{ten} Spielers $\frac{2n}{x}$.

Der wahrscheinliche Verlust aller x Spieler aber, oder

jener des A, wird demnach

$$= \frac{3n(x-1)}{x(2x-1)} + \frac{2n}{x} = \frac{3nx - 3n + 4nx - 2n}{x(2x-1)} = \frac{(7x-5)n}{x(2x-1)},$$

und eben so groſs ist auch der wahrscheinliche Gewinn des B bei einmaligem Durchspielen des Spieles.

Es scheint unmöglich eine einfachere, und dennoch vollkommen befriedigende Auflösung dieses Problems zu finden.

Herr *Brunacci* schlieſst aus seinem Resultate, von $15\frac{1}{2}$ Procent circa, auf den wahrscheinlichen Vortheil des Banquiers im Pharaospiele. Allein, so viel mir bekannt, sind die Bedingungen desselben nicht *ganz* die voraus angenommenen. Der Spieler ist nämlich nicht verbunden, das Spiel ganz durchzuspielen, sondern darf sich zurückziehen, sobald nach dem Schlusse eines Paares die von ihm gespielte Karte bereits *wenigstens ein Mal* erschienen ist, er wird sich also unfehlbar vor dem letzten Paare retiriren, und selbst vor dem vorletzten, wenn in den beiden letzten Paaren drei Damen enthalten sind, während die letzte Karte (die dem Spieler gezeigt wird) keine Dame ist. So kann der Banquier nicht einmal auf den ganzen aus den Doubletten entspringenden wahrscheinlichen Gewinn $= \frac{3n}{2x-1}$ rechnen, da ihm der aus den Stellungen, worin die zwei letzten, und aus jenen, worin die drei vorletzten Karten Damen sind, entspringende Doublettengewinn $\frac{n}{2}$ des letzten oder vorletzten Paares entgeht.

Die Wahrscheinlichkeit, daſs im letzten Paare zwei Damen sind, findet sich leicht $= \frac{6}{x(2x-1)}$, und der daraus entspringende Doublettengewinn $= \frac{3n}{x(2x-1)}$. Jene aber, daſs die drei vorletzten Karten Damen sind,

während die letzte keine ist $= \frac{6(2x-4)}{x(x-1)(2x-1)(2x-3)}$,
und der hieraus entspringende Doublettengewinn

$$= \frac{3(2x-4)n}{x(x-1)(2x-1)(2x-3)}.$$

So bleibt dem Banquier nur der wahrscheinliche Gewinn

$$\frac{3n}{2x-1} - \frac{3n}{x(2x-1)} - \frac{3(2x-4)n}{x(x-1)(2x-1)(2x-3)}.$$

Setzen wir wieder $x = 26$, so erhalten wir

$$\frac{12}{17} - \frac{3n}{26 \times 51} - \frac{144n}{26 \times 25 \times 51 \times 49} = \frac{31850n - 1225n - 48n}{541450}$$

$$= \frac{30577 \cdot n}{541450} = (0{,}0565)\,n \text{ circa} = 5\tfrac{13}{20} \text{ Procent circa.}$$

Allein auch dieser Vortheil ist schon bedeutend genug. Setzen wir z. B., daſs die Bank jeden Abend nur vier Stunden spielt, und in jeder Stunde vier Spiele macht, bei deren jedem nur mit 30 Dukaten-Sätzen durchgespielt wird, so beträgt die Summe aller anfänglichen Sätze, in einem Jahre von 365 Tagen,
$16 \times 30 \times 365 = 175200$ Dukaten, und der wahrscheinliche Gewinn des Banquiers in diesem Zeitraume

$$= \frac{175200{,}565}{10000} = \frac{1752 \times 565}{100} = \frac{1752 \times 113}{20} = \frac{438 \times 113}{5}$$

$= 9898\frac{4}{5}$ Dukaten circa. Und diese Voraussetzungen dürften für eine gröſsere Spielbank noch sehr gemäſsigt seyn, wenn man bedenkt, daſs viele Spieler, vom Gange des Spiels erhitzt, durch Paroli etc. etc. die ursprünglichen Sätze noch erhöhen. *E pure si trova, chè va a scomettere contro il Banchière! Questo e una riprova che i goffi sono il patrimonio dei farbi!* So schlieſst Herr *Brunacci* seine Abhandlung, und *hierin* stimme ich ihm vollkommen bei.

VI.

Fortschritte der Physik in der neuesten Zeit.

A. Neue und verbesserte physikalische Instrumente.

1. *Bellani's* Thermo-Barometer.

(Giornale di Fisica etc. 1827. Serto Bim. p. 455)

Dieses Instrument, welches zugleich Thermometer und Barometer ist, wird durch Fig. 12 und 13 vorgestellt, und zwar durch Fig. 12 in der Lage, wo es als Barometer, durch Fig. 13 in derjenigen, wo es als Thermometer dient. Es ist im Allgemeinen ein Heberbarometer nach *Gay-Lussac's* Einrichtung, wo die zwei weiteren Röhren *A* und *BD* durch eine engere verbunden sind; nur empfiehlt *Bellani* die Verbindungsröhre dieser zwei Theile selbst aus zwei Stücken von ungleicher Weite zu verfertigen, und zwar das weitere Stück *X* unmittelbar an *A* anzuschmelzen, und es bis zu der Stelle reichen zu lassen, wo der Einbug angebracht ist, hier aber ein Thermometerrohr *C* anzubringen, mittelst welchem *X* und *BD* verbunden sind. *X* soll 2 — 3 Millimeter weit seyn.

Die zwei Scalen, nahe an *BD* und *A* angebracht, dienen wie die an gewöhnlichen Heberbarometern zum Messen des Luftdruckes, die dritte an *C* hingegen ist die Thermometerscale. Den Eispunct derselben bestimmt man, indem man das Instrument in die Lage Fig. 13 bringt, und es wie ein zu bestimmendes Thermometer behandelt, den Siedpunct kann man nicht bestimmen, weil die Scale nicht so weit reicht; defshalb mufs ein zweiter Punct von einem anderen guten Thermometer copirt werden. *Bellani* räth an, dieses Instrument zur

Zeit, wo es nicht gebraucht wird, in die Lage zu bringen, in welcher es als Thermometer dient. Wenn man recht reines Quecksilber zum Füllen nimmt, so darf man bei der kleinen Oberfläche, mit der es von der Luft berührt wird, nicht besorgen, dafs sich daselbst Unreinigkeit absetze.

2. *Watt's* Sonnencompas.

(*Philos. journ. Nro.* 7, *p.* 16.)

Wenn man eine Anzahl kleiner Magnetnadeln mittelst eines leichten Körpers mit einander verbindet, so dafs sie nur wenig von einander abstehen, und keine von ihnen dem Erdmagnetismus völlig folgen kann, so zeigen sie nach *Watt's* Behauptung, die er auf Versuche stützt, durch ihre Bewegung die Einwirkung des Sonnenlichtes, der Wärme etc. auf sie an. Die Versuche, welche dieser Behauptung als Basis dienen, wurden mit einer eigenen mannigfaltig abgeänderten Vorrichtung gemacht, die *Watt* Sonnencompas nennt.

Man magnetisire 12—15 Nähnadeln von Nro. 10, stecke sie mit den Köpfen, welche die Nordpole haben, in ein rundes, 1 Z. dickes Korkstück, so dafs eine von der anderen um 1/6 Z. absteht, und alle eine senkrechte Richtung haben, bringe dann den Kork auf eine Wasserfläche von 1 1/2 F. im Durchmesser. Wird nun mäfsiges Licht, Wärme oder Electricität darauf gelenkt, so erfolgt eine Anziehung, während bei Anwendung gröfserer Kräfte dieser Art eine Abstofsung eintritt. Letzteres findet z. B. Statt, wenn man das mittelst einer Linse concentrirte Licht darauf leitet, oder ein heifses Metallstück über die Nadelspitzen hält.

Eine andere noch zweckmäfsigere Einrichtung bekommt dieses Instrument auf folgende Weise: Man befestige 25 wohl magnetisirte Nadeln in einen Korkring

von 3 Z. im Durchmesser nach der Richtung der Halbmesser des Ringes, so daſs das Ganze wie ein Stern aussieht, und die Nord- und Südpole der Magnete abwechselnd aus- und einwärts gerichtet sind, bringe senkrecht auf die Ebene des Ringes ein hufeisenförmiges Drahtstück an, das in der Mitte an ein Stängelchen von Holz befestiget ist. Dieses wird in horizontaler Richtung auf eine verticale Spitze gesetzt, wie eine gewöhnliche Magnetnadel, und zur Herstellung des horizontalen Standes am Ende des Holzstängelchens ein Gegengewicht angebracht. Das Ganze kann zur Abhaltung des Luftzuges unter einen gläsernen Recipienten gestellt werden. Fig. 14 stellt den Apparat vor. Man kann statt des Gegengewichtes auch einen zweiten Magnetstern anbringen. Wird dieser Apparat, sagt *Watt*, von der Sonne beschienen, so dreht er sich einige Stunden lang auf der Spitze, und stellt sich dann in Ruhe in eine Lage, wo eine äuſsere und eine innere Hälfte des Ringes von den Sonnenstrahlen getroffen wird; doch ist diese Ruhe nur scheinbar, denn er folgt dem Stande der Sonne, so lange sie über dem Horizonte ist.

Dieses Instrument soll so empfindlich seyn gegen Licht, Wärme, Electricität etc., daſs es die kleinsten Veränderungen in der Stärke dieser Agentien anzeigt. Das violette und rothe Licht wirket am meisten darauf. Bringt man an den Nadeln eine Scheibe von Scharlach oder rothen Sammt an, so wird das Instrument noch viel empfindlicher; es dreht sich durch den Einfluſs des Sonnenlichtes fast einen ganzen Tag in der Richtung von Ost nach West durch Süd, und wird von einer glühenden Kohle oder einem glühenden Holzstück angezogen; selbst ein nahe gehaltenes Kerzenlicht bewegt es um 40° — 50°. Auch durch Vermehrung der Anzahl der Na-

deln wird die Empfindlichkeit gesteigert. *Watt* wendete deren über 300 an.

Übrigens darf man nicht vergessen, daſs man bei Erscheinungen dieser Art leicht in Irrthum geführt werden kann, und ich führe das Ganze keineswegs als eine ausgemachte Sache an, sondern als etwas, das, wenn es sich bestätiget, allerdings von gröſster Wichtigkeit ist.

B. Über die Wirkung des Mondes auf die Atmosphäre. Von *Flaugergues.*

(Bibl. univ. Décemb. 1827, *pag.* 264 *c. s.)*

Flaugergues, Astronom zu Viviers, machte es sich zur Aufgabe, den Einfluſs des Mondes auf die Atmosphäre mittelst Barometerbeobachtungen zu bestimmen, und begann seine Beobachtungen im Jahre 1808. Um die Wirkung des Mondes von der der Sonne scheiden zu können, muſste die Beobachtung stets bei demselben Sonnenstande angestellt werden, in welchem Falle alle Resultate vom Einflusse der Anziehungskraft der Sonne in gleichem Grade afficirt wurden. *Flaugergues* wählte zur Beobachtungszeit den wahren Mittag, an welchem sich zugleich die Barometerhöhe beinahe um die Hälfte ihrer täglichen Variation geändert hat. Weil aber auf diese Weise nur täglich ein Mal beobachtet werden konnte, muſsten die Beobachtungen längere Zeit hindurch fortgesetzt werden. *Flaugergues* hielt es für nöthig, sie durch 223 Mondenmonate fortzusetzen. Er begann sie am 19. October 1808, und war so glücklich, das Ende des genannten Termines, nämlich den 18. October 1827, zu erleben, und alle Beobachtungen selbst anzustellen; ein Umstand, der ihnen einen besonderen Werth gibt, weil derselbe Beobachter bei gehöriger Sorgfalt stets ein gleichförmigeres Resultat erhält, als

wenn mehrere, wenn auch sorgfältige Personen, Hände an dieselbe Sache anlegen. Allein dieser Umstand ist es nicht allein, der die hier besprochenen Beobachtungen interessant macht; denn sie sind auch mit einer besonderen Umsicht und Genauigkeit angestellt. *Flaugergues* zog ein Gefäſsbarometer, dessen Röhre 2.46 L. weit war, den übrigen vor, und glaubte es dadurch am besten gegen das Eindringen der Luft zu schützen, daſs er es an der gegen Mittag gelegenen Mauer seines Observatoriums unbeweglich befestigte. Dieses Mittel scheint sich auch völlig bewährt zu haben, indem die mittleren Barometerhöhen aus sechs und sechs Jahren, statt geringer zu erscheinen, wie es hätte der Fall seyn müssen, wenn mit der Zeit Luft in den leeren Raum gekommen wäre, vielmehr sich immer gröſser zeigten. Die mittleren Höhen waren

von	1808 — 1814	gleich 755.09	Millim.
»	1815 — 1820	» 755.26	»
»	1821 — 1826	» 756.14	»

Flaugergues sieht diese Zunahme des Luftdruckes, der auch schon von Anderen bemerkt wurde, als natürliche Folge der groſsen Gasentwickelungen bei vulcanischen Ausbrüchen, Feuersbrünnsten (? *B*) und dem gewöhnlichen Holzverbrennen an.

Übrigens hat *Flaugergues* keine Correction des Barometers vergessen, und alle nach den besten Bestimmungen vorgenommen.

Hier folgt die Tafel seiner Beobachtungen:

Mondesstand.	Anzahl der Beobachtungen.	Mittlere Barometerhöhe in Mill.
Mittlere Höhe im „Allgemeinen . .	6915	755.44
Conjunction oder Neumond . . .	234	755.39
Erster Octavschein	234	755.37
Erste Quadratur	234	755.37
Zweiter Octavschein	235	754.65
Opposition oder Vollmond . . .	234	755.23
Dritter Octavschein	234	755.70
Zweite Quadratur	234	756.32
Vierter Octavschein	235	755.48
Nördliches Lunistitium	258	755.73
Südliches »	258	755.42
Mondnähe (Äquat. Parallaxe 60′ 24″)	252	754.72
Mondferne (Äquat. Parallaxe 54′ 4″)	252	755.82

Aus diesen Ergebnissen zieht *Flaugergues* folgende Schlüsse:

1. Während eines synodischen Mondesumlaufes steigt das Barometer regelmäſsig vom zweiten Octanten angefangen, wo es am tiefsten steht, bis zur zweiten Quadratur, wo es den höchsten Stand erreicht hat, und fällt von da wieder, um von neuem zu steigen. Diese ganze Variation beträgt 1.67 Min. Man kann einen synodischen Umlauf des Mondes als Tagesumlauf ansehen, und die Phases des Mondes als Meridiandistanzen; bedenkt man noch dazu, daſs ein mittlerer Mondestag 24 St. 50′ m. Z. dauert, so sieht man wohl ein, daſs während dieses Umlaufes desselben das Barometer durch den Einfluſs seiner anziehenden Kraft regelmäſsig steigt und sinkt, daſs der gröſste Stand eintrifft, wenn der Mond 135° gegen Ost vom Mittag entfernt ist, d. h. um 9 U. 18 3/4′ M. mittlerer Zeit vor seinem Durchgange durch den oberen Meridian, und der geringste, wenn der

Mond 90° davon absteht, d. h. um 6 U. 12 1/2′ nach diesem Durchgange. Es herrscht demnach zwischen der Luftfluth und Ebbe, und der des Wassers ein grosser Unterschied, indem bei ersterer in einem Mondestage nur ein Mal derselbe Stand eintritt, bei letzterer hingegen zwei Mal.

2. Die Declination des Mondes modificirt seine Wirkung auf die Atmosphäre, und sie ist (zu Viviers) am gröfsten, wenn die Abweichung südlich ist. Diese Beobachtung widerspricht der Behauptung *Laplace's*, nach welcher das Zeichen der Declination des Mondes und der Sonne auf die Änderungen des Luftdruckes keinen Einflufs hat.

3. Die Wirkung des Mondes, den Luftdruck zu vermindern, ändert sich mit seiner Entfernung von der Erde, sie ist bei der Mondesnähe gröfser als bei der Mondesferne, wächst also, wenn die Entfernung des Mondes von der Erde abnimmt, woraus sich deutlich ergibt, dafs diese Wirkung in seiner anziehenden Kraft liege.

Flaugergues beachtete auch den Zusammenhang zwischen dem Mondesstande und der ihm entsprechenden Witterung. Folgende Tabelle gibt die Anzahl der Regentage, die bei jedem Mondesstande Statt hatte:

Mondesstand.

Neumond	Erstes Viertel	Vollmond	Letztes Viertel	Mondferne	Mondnähe
77 Tage.	82.	79.	60.	93.	78.

Aus dieser Tabelle sieht man, dafs die Anzahl der Regentage bei jedem Mondesstande dem ihm entsprechenden mittleren Barometerstande gemäfs ist, jedoch so, dafs diese Anzahl der Tage desto gröfser ist, je kleiner der Barometerstand ist.

C. Athembare Luft, in welcher kein Licht brennt.

(Giornale di Fisica etc. 1827. Serto Bim. p. 433.)

In der Gemeinde von Triuggio der Provinz Mailand wurden zwei Brunnen gegraben, die etwa eine ital. Meile von einander entfernt seyn mögen. Einer derselben war 21.75 Meter tief, und zeigte die merkwürdige Eigenthümlichkeit, daſs ein Licht auslöschte, sobald es auf ein Drittel der ganzen Tiefe dem Boden genähert wurde, auſser es hatte einen sehr kleinen Docht, oder es befand sich in einem Eimer. So wie man es aus dem Eimer herausnahm, verlosch es aber augenblicklich; demnach hätte man glauben sollen, daſs darin auch kein Mensch athmen und leben könne. Allein Professor *Perego* erzählt, daſs ein Arbeiter drei Stunden ununterbrochen darin aushalten konnte, und daſs selbst, wenn er abgelöset wurde, seine Nachfolger mit derselben Leichtigkeit drei Stunden ausdauerten. Man konnte mit einem Feuerstahl keinen Zunder anzünden, und selbst das Chlorfeuerzeug erzeugte nur das gewöhnliche Geräusch, das sich beim Entzünden hören läſst, aber man konnte auch damit kein Feuer gewinnen. *Perego* schöpfte eine Flasche dieser Luft, verschloſs sie gut, und untersuchte sie. Sie zeigte alle Spuren von starkem Kohlensäuregehalt; bei näherer Prüfung ergab sich $^1/_6$ des ganzen Volumens an Kohlensäuregas.

Im zweiten Brunnen fand man nicht mehr von diesem Gas, als durch das Athmen der Arbeiter erzeugt werden muſste. Beide Brunnen sind in einer secundären Formation gegraben. Merkwürdig ist es, daſs die Entwickelung dieses Gases nicht fortwährend Statt hatte, und man nach sechs Monaten von dem erwähnten Verhalten der Luft nichts mehr wahrnehmen konnte.

D. Zusammendrückbarkeit der Flüssigkeiten, von *Colladon* und *Sturm.*

(*Ann. de Chim. et de Phys. T.* 35, *p.* 113.)

Diese Arbeit ist die ausführlichste, welche je über diesen Gegenstand unternommen wurde, und erhielt den Preis, den die franz. Academie der Wissenschaften im Jahre 1826 aussetzte. Der Apparat, dessen sich *Colladon* und *Sturm* zur Bestimmung der Zusammendrückbarkeit tropfbarer Flüssigkeiten bedienten, bestand aus zwei ihrer Bestimmung nach wesentlich von einander verschiedenen Theilen; der eine diente zur Bestimmung der Volumenverminderung bei einem bestimmten Drucke, der andere zur Angabe der Gröſse dieses Druckes. Ersterer bestand aus einer mit einem cylindrischen Gefäſse verbundenen Glasröhre, die dem Volumen nach in sehr kleine, aber gleiche Theile getheilt war, und glich einem etwas groſsen offenen Thermometer, der die zu comprimirende Flüssigkeit enthielt. Er wurde Piezometer genannt. Er befand sich in einem weiteren Glascylinder von 12 Decim. Länge, der an einem Ende verschlossen, am anderen aber mit einer Compressionspumpe verbunden war. Zur Seite des Cylinders war ein Thermometer angebracht, er wurde von einem metallenen, mit Wasser gefüllten Kasten umgeben. Zur Messung des Druckes wurde zuerst eine 12.3 Meter hohe, Quecksilber enthaltende Barometerröhre gebraucht; allein weil es zu umständlich war, eine so hohe Quecksilbersäule zu beobachten, und auch die Resultate, der ungleichen Temperatur der Säule wegen, nicht die gehörige Sicherheit gewährten, wurde sie mit einem Manometer vertauscht, das sich in einem zweiten verticalen Glascylinder befand, welcher mit ersterem mittelst einer gekrümmten eisernen Röhre verbunden war. Dieser Cylinder ent-

hielt Wasser, nur am unteren Theile Quecksilber, auf dessen Oberfläche das Manometer ruhte. Der mittelst der Pumpe angebrachte Druck wirkte zugleich auf die zu comprimirende Flüssigkeit, auf das Wasser und Quecksilber im verticalen Cylinder, und bewirkte ein Aufsteigen des letzteren im Manometer, aus dem sich auf die Gröſse des angebrachten Druckes schlieſsen lieſs. Fig. 15 stellt diesen ganzen Apparat vor. Um die gehörige Genauigkeit der Resultate zu erzielen, muſste man darauf sehen, daſs sich bei den Versuchen die Temperatur der Flüssigkeit nicht änderte, und auf Mittel denken, die Adhäsion der Flüssigkeit an die Wände, und die Verminderung des Druckes durch die Reibung der flüssigen Säule in dem Haarröhrchen unschädlich zu machen, und zugleich das Anhäufen der Luft an den Glaswänden zu vermeiden. Die Beständigkeit der Temperatur war durch das Einschlieſsen des horizontalen Cylinders in Wasser erzielt, das bei 0° C. erhalten wurde, die Adhäsion und die Reibung machte man unschädlich, wenn man die Gröſse der Compressionen bei zunehmendem Drucke mit der verglich, welche bei abnehmendem Drucke Statt fand, und das Absetzen der Luft vermied man, wenn man die Flüssigkeit im Piezometer kochte, und groſse Kräfte auf sie wirken lieſs. Die Oberfläche der Flüssigkeit im Piezometer wurde bei den früheren Versuchen durch einen Index von Quecksilber bezeichnet. Diesen brauchten *Colladon* und *Sturm* absichtlich nicht, weil er unrichtige Resultate verursacht, sondern sie beobachteten die freie Oberfläche im Piezometer, die von der Flüssigkeit im horizontalen Cylinder durch eine Luftsäule getrennt war; bei Flüssigkeiten, die Feuchtigkeit anziehen, wurde aber ein Index von Schwefelkohlenstoff angewendet. Weil ferner der angewendete Druck auf die Flüssigkeit im Piezometer, so wie auf die ihn um-

gebende wirkte, durfte man zwar keine Ausdehnung des Piezometers befürchten, aber mit Grund eine Compression der Wände desselben voraussetzen. *Colladon* und *Sturm* setzten voraus, dafs diese nach allen Dimensionen eine gleich starke Ausdehnung erleide, und suchten die Gröfse derselben nach einer Dimension durch Versuche zu bestimmen, bei denen sie einen Glasstab durch ein angehängtes Gewicht dehnten, und seine Verlängerung mafsen. Dagegen wendet *Oersted* (*Poggend.* Bd. 12, S. 158) mit Recht ein, dafs kein treues Resultat erhalten wurde, weil wegen der Abnahme der Dicke der Glasstange die erhaltene Verlängerung nicht auf die cubische Vergröfserung durch eine gleich grofse Kraft schliefsen läfst. Nimmt man aber das Resultat so an, wie es *Colladon* und *Sturm* thaten, so erhält man durch einen Druck einer Atmosphäre eine cubische Vergröfserung des Piezometers von 33 Zehnmilliontel.

Die folgenden Tabellen geben die Zusammenziehungen der versuchten Flüssigkeiten durch die beigesetzten Kräfte an:

Quecksilber von 0° C.

Barometerst. 0.706 M., Thermometerst. 9° C., ursprüngliches Volumen 622.440.

Druck in Atmosphären.	Grade der Scale.	Druck in Atmosphären.	Grade der Scale.
1	242.5	18	263
2	244.8	20	265
3	246	22	267
4	248	24	269.1
5	249.6	30	275
6	250.8	Rückwärts.	
8	253	24	270
10	255.1	20	265.9
12	257	14	259.7
14	259	10	256
16	260.9	2	245.2

Wasser von 0° C.

Barometerst. 0.7466, Thermometerst. 10°, ursprüngliches Volumen 237.300.

Druck in Atmosphären.	Grade der Scale			
	des luftleeren Wassers.	für eine Atmosphäre.	des nicht luftleer. Wassers.	für eine Atmosphäre.
1	211	12	$675\frac{1}{2}$	—
2	223	$11\frac{1}{8}$	—	—
3	—	—	653	$11\frac{1}{4}$
4	$245\frac{1}{4}$	$11\frac{3}{8}$	$642\frac{1}{4}$	$10\frac{3}{4}$
6	268	$11\frac{1}{10}$	$621\frac{1}{2}$	$10\frac{3}{8}$
8	$290\frac{1}{8}$	12	599	$11\frac{1}{4}$
10	$314\frac{1}{8}$	$11\frac{1}{8}$	—	—
12	$335\frac{1}{2}$	$11\frac{1}{4}$	555	11
16	380	$11\frac{1}{4}$	—	—
18	$403\frac{1}{3}$	$11\frac{1}{2}$	$489\frac{1}{2}$	10
20	$425\frac{1}{2}$	$11\frac{1}{5}$	—	—
24	$470\frac{1}{2}$	$11\frac{1}{4}$	423	$11\frac{1}{12}$

Alkohol von 11°.6.

Thermometer in Manom. $7^{\circ}\frac{1}{2}$, ursprüngl. Volumen 152660.

Druck in Atmosph.	Grade der Scale	Für eine Atmos.	Zurück.		
			Druck in Atmosph.	Grade der Scale	Für eine Atmos.
1	202	13.85	24	511	12.8
3	235.7	13.2	18	434.5	13.1
6	275.5	13.6	12	356	13.19
12	355.5	13.2	6	277	13.6
18	434	12.8	3	236	13.75
24	511		1	208.5	

Schwefeläther von 0° und 11°.4.

Luftdruck 0.7466 M. Volumen des ersteren 117930, des letzteren 198170.

Druck in Atmosphären.	Grade der Scale des Äthers v. 0°	Für eine Atmosphäre.	Grade der Scale des Äth. v. 11°.4	Für eine Atmosphäre.
1	—	—	658	
3	13	15	599	$29\frac{1}{2}$
6	—	—	513	$28\frac{2}{3}$
12	148	14	344	$28\frac{1}{6}$
18	232	$13\frac{2}{3}$	180	$27\frac{1}{3}$
24	312	—	18	27

Mit Ammoniak gesättigtes Wasser

Therm. in Manom. 10°. Volumen 389360.

Druck in Atmosph.	Grade der Scale.	Für eine Atmosph.	Rückwärts.	
			Druck in Atmosph.	Grade der Scale.
1	580		16	378
4	534	15 1/3	10 2/3	443 1/2
8	481	13 1/4	8	481
10 2/3	443	14 1/4	4	533
16	375	12 3/4	1	579

Ein zweiter Versuch gab fast genau dieselben Resultate.

Salpeteräther von 0°, Siedpunct bei 21°.

Temp. des Manomet. 10°, Luftdruck 0.7466, Volumen 197740.

Druck in Atmos.	Grade der Scale.	Für eine Atmos.	Druck in Atmos.	Grade der Scale.	Für eine Atmos.
1	444 1/2	13 9/10	6	372 1/4	
6	575	13 1/2	18	213	13 1/2
12	293 3/4	13 1/2	24	133	13 2/3

Essigäther bei 0° C.

Therm. in Manom. 12°, Volumen 233900.

Druck in Atmos.	Grade der Scale.	Für eine Atmos.	Rückwärts.		
			Druck in Atmos.	Grade der Scale.	Für eine Atmos.
1	520		16	272	
4	468	17 1/3	8	399	14 7/8
8	401	16 3/4	4	468	27 1/4
10 2/3	353 1/2	17 3/4	1	520	17 1/3
16	272	15 1/4			
4	468				
8	398	17 1/2			
16	270	16			

Salzäther von 11°.21

Therm. in Manom. 8°, Volumen 255840.

Druck in Atmos.	Grade der Scale.	Für eine Atmos.	Zurück.		
			Druck in Atmos.	Grade der Scale.	Für eine Atmos.
1	383		6	280	
3	341	21	3	340.5	$20\frac{1}{6}$
6	280	$20\frac{1}{3}$	1	383	$21\frac{1}{4}$
12	159.5	$20\frac{1}{12}$			

Essigsäure von 0°.

Therm. in Manom. 9°.7, Luftdruck 0.7466, Volumen 239060.

Druck in Atmos.	Grade der Scale.	Für eine Atmos.	Rückwärts.		
			Druck in Atmos.	Grade der Scale.	Für eine Atmos.
4	252		16	364	
8	289	$9\frac{1}{4}$	$10\frac{2}{3}$	316	0
$10\frac{2}{3}$	315	$9\frac{3}{4}$	8	291	$9\frac{3}{8}$
16	363	9	4	254	$9\frac{1}{4}$

Concentrirte Schwefelsäure von 0°, Siedpunct über 300°.

Therm. in Manom. 8°.5, Luftdruck 0.7466, Volumen 152655.

Druck in Atmos.	Grade der Scale.	Für eine Atmos.	Rückwärts.		
			Druck in Atmos.	Grade der Scale.	Für eine Atmos.
1	324		16	259	
4	310	$4\frac{2}{3}$	12	276	$4\frac{1}{4}$
8	293	$4\frac{1}{4}$	8	$292\frac{1}{2}$	$4\frac{1}{8}$
12	276	$4\frac{1}{4}$	4	310	$4\frac{3}{8}$
16	259	$4\frac{1}{4}$	1	$323\frac{1}{2}$	$4\frac{1}{2}$

Salpetersäure von 0°, Dichte 1.403.

Therm. in Manom. 8°.5, Luftdruck 0.7446, Volumen 214960.

Druck in Atmos.	Grade der Scale.	Für eine Atmos.	Druck in Atmos.	Grade der Scale.	Für eine Atmos.
1	607.5	$6\frac{2}{3}$	32	397	$6\frac{3}{4}$
4	587	$6\frac{3}{4}$	16	$505\frac{1}{2}$	$6\frac{3}{4}$
8	560	$6\frac{3}{4}$	12	$532\frac{1}{2}$	$6\frac{6}{8}$
12	533	$6\frac{3}{4}$	8	559	$6\frac{3}{4}$
16	506	$6\frac{13}{16}$	4	586	$6\frac{3}{4}$
32	397		4	588	
			16	507	
			1	614	

Terpentinöhl bei 0° C.

Therm. in Manom. 8°, Luftdruck 0.7466, Volumen 255340.

Druck in Atmos.	Grade der Scale.	Für eine Atmos.	Druck in Atmos.	Grade der Scale.	Für eine Atmos.
1	703	21	16	432	$17\frac{1}{2}$
4	640	$17\frac{1}{2}$	12	502	$17\frac{1}{4}$
8	570	17	8	571	$17\frac{1}{2}$
12	502	$17\frac{1}{2}$	4	641	21
16	432		1	704	

Aus diesen Resultaten läſst sich leicht die Compression jeder untersuchten Flüssigkeit für den Druck einer Atmosphäre von bestimmter Stärke in Theilen ihres ganzen Volumens finden. Da man nämlich das ganze Volumen in Theilen der Scale, und auch die Compression für eine Atmosph. nach demselben Maſsstabe kennt, so braucht man nur die letzte Gröſse durch die erstere zu theilen, um die Compression für eine Atmosph. in Theilen des ganzen Volumens zu finden. Allein wegen des bei verschiedenen Versuchen herrschenden verschiedenen Luftdruckes und der verschiedenen Temperatur des Manometers ist es noch überdieſs nöthig, alle Resultate auf eine bestimmte Atmosph. und auf eine bestimmte

Temp. des Manom. zu reduciren. *Colladon* und *Sturm* wählten dazu die Atm. von 0.76 M. und die Temp. von 10° C., und corrigirten auf die ohnehin jedem bekannte Weise die gefundene Comp. Allein das erhaltene Resultat gab nur die scheinbare Compression; um die wahre zu finden, mufs sie um die Gröfse vermehrt werden, welche der Comp. des Glases für denselben Druck entspricht. Diese letztere Gröfse ist 3.3 ZehnmillionteI des ganzen Volumens. Ich stelle nun die auf diesem Wege erhaltenen Resultate in eine Tabelle zusammen. Die Compression ist in Milliontheile des ganzen Volumens angegeben.

Flüssigkeit.	Scheinbare Compression.	Wirkliche Compression	Anmerkung.
Quecksilber .	1.73	5.03	Alkohol, Schwefeläther, Essigäther und Salzäther werden nicht für gleiche Zunahmen der comprimirenden Kraft um gleich viel zusammengedrückt; sondern die Compression ist desto kleiner, je mehr die Flüssigkeit schon comprimirt ist. Bei Alkohol gilt der erste angegebene Werth v. der 1 — 9ten, der zweite von der 9—21sten Atmosph. Bei Schwefeläther varirt die Compression innerhalb der zwei angegebenen Grenzen von der 3 — 24sten, bei Salzäther von der 1—3ten und 6ten — 12ten Atmosphäre.
Luftleer. Wasser	48	51.3	
Wasser mit Luft	47.2	49.5	
Alkohol . .	92.87 90.24 85 86	96.2 93.5 89	
Schwefeläther von 0° C.	130 — 118.5	133 — 122	
» 11°.4	146 — 138	150 — 141	
Mit Ammoniak gesät. Wasser	34.7	38	
Salpeteräther .	68.2	71.5	
Essigäther . .	76 — 68	79.3 — 71.3	
Salzäther . .	82.6 78.95	85.9 82.25	
Essigsäure . .	39	42.2	
Concent. Schwefelsäure . .	28.6	32	
Salpetersäure .	32.2	35 7	
Terpentinöhl .	69.7	73	

Wärmeentwickelung bei der Compression.

Nachdem auf diese Weise die Gröfse der Compressibilität verschiedener Flüssigkeiten ausgemittelt war, blieb noch übrig, die bei der Compression etwa Statt

findende Wärmeentwickelung nachzuweisen. Zu diesem Ende wurde ein gläserner Ballon, in welchem sich ein *Brequet'*sches Thermometer befand, mit luftleerem reinen Wasser gefüllt, und zugleich mit einer Compressionspumpe versehen, um darauf einen bestimmten Druck ausüben zu können. Man hatte es in seiner Macht, diesen Druck langsam wachsen zu lassen, indem man den Pumpenkolben mittelst einer Schraube ohne Ende in Bewegung setzte, oder ihn mittelst eines Hebels innerhalb $^1/_4$ Sec. bis zu 30 Atmosphären zu verstärken. Als auf das Wasser ein langsam bis zu 36 Atm. verstärkter Druck wirkte, bewegte sich der Zeiger des Thermometers, doch hätte man aus der Richtung dieser Bewegung auf eine Statt habende Erkältung schliefsen müssen, wenn man nicht gewufst hätte, dafs diese Bewegung von der verschiedenen Compressibilität der Theile der Spirale herrühren könnte. Letzteres mufste um so wahrscheinlicher werden, da die Compression sehr langsam erfolgte, die Wärme hinreichend Zeit hatte, abzufliefsen, und auch bei einer sehr schnell erfolgenden diese Bewegung des Zeigers nicht gröfser war. Von aufsen angebrachte Hammerschläge bewirkten eine noch gröfsere Bewegung des Zeigers nach derselben Richtung. Bei Alkohol war diese Bewegung kleiner. Bei Schwefeläther konnte man keine solche Bewegung am Zeiger bemerken, wiewohl die Compression auf 30 und 36 Atm. stieg. Offene Quecksilberthermometer gaben Resultate, wie *Brequet's* Instrument. Aus allen diesem ziehen *Colladon* und *Sturm* folgende Schlüsse:

1. Durch schnelle Compression des Wassers mit einer Kraft von 40 Atmosphären steigt seine Temperatur nicht merklich.
2. Alkohol und Schwefeläther erwärmen sich, wenn innerhalb einer $^1/_4$ Sec. ein Druck von 36—40 Atm.

auf sie wirket, nicht aber 1° C.; ein schnellerer Druck, etwa durch einen Hammerschlag, bringt an Schwefeläther eine Temperaturerhöhung von 4°—6° hervor.

Einfluſs der Compression auf electrische Leitungsfähigkeit.

Um den Einfluſs der Compression auf die electrische Leitungsfähigkeit kennen zu lernen, wurde eine aus zwei Stücken zusammengefügte Glasröhre gewählt, welche die Gestalt eines umgekehrten T hatte. Im horizontalen Arme waren die Enden zweier Platindrähte eingeschmolzen, so daſs man mittelst derselben die Electricität durch die Flüssigkeit, welche der Apparat enthielt, leiten konnte. Einer dieser Drähte ging unmittelbar zum Pole eines Trogapparates, der andere communicirte erst mit einem Multiplicator mit zwei Nadeln, und hing mittelst diesem mit dem anderen Pole des Troges zusammen. Eine Druckpumpe diente zum Comprimiren der Flüssigkeit, und ein Manometer, diesen Druck zu messen. Vorläufig wurde die Stärke des Trogapparates so modificirt, daſs die Ablenkung der Magnetnadeln wenigstens um 15° kleiner war, wenn obiges Gefäſs Wasser enthielt, als wenn dieses Gefäſs mit Quecksilber gefüllt war. Wenn nun der Versuch mit reinem Wasser, mit einer concentrirten Ammoniaklösung, oder mit Quecksilber angestellt wurde, und der Druck von 1—30 Atm. wuchs, konnte man keine Veränderung in der Leitungsfähigkeit der Flüssigkeiten wahrnehmen, nur Salpetersäure schien desto weniger zu leiten, je mehr sie comprimirt wurde; denn bei einem Druck von 1 Atm. betrug die Ablenkung der Magnetnadel 47°, bei 10 Atm. 46° 3/4, bei 20 Atm. 46°, bei 30 Atm. 44° 3/4. *Colladon* und *Sturm* meinen aber, diese Verminderung der Ab-

lenkung der Magnetnadel komme nicht unmittelbar von dem verringerten Leitungsvermögen der Salpetersäure her, weil sie weniger compressibel ist als Wasser und eine Ammoniaklösung, deren Leitungsfähigkeit durch Compression nicht geändert wird; sie meinen vielmehr, es rühre dieses von der durch Annäherung der Theile verstärkten Affinität her, und machen sich überhaupt vom Verlaufe der Sache folgende Vorstellung: Die Fortpflanzung eines electrischen Stromes durch eine Flüssigkeit erfolgt auf eine zweifache Weise. Ein Theil der Electricität wird durch die Flüssigkeit unabhängig von jeder chemischen Wirkung geleitet, ein anderer hingegen durch die aus der Zersetzung der Flüssigkeit hervorgehenden electro-positiven und negativen Molecüle von Pol zu Pol übertragen, der Ansicht gemäſs, nach welcher diese Transmission durch eine Reihe von Zersetzungen und Zusammensetzungen erfolgt. Je leichter daher eine Flüssigkeit von der Electricität zersetzt wird, desto leitungsfähiger erscheint sie auch, und jede Ursache, welche der Trennung der Theile widersteht, vermindert auch die Leitungsfähigkeit. Da nun ein starker Druck nach *Hall's* und Anderer Versuchen die Zersetzung hindert, so muſs er auch die Leitungsfähigkeit herabsetzen.

Geschwindigkeit des Schalles im Wasser.

Bekanntlich läſst sich die Geschwindigkeit des Schalles durch die Formel $\sqrt{\frac{Pk}{D\varepsilon}}$ ausdrücken, wo D die Dichte der den Schall fortpflanzenden Flüssigkeit, k die Länge einer cylindrischen Säule dieser Flüssigkeit unter einem bekannten Drucke, und ε die Verminderung dieser Gröſse durch eine bestimmte Vergröſserung des Druckes P ist. Die Gröſse ε hängt demnach von der Com-

pressibilität der Flüssigkeit ab. Wird durch P der Druck einer Quecksilbersäule von 76 Centim. Höhe bezeichnet, so hat man $P = (0.76^m)\, g\, m$, wenn m die Dichte des Quecksilbers, und g die Acceleration der Schwere, oder die nach Verlauf der ersten Secunde im freien Fall erlangte Geschwindigkeit nennt.

Colladon und *Sturm* bestimmten nun zuerst die Geschwindigkeit des Schalles im Wasser des Genfer Sees, und verglichen sie mit dem Resultate obiger Formel. Es wurden demnach zwei Stationen im Genfer See ausgewählt, deren genau bestimmte Entfernung 13487 Meter betrug, und zwischen welchen sich, bestimmten Untersuchungen zu Folge, keine Untiefen, Strömungen etc. befanden, welche die Geschwindigkeit des Schalles modificiren konnten, wo auch das Wasser sehr rein ist. An einer Station wurde von einem Schiffe eine 7 Decim. hohe und etwas weniger weite Glocke einen Meter tief ins Wasser gesenkt, und mit einem Hammer, der durch einen Winkelhebel in Bewegung gesetzt wurde, daran geschlagen, um einen Schall im Wasser zu erregen. Den Augenblick der Schallerregung bezeichnete ein Feuersignal, das mittelst Knallpulver durch denselben Zug, welcher den Schlag an der Glocke bewirkte, erregt wurde. Um den Schall an der anderen Station ausserhalb des Wassers vernehmlich zu hören, bedurfte es einer eigenen Vorrichtung, weil er bekanntlich beim Übergang vom Wasser in die Luft ungemein geschwächt wird, und man schon in der Entfernung von 200—300 Met. aufserhalb des Wassers nichts von dem in demselben erregten Schalle wahrnimmt. *Colladon* und *Sturm* wählten dazu eine blecherne, conische, 5 Meter lange Röhre, die in verticaler Richtung im Wasser schwamm, und unten in einen weiten, gebogenen Trichter auslief, nahe wie ein Waldhorn, doch war die Erweiterung mit-

hat einer ebenen verticalen Platte geschlossen, und diese nach der Gegend hingewendet, woher der Schall kommen mufste; am obersten Ende war die Röhre schief abgeschnitten, um das Ohr bequem anhalten zu können. Die Zeit wurde mittelst eines Chronometers gemessen, der sich stopfen liefs, und $^1/_4$ Secunden angab. Bei den Versuchen ward das Ohr des Beobachters an die Öffnung der Röhre gehalten, das Auge nach der Gegend hin gerichtet, wo das Feuersignal erscheinen mufste, mit einer Hand hielt er die Uhr, mit der anderen die daran befindliche Stopfvorrichtung. Die Verfasser meinen aber doch die Zeit des Signals um $^1/_4$ Sec. zu spät angezeigt zu haben. Die Versuche wurden am 7ten, 15ten und 18. November Nachts vorgenommen, und in Summa 44 Mal wiederholt. Die Zeit vom Augenblick der Lichterscheinung bis zur Ankunft des Schalls betrug im Mittel 9 $^1/_4$ Sec. Der kleinste Werth war 9 S., der gröfste 9 $^1/_2$ S. Addirt man zum Mittelwerthe obige $^1/_4$ Sec., so erhält man als Fortpflanzungszeit 9.4 S., und demnach die Geschwindigkeit des Schalls 13487 : 9.4 = 1435 M. Die mittlere Wärme des Wassers in der Richtung des Schalles war, nach Beobachtungen berechnet, 8°.1 C.

Nun sollte die Geschwindigkeit des Schalls im Wasser auch nach obiger Formel berechnet werden. Zu diesem Ende wurde zuerst für das Seewasser die Gröfse e gesucht, und für die Temperatur von 8° C. gleich 49.5 Milliontel gefunden. Man hatte demnach:

$D = 1$, $k = 1000000$, $e = 49.5$, $g = g^m . 8088$,
$m = 13.544$ (bei 10° C.),

und aus diesen Gröfsen die Geschwindigkeit = 1428, mithin nur um 7 M. kleiner, als sie der Versuch lehrte. Diese Übereinstimmung zeigt hinlänglich, dafs die bei der Compression des Wassers frei werdende Wärme sehr

gering sey, denn sonst müſste dadurch der Schall beschleuniget werden.

„*Colladon* und *Sturm* schlieſsen ihre gehaltreiche Arbeit mit einigen Bemerkungen über die Eigenthümlichkeiten der Schallfortpflanzung im Wasser. Eine unter Wasser angeschlagene Glocke gibt immer nur einen kurzen reinen Schall, als wenn zwei Messerklingen an einander geschlagen würden. Diesen Charakter behält der Schall bei, wenn man sich von seiner Quelle entfernt, und nimmt dabei an Stärke ab; in mäſsiger Entfernung kann man nicht unterscheiden, ob der Schall ursprünglich stark war und weit her tönt, oder ob er von einem schwachen Schlage herrührt, und nur einen kurzen Weg zurückgelegt hat. Die Verfasser erklären dieses daraus, daſs die Dauer der Bewegung eines Theils der Flüssigkeit durch den Quotienten aus dem Halbmesser der ursprünglich erschütterten Sphäre der Flüssigkeit in die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles in ihr abhänge, und erstere Gröſse beim Wasser sehr klein, die andere hingegen gröſser ist, als bei der Luft. Eine andere Bemerkung ist die, daſs der Schall, wenn er die Oberfläche des Wassers unter einem sehr spitzigen Winkel trifft, gar nicht in die Luft übergeht, wie dieses beim Lichte der Fall ist, und daſs man daher diesen Winkel vergröſsern müsse, wenn man den im Wasser erregten Schall auſser Wasser in groſser Entfernung hören will; dieses ist durch die vorhin beschriebene Röhre geschehen. Der Wellenschlag ändert weder die Intensität des Schalles im Wasser, noch seine Geschwindigkeit; drei bei stürmischem Wetter angestellte Versuche beweisen dieses. Ein Schirm, der dem Schalle in den Weg gestellt wird, vermindert seine Intensität ungemein stark.

E. Electricität.

1. Vergleichung der Empfindlichkeit eines Frosches mit der eines Multiplicators mit zwei Nadeln. Von *L. Nobili.*

(Bibl. univ. Janvier 1828, *p.* 10.)

Nobili prüfte die Empfindlichkeit der zwei erwähnten Apparate, indem er mittelst flüssigen und festen Electromotoren, und durch Erwärmung einander berührender Stoffe electrische Ströme erregte, und sie auf beide wirken liefs. Das allgemeine Resultat dieser seiner Vergleichung ist, dafs für hydroelectrische Ströme, die immer die Dazwischenkunft eines Leiters der zweiten Classe fordern, ein entblöfster Froschschenkel ein empfindlicherer Galvanometer ist, als der beste Multiplicator, dafs aber bei thermoelectrischen Strömen, bei denen die Anwendung einer Flüssigkeit nicht nothwendig ist, selbst ein mittelmäfsiger Multiplicator empfindlicher ist als ein Frosch; sobald man aber absichtlich den electrischen Strom durch eine Flüssigkeit leitet, und durch diese auf den Multiplicator wirken läfst, mufs er wieder dem Frosche an Empfindlichkeit weichen.

Wenn man einen Frosch auf die Art als Galvanometer braucht, dafs man den Muskel auf einer, den Nerv auf der anderen Seite berührt, so wirkt er selbst als Electromotor; denn zwei Frösche, die auf die gewöhnliche Weise präparirt sind, und mit einander einen geschlossenen electrischen Kreis bilden, indem der Nerv des einen den Muskel des anderen berührt, zeigen beide alsogleich eine Contraction, während diese an beiden unterbleibt, wenn man die Ordnung umkehrt, und Nerv mit Nerv, Muskel mit Muskel in Berührung bringt. Um bei delicaten Versuchen den Einflufs des durch die elec-

tromotorische Kraft des Frosches erzeugten Stromes aufzuheben, räth *Nobili*, den zu prüfenden Strom nur durch den Nerv, nicht zugleich durch den Muskel zu leiten.

2. Über die Electricität, die ein Metalldraht in einer Flamme erlangt. Von *Becquerel*.

(*Ann. de Chim. et de Phys. T.* 36, *p.* 328.)

Becquerel stellte auf den Deckel eines sehr guten Condensators eine Glühlampe aus Kupfer, deren Spirale vom Gefäfse mittelst einer Glasröhre getrennt war, während die Basis des Condensators mit der Erde in leitender Verbindung stand. Hebt man den Deckel auf, so findet man, dafs der Alkohol in der Lampe während des Verbrennens eine merkliche Menge negativer Electricität aufgenommen habe, wie es auch zu erwarten war. Man mufste nun glauben, die positive Electricität müsse sich in der den Docht und die Spirale umgebenden Luft befinden. Berührt man die Spirale mit einem Platindraht, den man in der Hand hält, so ändert sich die Erscheinung; man nimmt dadurch alle entwickelte negative Electricität weg, und der Alkohol und das Gefäfs, worin er sich befindet, zeigt positive Electricität. Denselben Effect erhält man, wenn man die glühende Spirale mit einer anderen aus dickerem Drahte umgibt, die nur einige Millimeter von ersterer absteht.

Diese Thatsachen erkläret *Becquerel* durch die von *Ermann* entdeckte Wahrheit über die isolirende und leitende Eigenschaft glühender Platindrähte in Betreff der beiden Electricitäten, und zwar auf folgende Art: Die zwei während des Verbrennens entwickelten Electricitäten befinden sich in einem Gleichgewichte, das in einer gewissen Beziehung steht zu den zwei Electricitäten, die durch Berührung der zwei Metalle erregt werden, und da die glühende Spirale nur die negative

Electricität ableitet, so verbreitet sich die positive in die umgebenden Körper, und ladet den Condensator. *Becquerel* nahm hierauf statt der Glühlampe eine mit Weingeist gefüllte messingene Schale, tauchte einen baumwollenen Docht darein, der durch eine Glasröhre ging, und durch eine Korkscheibe in einer solchen Lage erhalten wurde, dafs die Flamme die Wände der Schale nicht berühren konnte, und zündete diesen Weingeist an. Wurde bald darauf der Condensatordeckel gehoben, so zeigte sich der Alkohol stark negativ electrisch. Die positive Electricität, die sich in der Flamme und in ihrer Nähe befinden mufste, durfte man nicht mit einem darein getauchten Platindrahte suchen, weil dieser gleich glühend wurde, und dadurch der Alkohol positive, der Draht negative Electricität zeigte; dieselbe Wirkung erfolgt auch, wenn der Draht die Flamme nur an einem Puncte berührt, oder einige Millimeter von der Flamme entfernt bleibt. Drähte aus Gold, Silber, Kupfer, Eisen, verhalten sich wie Platindraht. Daraus ergibt sich, dafs man sich zum Aufsuchen der Electricität, welche die Umgebung einer Flamme enthält, keineswegs glühender Metalldrähte bedienen darf, weil die Temperatur ihre Leitungsfähigkeit dahin abändert, dafs sie nur eine der zwei Electricitäten ableiten, und dadurch die Verbreitung der anderen in die leitende Umgebung gestatten.

3. Über die durch Spalten und Drücken der Krystalle erzeugten electrischen Erscheinungen. Von Ebendemselben.

(Annal. de Chim. et de Phys. T. 36, p. 265.)

Becquerel hat schon vor mehreren Jahren Versuche über die Electrisirung durch Druck bekannt gemacht, und ihnen einiges über Electrisirung durch Spalten des Glim-

mers etc. angereihet. In der neuesten Zeit hat er über die letztere Art der Electricitätserregung näheren Bericht erstattet, und gezeigt, daſs die electrischen Erscheinungen beim Druck und beim Spalten viele Ähnlichkeit mit einander haben. Trennt man nämlich Gyps- oder Glimmerblätter schnell von einander, so erscheint jeder der zwei Theile electrisch, und zwar der eine positiv, der andere negativ. Legt man sie wieder auf einander in eine der natürlichen gleiche Lage, und drückt sie schwach zusammen, so erhält man bei der Trennung wieder dieselben electrischen Erscheinungen, wenn man übrigens die Blätter nicht zu lange mit ihren neuen Flächen dem Einflusse der Luft aussetzt, die wahrscheinlich diese Fläche feucht macht. Es bewirkt also der Druck, durch den die Theile einander genähert werden, dieselben Phänomene, wie die Cohäsionskraft, durch welche auch eine, nur innigere Berührung der Theile hervorgebracht wird. *Becquerel* überzeugte sich durch Spalten von Kalkspath, Schwerspath, Fluſsspath, Topas etc., daſs alle krystallisirten Körper demselben Gesetze unterliegen, wie Glimmer und Gyps, doch muſs der Krystall stets rein gespalten, nicht bloſs gerissen oder gebrochen seyn. *Becquerel* meint, es hänge diese Electricitätserregung von der Erschütterung der Theilchen im Augenblicke der Trennung ab, und diese Erschütterung bestimme auch die Flächen, die eine oder die andere Electricität anzunehmen.

VII.

Anzeige einiger Relationen im sphärischen Dreiecke;

von

Franz Xav. Moth,

gewesenem Supplenten der höheren Mathematik an der Universität zu Prag.

Wenn man der Kürze wegen

$$\frac{a+b+c}{2}=s;\quad \frac{A+B+C}{2}=S$$

setzt, wo abc die drei Seiten, und ABC die drei Winkel, welche den drei Seiten respective entgegen stehen, bedeuten; so hat man für jedes sphärische Dreieck nachstehende sehr bemerkenswerthe Beziehungen:

$$\left.\begin{array}{l}
\sin.\tfrac{1}{2}(s-c)\,.\,\cos.\tfrac{1}{2}(s-b)= \\
=\left(\dfrac{\sin.\frac{1}{2}a}{\cos.\frac{1}{2}A}\right).\sin.[45^\circ+\tfrac{1}{2}(S-C)].\cos.[45^\circ+\tfrac{1}{2}(S-B)] \\
\cos.\tfrac{1}{2}(s-c)\,.\,\sin.\tfrac{1}{2}(s-b)= \\
=\left(\dfrac{\sin.\frac{1}{2}a}{\cos.\frac{1}{2}A}\right).\cos.[45^\circ+\tfrac{1}{2}(S-C)].\sin.[45^\circ+\tfrac{1}{2}(S-B)]
\end{array}\right\}(1)$$

$$\left.\begin{array}{l}
\sin.\tfrac{1}{2}s\,.\,\cos.\tfrac{1}{2}(s-a)= \\
=\left(\dfrac{\sin.\frac{1}{2}a}{\sin.\frac{1}{2}A}\right).\sin.[45^\circ+\tfrac{1}{2}(S-C)].\sin.[45^\circ+\tfrac{1}{2}(S-B)] \\
\cos.\tfrac{1}{2}s\,.\,\sin.\tfrac{1}{2}(s-a)= \\
=\left(\dfrac{\sin.\frac{1}{2}a}{\sin.\frac{1}{2}A}\right).\cos.[45^\circ+\tfrac{1}{2}(S-C)].\cos.[45^\circ+\tfrac{1}{2}(S-B)]
\end{array}\right\}(2)$$

$$\left.\begin{array}{l}
\sin.\tfrac{1}{2}(s-c)\,.\,\sin.\tfrac{1}{2}(s-b)= \\
=-\left(\dfrac{\cos.\frac{1}{2}a}{\cos.\frac{1}{2}A}\right).\cos.(45^\circ+\tfrac{1}{2}S).\cos.[45^\circ+\tfrac{1}{2}(S-A)] \\
\cos.\tfrac{1}{2}(s-c)\,.\,\cos.\tfrac{1}{2}(s-b)= \\
=\left(\dfrac{\cos.\frac{1}{2}a}{\cos.\frac{1}{2}A}\right).\sin.(45^\circ+\tfrac{1}{2}S).\sin.[45^\circ+\tfrac{1}{2}(S-A)]
\end{array}\right\}(3)$$

$$\left.\begin{array}{l}\sin.\tfrac{1}{2}s\ .\ \sin.\tfrac{1}{2}(s-a) = \\ = \left(\frac{\cos.\frac{1}{2}a}{\sin.\frac{1}{2}A}\right).\cos.(45^\circ+\tfrac{1}{2}S).\sin.[45^\circ+\tfrac{1}{2}(S-A)] \\ \cos.\tfrac{1}{2}s\ .\ \cos.\tfrac{1}{2}(s-a) = \\ = \left(\frac{\cos.\frac{1}{2}a}{\sin.\frac{1}{2}A}\right).\sin.(45^\circ+\tfrac{1}{2}S).\cos.[45^\circ+\tfrac{1}{2}(S-A)]\end{array}\right\}(4)$$

Durch Vertauschung der Gröſsen $a\,b\,c$, so wie der Gröſsen $A\,B\,C$ unter einander lassen sich aus den hier dargestellten Gleichungen noch sechzehn ähnliche finden.

Die Addition und Subtraction je zweier dieser Gleichungen führt theils auf identische, theils auf die *Gauſs'*schen Gleichungen.

Aus diesen Gleichungen lassen sich mehrere sehr wichtige Folgerungen ziehen. Unter andern nachstehende:

$$\frac{\text{tg}.\frac{1}{2}(s-c)}{\text{tg}.\frac{1}{2}(s-b)} = \frac{\text{tg}.[45^\circ+\frac{1}{2}(S-C)]}{\text{tg}.[45^\circ+\frac{1}{2}(S-B)]};$$

$$\frac{\cot.\frac{1}{2}s}{\text{tg}.\frac{1}{2}(s-b)} = \frac{\text{tg}.[45^\circ+\frac{1}{2}S]}{\text{tg}.[45^\circ+\frac{1}{2}(S-C)]};$$

$$\frac{\text{tg}.\frac{1}{2}(s-a)}{\text{tg}.\frac{1}{2}(s-b)} = \frac{\text{tg}.[45^\circ+\frac{1}{2}(S-A)]}{\text{tg}.[45^\circ+\frac{1}{2}(S-B)]};$$

$$\frac{\text{tg}.\frac{1}{2}s}{\text{tg}.\frac{1}{2}(s-a)} = \frac{\text{tg}.[45^\circ+\frac{1}{2}(S-B)]}{\cot.[45^\circ+\frac{1}{2}(S-A)]};$$

$$\frac{\text{tg}.\frac{1}{2}(s-c)}{\cot.\frac{1}{2}(s-a)} = -\frac{\text{cotg}.[45^\circ+\frac{1}{2}S]}{\text{tg}.[45^\circ+\frac{1}{2}(S-B)]};$$

u. s. w.

Ferner hat man:

$$\text{tg}.\tfrac{1}{2}a\ .\ \text{tg}.\tfrac{1}{2}(s-a) =$$
$$= -\frac{\cos.(45^\circ+\frac{1}{2}S)\ .\ \sin.[45^\circ+\frac{1}{2}(S-A)]}{\sin.[45^\circ+\frac{1}{2}(S-B)]\ .\ \sin.[45^\circ+\frac{1}{2}(S-C)]};$$

$$\text{tg}.\tfrac{1}{2}a\ .\ \text{tg}.\tfrac{1}{2}(s-b) =$$
$$= -\frac{\cos.(45^\circ+\frac{1}{2}S)\ .\ \cos.[45^\circ+\frac{1}{2}(S-A)]}{\cos.[45^\circ+\frac{1}{2}(S-B)]\ .\ \sin.[45^\circ+\frac{1}{2}(S-C)]};$$

$$\text{tg.}\tfrac{1}{2}a \cdot \text{cotg.}\tfrac{1}{2}(s-a) =$$
$$= + \frac{\sin.(45^0 + \frac{1}{2}S) \cdot \text{cosin.}[45^0 + \frac{1}{2}(S-A)]}{\cos.[45^0 + \frac{1}{2}(S-B)] \cdot \cos.[45^0 + \frac{1}{2}(S-C)]};$$

$$\text{tg.}\tfrac{1}{2}a \cdot \text{cotg.}\tfrac{1}{2}(s-b) =$$
$$= + \frac{\sin.(45^0 + \frac{1}{2}S) \cdot \sin.[45^0 + \frac{1}{2}(S-A)]}{\sin.[45^0 + \frac{1}{2}(S-B)] \cdot \cos.[45^0 + \frac{1}{2}(S-C)]};$$

$$\text{tg.}\tfrac{1}{2}a \cdot \text{tg.}\tfrac{1}{2}s =$$
$$= - \frac{\cos.(45^0 + \frac{1}{2}S) \cdot \sin.[45^0 + \frac{1}{2}(S-A)]}{\cos.[45^0 + \frac{1}{2}(S-B)] \cdot \cos.[45^0 + \frac{1}{2}(S-C)]};$$

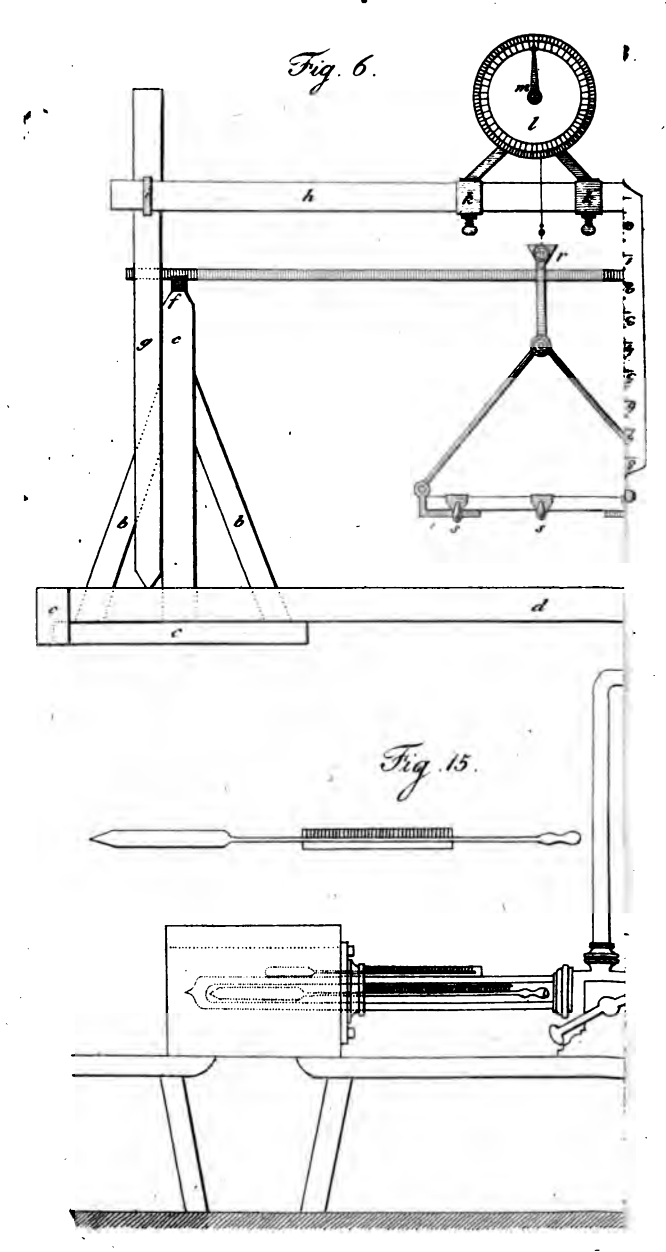
$$\text{tg.}\tfrac{1}{2}a \cdot \text{cotg.}\tfrac{1}{2}s =$$
$$= + \frac{\sin.(45^0 + \frac{1}{2}S) \cdot \cos.[45^0 + \frac{1}{2}(S-A)]}{\sin.[45^0 + \frac{1}{2}(S-B)] \cdot \sin.[45^0 + \frac{1}{2}(S-C)]}.$$

Durch ähnliche Formeln wird man die grofsen Buchstaben durch die kleinen ausdrücken können, wenn man von der Eigenschaft des Polardreieckes Gebrauch macht.

Zur weiteren Reduction dieser Ausdrücke merke ich noch an, dafs überhaupt

$$\sin.(45^0 \pm \varphi) = \cos.(45^0 \mp \varphi)$$
und $\text{tg.}(45^0 \pm \varphi) = \text{cotg.}(45^0 \mp \varphi)$ sey.

Den Beweis dieser Sätze wird man in meinem bereits unter der Presse befindlichen und bald zu erscheinenden Werke über die analytische Geometrie finden.


Fig. 6.
h
k
k
l
m
r
f
g
c
b
b
d
e
c
s
s
Fig. 15.

$$\text{tg.}\tfrac{1}{2}a \cdot \text{cotg.}\tfrac{1}{2}(s-a) =$$

$$= + \frac{\sin.(45^\circ + \frac{1}{2}S) \cdot \text{cosin.}[45^\circ + \frac{1}{2}(S-A)]}{\cos.[45^\circ + \frac{1}{2}(S-B)] \cdot \cos.[45^\circ + \frac{1}{2}(S-C)]};$$

$$\text{tg.}\tfrac{1}{2}a \cdot \text{cotg.}\tfrac{1}{2}(s-b) =$$

$$= + \frac{\sin.(45^\circ + \frac{1}{2}S) \cdot \sin.[45^\circ + \frac{1}{2}(S-A)]}{\sin.[45^\circ + \frac{1}{2}(S-B)] \cdot \cos.[45^\circ + \frac{1}{2}(S-C)]};$$

$$\text{tg.}\tfrac{1}{2}a \cdot \text{tg.}\tfrac{1}{2}s =$$

$$= - \frac{\cos.(45^\circ + \frac{1}{2}S) \cdot \sin.[45^\circ + \frac{1}{2}(S-A)]}{\cos.[45^\circ + \frac{1}{2}(S-B)] \cdot \cos.[45^\circ + \frac{1}{2}(S-C)]};$$

$$\text{tg.}\tfrac{1}{2}a \cdot \text{cotg.}\tfrac{1}{2}s =$$

$$= + \frac{\sin.(45^\circ + \frac{1}{2}S) \cdot \cos.[45^\circ + \frac{1}{2}(S-A)]}{\sin.[45^\circ + \frac{1}{2}(S-B)] \cdot \sin.[45^\circ + \frac{1}{2}(S-C)]}.$$

Durch ähnliche Formeln wird man die groſsen Buchstaben durch die kleinen ausdrücken können, wenn man von der Eigenschaft des Polardreieckes Gebrauch macht.

Zur weiteren Reduction dieser Ausdrücke merke ich noch an, daſs überhaupt

$$\sin.\ (45^\circ \pm \varphi) = \cos.\ (45^\circ \mp \varphi)$$

und $\text{tg.}\ (45^\circ \pm \varphi) = \text{cotg.}\ (45^\circ \mp \varphi)$ sey.

Den Beweis dieser Sätze wird man in meinem bereits unter der Presse befindlichen und bald zu erscheinenden Werke über die analytische Geometrie finden.

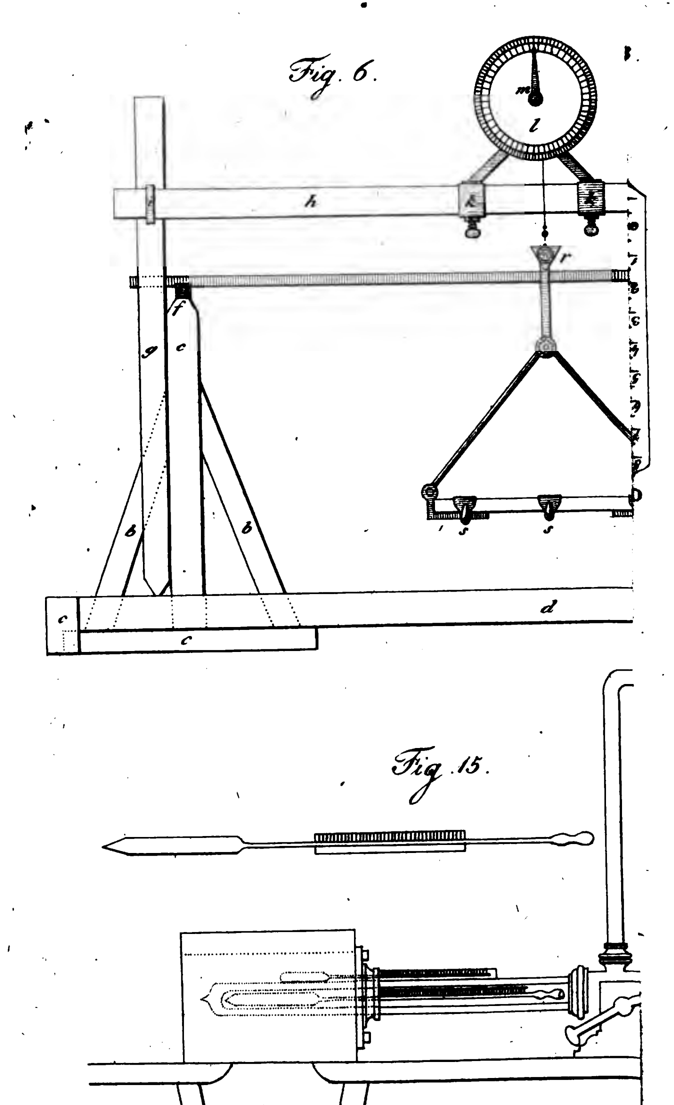
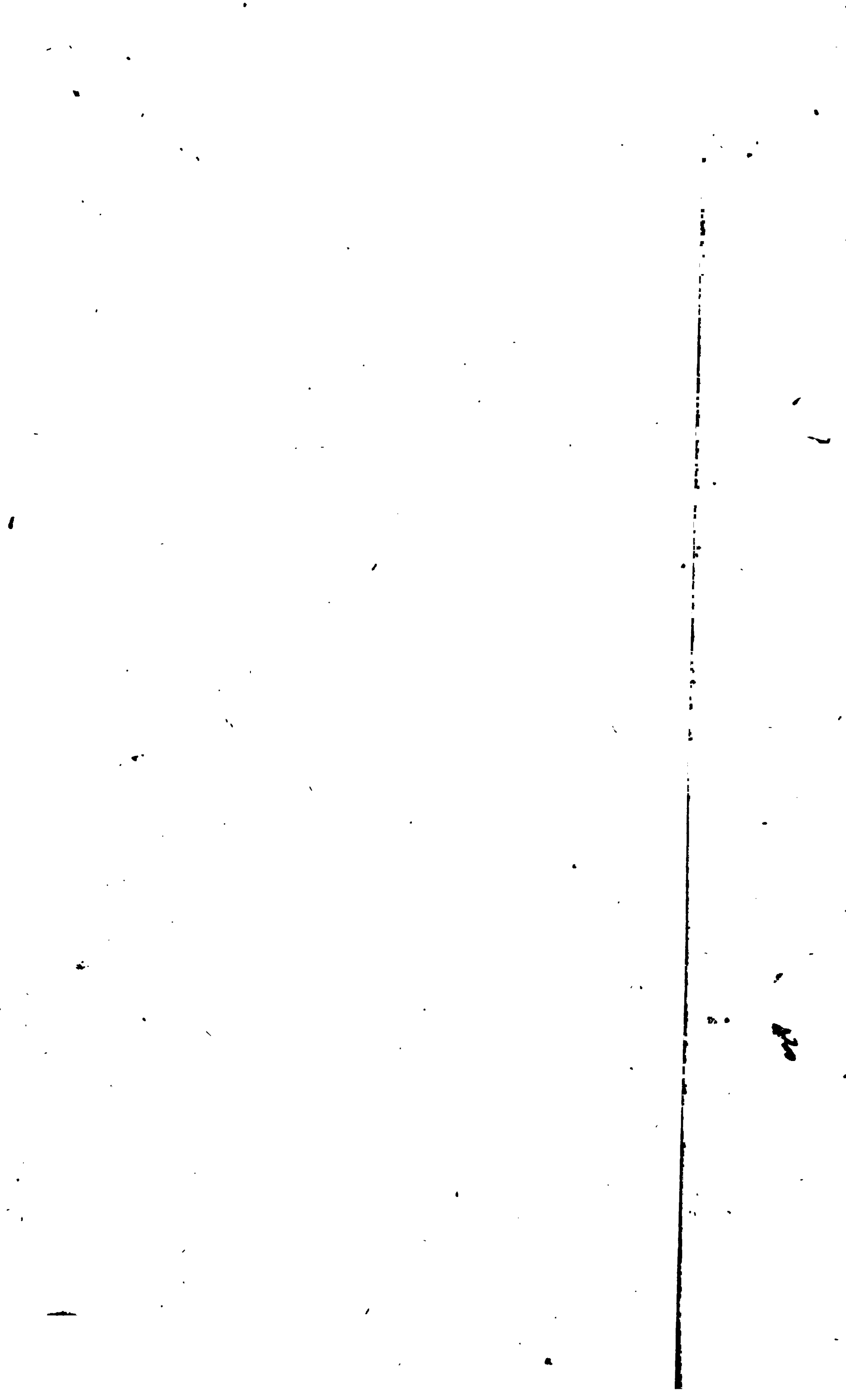


Fig. 6.

Fig. 15.



ZEITSCHRIFT
FÜR
PHYSIK UND MATHEMATIK.

I.

Ein Beitrag zur Verbesserung achromatischer Objective;

von

I. I. Littrow.

Bekanntlich hatte *Newton* aus einem unvollkommenen Versuche, den er Opt. Lib. I. P. II. erzählt, den Schluſs gezogen, daſs bei jedem Paare von brechenden Mitteln die Farbenzerstreuungen sich wie die um die Einheit verminderten Brechungen dieser Mittel verhalten. Behält man hier und im Folgenden die Bezeichnungen des Aufsatzes dieser Zeitschrift, Vol. III. Seite 129, bei, so wird der eben erwähnte Schluſs durch folgende Gleichung ausgedrückt:

$$\frac{dn}{dn'} = \frac{n-1}{n'-1}.$$

Wird diese Gleichung als wahr angenommen, so folgt daraus unmittelbar die Unmöglichkeit aller achromatischen Refractoren, aus welchem Grunde auch *Newton* diese Gattung von Fernröhren verlieſs, und sich fortan bloſs mit der Verbesserung der Reflectoren, oder der Spiegeltelescope beschäftigte. In der That, nennt man B' die Brennweite des Doppelobjectivs, und setzt der Kürze wegen $\varpi = \frac{dn}{dn'}$ und $P = \frac{(n'-1)\varpi}{n-1}$, so erhält man, wenn man die Dicke der Linsen vernachlässi-

get, für jedes achromatische Fernrohr (a. O. Seite 145)

$$B' = \frac{1}{1 + P},$$

oder die Länge jedes achromatischen Fernrohrs müſste unendlich groſs seyn, da nach *Newton's* oben angeführtem Satze $P = 1$ ist.

Ist aber jene erste von dem groſsen Britten aufgestellte Gleichung nicht richtig, wie sie denn längst schon als unrichtig anerkannt ist, so zeigt dieselbe letzte Gleichung

$$B' = \frac{1}{1 - P},$$

daſs die Länge eines achromatischen Fernrohres desto kleiner wird, je kleiner die Gröſse P ist, die bekanntlich für alle bisher untersuchte diaphane Körper als ein eigentlicher Bruch sich darstellt.

Aus der oben gegebenen Bezeichnung dieser Gröſse P folgt daher, daſs unsere achromatischen Fernröhre im Allgemeinen durch folgende vier Mittel einer Verkürzung fähig sind:

1. Wenn man die Brechbarkeit des Kronglases vermehrt.
2. Wenn man die Brechbarkeit des Flintglases vermindert.
3. Wenn man die Farbenzerstreuung des Kronglases vermindert, und
4. wenn man die Farbenzerstreuung des Flintglases vermehrt.

Wirken zwei oder mehrere dieser Bedingungen zu demselben Zwecke zusammen, so wird die dadurch erzeugte Verkürzung des Fernrohres desto beträchtlicher.

Um aber besser zu übersehen, in welchem Grade diese Verminderung der Länge des Rohres durch die angezeigten Mittel Statt hat, wollen wir eine biconvexe

Linse von Kronglas annehmen, deren Brennweite z. B. gleich zwei Fuſs seyn soll, und für die man $n = 1.53$ hat. Verbinden wir sie mit mehreren biconcaven Linsen von Flintglas, für welche alle $n' = 1.58$ ist, während die Farbenzerstreuungen derselben verschieden sind. Dieses vorausgesetzt, hat man die Farbenzerstreuung dn der Kronglaslinse als Einheit angenommen:

Farbenzerstreuung der Linse von Flintglas.		Länge des achrom. Fernrohres.
$dn' = \frac{10}{8} = 1.25$	. . .	16.05 Fuſs,
$\frac{10}{7} = 1.43$	. . .	8.54
$\frac{10}{6} = 1.67$	. . .	5.82
$\frac{10}{5} = 2.00$	. . .	4.42
$\frac{10}{4} = 2.50$	. . .	3.55
$\frac{10}{3} = 3.33$	. . .	2.98
$\frac{10}{2} = 5.00$	. . .	2.56 u. s. w.,

also z. B. die Länge des Fernrohres in dem letzten Falle noch nicht der sechste Theil von jener des ersten Falles, bloſs weil hier die Farbenzerstreuung fünf Mal grösser ist, als dort. Hätten wir kein anderes Flintglas, als ein solches, dessen Zerstreuung $dn' = \frac{10}{9}$ ist, so würden wir mit der oben angenommenen Linse von Kronglas das Fernrohr nur bei einer Länge von 132 Fuſs achromatisch machen können, und für $dn' = \frac{100}{91}$ würde diese Länge 477 Fuſs betragen u. f., was alles deutlich genug zeigt, wie sehr das oben in Nro. 4 erwähnte Mittel zur Verkürzung der Fernröhre beiträgt, und ähnliche Bemerkungen gelten auch von den drei übrigen.

Man würde also ohne Zweifel in Beziehung auf die so wünschenswerthe Verkürzung der Fernröhre sehr viel gewinnen, wenn man zwei Glasarten fände, für welche die Differenz der Brechungen oder die der Farbenzerstreuungen bedeutend gröſser wäre, als sie bei

unserem bisher bekannten Kron- und Flintglase zu seyn pflegt.

Diese letzte Differenz ist in der That so klein, dafs eben wegen ihrer geringen Gröfse alle practische Ausführung achromatischer Fernröhre bald ganz unterblieben wäre. *Dollond* fing, von *Euler* aufgeregt, seine hieher gehörenden und den Achromatismus der Fernröhre begründenden Versuche in dem Jahre 1747 an, aber er fand diejenigen Glasarten, welche ihm unter die Hände kamen, in Beziehung auf ihre Farbenzerstreuungen so wenig verschieden, dafs er alle Hoffnung aufgab, dadurch den Fernröhren eine wesentliche Verbesserung zu verschaffen, und nachdem er noch einige Zeit sich mit der Untersuchung der Brechung und Zerstreuung flüssiger Körper beschäftiget hatte, liefs er die ganze Sache, als unwesentlich, liegen, bis er endlich im Jahre 1757, also zehn Jahre nach seinen ersten Versuchen, durch Zufall ein Stück Krystall- oder Flintglas von einer etwas gröfseren Zerstreuung erhielt, wodurch seine früheren Erwartungen wieder erweckt und bekanntlich auch endlich mit dem glücklichsten Erfolge gekrönt wurden. Und selbst als dieser Erfolg schon durch Thatsachen bestätiget war, als das erste von *Dollond* verfertigte achromatische Fernrohr, der k. Academie in London vorgelegt, die Bewunderung der ganzen gebildeten Welt in Anspruch genommen hatte, selbst da konnte der grofse *Euler*, der immer, nach der Analogie des Auges, auf mit Flüssigkeiten gefüllte Objective drang, welche die Farben viel mehr zerstreuen, sich nicht überzeugen, dafs *Dollond* diese Wirkung blofs durch den Unterschied der so äufserst geringen Zerstreuungen der verschiedenen Glasarten hervorgebracht habe, und er schob den glücklichen Erfolg, den er nicht weiter abläugnen konnte, auf ein zufälliges Treffen der Krüm-

mungen der Linsen, und stellte daher sogar die Meinung auf (*Mém de l'Acad. de Berlin*, 1762), dafs *Dollond*, von einem ähnlichen glücklichen Ohngefähr begünstiget, dieselbe Wirkung erreicht haben würde, wenn er auch seine Linsen alle von einer und derselben Glasart genommen hätte, da doch die bisher bekannten Glasarten in dieser Beziehung viel zu wenig verschieden wären, um darauf so grofse und wichtige Erfolge gründen zu können. Zwei volle Jahre hielt er diese sonderbare Meinung fest, während *Dollond*, der sich früher in einen ungleichen Kampf mit seinem grofsen mathematischen Gegner eingelassen hatte, sie durch Thatsachen, durch neue, noch bessere achromatische Fernröhre widerlegte, bis endlich *Euler* am 30. Jänner 1764 ein Schreiben des Professors *Zeiher* in Petersburg erhielt, in welchem ihm der letztere berichtet, dafs er durch blofse Vermehrung des Zusatzes von Blei Glasstücke erhalten habe, welche die Farben gegen fünf Mal mehr zerstreuen, als das gemeine Glas, ohne die Brechung desselben bedeutend zu vermehren, und dafs im Gegentheile Zusätze von kalischen Salzen die Brechbarkeit des Glases sehr vermindern, ohne die Farbenzerstreuung merkbar zu ändern. (*Mém. de Berlin*, 1766.) Von diesem Augenblicke entsagte *Euler* der Ansicht, dafs die Zerstreuung jedes Körpers von seiner Brechung abhängig, und dafs die Unterschiede der Zerstreuungen bei den verschiedenen Glasarten nicht hinlänglich sey, die Farbenlosigkeit der Fernröhre zu bewirken, und fortan erschienen nun von ihm jene zahlreichen und trefflichen Aufsätze, durch welche er die Theorie dieser Instrumente in einem so hohen Grade zu befördern wufste.

Also früher glaubte man, dafs die Gröfse $\varpi = \frac{dn}{dn'}$ bei allen Glasarten sehr nahe gleich der Einheit sey,

und so lange dieser Glaube herrschte, war für die Farbenlosigkeit der Fernröhre nichts zu hoffen. *Dollond* fand der erste, dafs es auch Glas gibt, für welches der Werth von ϖ, in Beziehung auf das gemeine Tafel- oder Kronglas, gleich 0.6, und selbst gleich 0.5 ist, und dadurch wurde die Bahn zur Vervollkommnung dieser Instrumente gebrochen, und gleich anfangs ein grofser Schritt zur Erreichung des hohen und wichtigen Zweckes gemacht. Aber seit diesem ersten Schritte, was ist seitdem geschehen, um auf der einmal geöffneten Bahn noch weiter zum Ziele vorzudringen? Hat irgend ein Chemiker, oder irgend ein Glasschmelzer seitdem noch andere Glasarten erzeugt, für welche der Werth von ϖ gleich 0.3 oder 0.2 ist, und deren wir so sehr bedürfen, wenn wir anders nicht stehen bleiben sollen, wo unsere Vorgänger schon vor sechzig Jahren gestanden sind? Sollte es denn in der That so ungemein schwer, und, wie man wohl sagt, beinahe unmöglich seyn, noch eine Art von Glas zu erhalten, welche die Farben entweder viel weniger, als unser Kronglas, oder auch, was zu demselben Ziele führt, viel mehr als unser bisheriges Flintglas zerstreute? Dürfte man nicht von ehrenvollen, an alle Chemiker und Hüttenmeister ausgesetzten Preisen einen glücklichen Erfolg erwarten, da dieser Gegenstand nicht *a priori* oder durch Theorie, sondern nur auf dem Wege der Erfahrung und durch vielfältige Versuche gefördert werden kann, Versuche, zu welchen auf Glashütten, selbst ohne einem nur für diesen ausschliefsenden Zweck bestimmten Aufwande, beinahe jeder Tag Gelegenheit darbietet, da jedes erhaltene Glas, wenn es der optischen Absicht nicht entsprechend gefunden wird, doch immer wieder zu den anderen Zwecken verwendet werden kann.

Man kennt den Einwurf, welchen man diesen Fra-

gen, statt sie durch Thatsachen zu beantworten, entgegen zu setzen pflegt. Ihr wollt, heifst es, nicht blofs ein Glas von einer bestimmten Zerstreuung, ihr wollt auch zugleich *sehr grofse* und von allen Blasen, Streifen und Wellen freie Stücke eines solchen Glases, ohne die Schwierigkeiten zu kennen, welche sich dieser *doppelten* Forderung entgegen stellen. — Da es allerdings billig ist, bei so complicirten, so oft schon mifslungenen und von einem günstigen Zufalle so abhängigen Versuchen nicht mehr zu verlangen, als man in der That und unumgänglich braucht, so mag es zweckmäfsig seyn, dafs die Theorie der Ausführung auf halbem Wege hülfreich entgegen komme, und dafs, wenn es anders möglich ist, die eine dieser Forderungen von dem Rechner übernommen werde, um dafür die andere allein und dafür hoffentlich desto besser von dem ausübenden Künstler besorgen zu lassen.

Ich theile hier mit, was ich zu diesem Zwecke gesucht habe, mit dem Wunsche, es bald von unserem trefflichen *Plöfsl* durch die Ausführung bestätiget zu sehen.

Euler's vielfache theoretische Memoiren über die Vervollkommnung der Fernröhre, selbst mit Einschlufs seines gröfseren Werkes über die Optik, setzen durchaus die beiden Linsen des zusammengesetzten Objectives sehr nahe oder auch ganz unmittelbar an einander liegend voraus. Dasselbe mufs von den Arbeiten *Clairaut's*, *D'Alembert's* u. a. gesagt werden, und die vorzüglichste Ursache, welche diese Männer auf jene Annahme geleitet haben, mufs wohl in der Vereinfachung der Berechnung gesucht werden, welche sie dadurch erreichen wollten. Seitdem blieb man auch gröfstentheils bei dieser Anordnung stehen, weil dieselbe Ursache auch auf ihre Nachfolger fortwirkte, und ich ge-

stehe, daſs dieses auch in meinem ersten optischen Aufsätze dieser Zeitschrift (III. Vol. II. Heft), gleichsam der althergebrachten Sitte gemäſs, geschehen ist, obschon bei der von mir vorgeschlagenen *indirecten* Berechnung eines Doppelobjectivs durch die Annahme unendlich nahe an einander liegender Linsen die Arbeit nur wenig oder um nichts erleichtert wird, während im Gegentheile die directe Auflösung des Problemes dadurch beträchtlich vereinfacht werden kann. Auch *Dollond*, der das Mittel, Farbenlosigkeit zu erzeugen, durch unmittelbares *Aufeinanderlegen* seiner Prismen gefunden hat, konnte sich gleichsam nicht von dieser ersten Ansicht trennen, und behielt diese Berührung der beiden Glasarten auch bei den Linsen seiner Objective bei, und die ihm nachfolgenden Optiker entfernten sich von dieser durch ihn gleichsam geheiligten Gewohnheit eben so wenig in der Ausführung, als es die Nachfolger *Euler's* in ihren theoretischen Untersuchungen gethan zu haben scheinen.

Ist aber diese alte Stellung der beiden Linsen des Objectives auch in der That die vortheilhafteste? Oder läſst sich durch die Trennung derselben nicht vielleicht ein anderer für diese Instrumente wichtiger Zweck erreichen?

Um diese Fragen zu beantworten, sey Δ die Entfernung der beiden Linsen, die Brennweite der ersten als Einheit vorausgesetzt, so hat man (a. a. O. Seite 139), wenn man die dort gegebene Gleichung VI. unserem Zwecke gemäſs entwickelt, und $d = d' = 0$ setzt, für die Vereinigungsweite der Centralstrahlen nach der vierten Brechung, von der letzten brechenden Fläche gezählt, in einem achromatischen Fernrohre

$$B' = \frac{(1 - \Delta)^2}{1 - \mu - \Delta},$$

wo P die vorige Bedeutung hat. Daraus findet man leicht, dafs die Länge dieses Fernrohres

$$L' = \frac{1 - \Delta (P + 1)}{1 - (P + \Delta)}$$

ist, während in der alten Stellung des Objectivs, wo sich die beiden Linsen sehr nahe berühren, die Länge des Fernrohres

$$L = \frac{1}{1 - P}$$

seyn würde. Dieses vorausgesetzt, welches ist der Werth von Δ, durch den sich, ohne Rücksicht auf die Verschiedenheit der Glasgattungen, die Länge des Fernrohres verkürzen läfst?

Da $L > L'$ seyn soll, so wird der gesuchte vortheilhafteste Werth von Δ derjenige seyn, welcher die Gröfse

$$L - L' = \frac{P^2 \Delta}{(1 - P)(P + \Delta - 1)} \ . \ . \ . \ (I.)$$

positiv und so grofs als möglich macht. Da aber die Werthe von B' und L', ihrer Natur nach, ebenfalls positiv seyn müssen, so hat man, wie aus den beiden ersten Gleichungen folgt, die Bedingungsgleichungen

$$\Delta < 1 - P \quad \text{und} \quad \Delta < \frac{1}{1 + P}.$$

Allein die erste dieser Bedingungsgleichungen, welche übrigens die zweite schon in sich schliefst, steht in directem Widerspruche mit der Gleichung (I.), nach welcher $\Delta > 1 - P$ seyn mufs, damit $L - L'$ positiv werden kann. Daraus folgt, dafs es keinen Werth von Δ gibt, der das Fernrohr kürzer machen könnte, oder dafs es für $\Delta = 0$ am kürzesten ist, worin sich also die alte Anordnung des Objectivs zu ihrem Vortheile auszeichnet.

Diese Entdeckung, wenn sie eine solche genannt werden kann, that mir leid. Denn hätte ich die zweite Linse von Flintglas von der ersten bedeutend trennen;

und sie z. B. bis über die Mitte des Fernrohres führen können, so hätte ich zugleich den hier eigentlich gesuchten Zweck erreicht, viel *kleinere* Linsen von Flint anwenden zu können, während sie bisher, bei der alten Anordnung, mit der Linse von Kronglas von ganz gleicher Gröſse genommen werden muſste. Mit jener Verkleinerung der Flintlinse bis auf ihren halben oder selbst bis auf ihren vierten Theil wäre aber der oben erwähnten doppelten Forderung gröſstentheils abgeholfen, und der Ausübung auf halbem Wege entgegen gekommen gewesen; wir hätten Fernröhre erhalten, die, ohne in ihren übrigen Leistungen etwas zu verlieren, viel kürzer geworden wären, als die alten, und doch nur ganz kleine Linsen von Flintglas voraussetzten, von welchem, der allgemeinen Klage zu Folge, eben die gröſseren in der erforderlichen Reinheit so ungemein schwer zu verfertigen seyn sollen.

Ich muſste daher den ganzen Einfall, wie so viele Andere, als unfruchtbar zur Seite legen, und mich mit dem Spruche *Cicero's* an seinen *Atticus* trösten: *De eo, quod scribis, nihil est.* — Nach einiger Zeit wollte ich zusehen, ob es nicht wenigstens einige Werthe von Δ gebe, die, wenn sie schon einmal alle das Rohr verlängern müssen, es doch vielleicht nur unbedeutend oder nur so viel verlängern, daſs dadurch jene Verminderung der Flintlinse, die immer sehr wünschenswerth blieb, beträchtlich überwiegend würde.

Nimmt man also $\Delta = x(1 - P)$, so soll wenigstens die Gröſse

$$L' - L = \frac{P^2 x}{(1 - P)(1 - x)}$$

positiv und so klein als möglich werden. Für unsere bisher gebräuchlichen Glasarten ist aber P nahe 0.5 bis 0.7, also z. B. im letzten Falle

$$L' - L = \frac{1.63\,x}{1 - x},$$

woraus folgt, daſs x sehr klein, und daher Δ noch viel kleiner seyn muſs, damit die neue Länge des Fernrohres nicht zu groſs werde, so daſs also auch von dieser Seite nichts von der vorgeschlagenen Entfernung der Linsen gewonnen wird, und daſs es daher immer am vortheilhaftesten bleibt, beide Linsen, wie man bisher gethan hat, so nahe als möglich an einander zu legen.

Allein ganz anders verhält sich die Sache, wenn man sie auf die oben erwähnten Glasarten anwendet, welche einer oder mehreren der im Eingange aufgestellten vier Bedingungen entsprechen. Da für diese neue Glasgattungen die Gröſse P viel kleiner ist, als bei den alten, so kann man für x viel gröſsere Werthe wählen, ohne dadurch die Länge des Fernrohres bedeutend zu vermehren, während im Gegentheile durch denselben gröſseren Werth von x die Distanz der beiden Linsen beträchtlich groſs, und daher die zweite Linse von Flint viel kleiner gemacht werden kann. Dieſs wird sich bequem durch folgende kleine Tafel übersehen lassen, in welcher die beiden ersten Columnen die Glasart und den willkührlich gewählten Werth von x enthalten; die dritte gibt die Distanz Δ der beiden Objectivlinsen, die vierte die durch diese Distanz verursachte Verlängerung des Rohres dL, die Brennweite der ersten Linse von Kronglas als Einheit vorausgesetzt, und die fünfte Columne gibt endlich den Durchmesser der Öffnung der Flintlinse, jenen der Kronlinse als Einheit angenommen.

p	x	Δ Distanz der Linsen des Objectivs.	dL Verlängerung des Fernrohrs	Verkleinerte Öffnung der Flintlinse.
0.3	$1/2$	0.35	0.13	0.65
	$3/4$	0.52	0.38	0.48
0.2	$1/2$	0.40	0.05	0.60
	$3/4$	0.60	0.15	0.40
0.1	$1/2$	0.45	0.01	0.55
	$3/4$	0.67	0.03	0.33

Ist also z. B. für den ersten Fall dieser Tafel die Brennweite der Kronglaslinse zwei Fuſs, und ihr Öffnungsdurchmesser vier Zoll, so wird, wenn man die beiden Linsen in die Entfernung von 0.7 Fuſs von einander bringt, dadurch die Länge des Rohres um 0.26 Fuſs vergröſsert, aber der Durchmesser der Flintglaslinse wird dafür nur den 0.65sten Theil der ersten Linse, oder nur 2.6 Zoll betragen. Die Länge des Fernrohres, die für $n = 1.53$, $n' = 1.58$ und $\Delta = 0$ gleich 2.86 Fuſs gewesen wäre, wird jetzt für $\Delta = 0.35$ oder für $\Delta = 0.7$ Fuſs gleich 3.12 Fuſs seyn.

Noch bedeutender werden diese Verkleinerungen der Flintlinse in den folgenden Fällen der Tafel, wo z. B. in dem letzten Falle dieselbe gleich 1.32 Zoll beträgt, während der Durchmesser der ersten Linse von Kronglas vier Zoll hat.

Die vorgeschlagenen Glasarten, welche einer oder besser noch mehreren der oben aufgestellten vier Bedingungen genug thun, haben also den Vortheil, daſs man von ihnen nur *kleine* reine Stücke, selbst für unsere gröſsten Fernröhre nöthig hat, und zwar desto kleinere,

je mehr das Glas jenen Bedingungen entspricht, oder je kleiner der Werth von P ist. Für das gröſste bisher von *Fraunhofer* für *Dorpat* construirte Fernrohr von 9 Zoll Öffnung wird eine Flintglaslinse von der letzten Art der vorhergehenden Tafel, für die $P = 0.1$ ist, von noch nicht 3 Zollen im Durchmesser hinreichen. Zwar wird, wie wir gesehen haben, durch die Ausführung dieses Vorschlages zugleich die Länge des Rohres etwas vergröſsert, aber diese Vergröſserung ist erstens nur sehr gering in Beziehung auf den viel wichtigeren Vortheil einer so beträchtlichen Verminderung der zweiten Linse, da jene Verlängerung nur selten eine oder zwei Zehntheile der Brennweite der ersten Linse beträgt, und sie ist überdieſs, was hier vorzüglich bemerkt zu werden verdient, nicht einmal als eine wahre Verlängerung des Fernrohres zu betrachten, da dasselbe eben durch diese neue Glasart schon früher, auch wenn man $\Delta = 0$ setzt, in einem viel *gröſseren* Verhältnisse *verkleinert* worden ist. So beträgt in dem so eben angeführten ersten Fall der Tafel die Länge des Fernrohres 2.86 Fuſs für $\Delta = 0$, während es für $\Delta = 0.7$ um 0.26 Fuſs gröſser, also gleich 3.12 Fuſs wird. Allein mit unserem gewöhnlichen Flintglase, für welches wir nahe $\varpi = 0.6$ oder $P = 0.66$ haben, würde die Länge dieses Fernrohres, nach der zweiten der oben aufgestellten Gleichung $L = \frac{1}{1 - P}$, gleich 2.94 der Brennweite der Kronglaslinse, oder gleich 5.88 Fuſs seyn, so daſs daher, durch die Ausführung unseres Vorschlages, diese Länge des Fernrohres nicht um 0.26 Fuſs *vermehrt*, sondern eigentlich um volle 2.76 Fuſs *vermindert* wird, da sie mit dem bisher gewöhnlichen Flintglase 70, und mit dem für $P = 0.3$ nur 37 Zoll beträgt, eine Verminderung, die für $P = 0.2$ noch bedeutend kleiner wird.

Aus allem Vorhergehenden folgt daher, dafs man mit einer Glasart, für welche der Werth von P beträchtlich kleiner ist, als für die bisher gewöhnlichen, die Länge der Fernröhre sehr verkürzen, und dafs man überdiefs, wenn man die beiden Linsen in bestimmte Entfernungen von einander stellt, mit viel kleineren Flintglaslinsen, als den bisher gebrauchten, dieselbe Wirkung erreichen könne.

* * *

Es ist nun noch übrig, die Methode der Berechnung eines nach diesem Vorschlage eingerichteten Fernrohres anzugeben, wobei ich der Kürze wegen die im III. Bande, Seite 136 eingeführte Bezeichnung beibehalten werde *), so wie ich aus derselben Ursache die etwas umständlichen, aber den mit diesen Gegenständen vertrauten Lesern leicht aufzufindenden Beweise der nun folgenden Ausdrücke übergehen darf.

Da die hier zu suchende Bestimmung der beiden Halbmesser bekanntlich auf eine quadratische Gleichung führt, und die vier Wurzeln dieser doppelten Gleichung oft nur sehr wenig von einander verschieden sind, so wird zuerst eine vorläufige genäherte Auflösung des Problemes nothwendig, welche durch folgende Ausdrücke gegeben wird, bei welcher Auflösung übrigens dieselben drei Bedingungen zu berücksichtigen seyn sollen, deren ich schon Vol. III., Seite 144 umständlich erwähnt habe.

Ist also, wie dort, n und n' die Brechung, und

---

*) In der ersten Gleichung, Seite 138, ist durch einen Schreib- oder Druckfehler das Zeichen — vor ρ' im Zähler ausgelassen worden, so dafs diese Gleichung seyn soll

$$\text{Sin.}\, b' = (-\rho' - A' + d')\, \frac{\text{Sin.}\,(A')}{\rho'}.$$

dn, dn' die Zerstreuung der beiden Glasarten, und $\varpi = \frac{dn}{dn'}$, so wie $P = \frac{(n'-1)\varpi}{n-1}$, so sey

$$\mu = \frac{n(4n-1)}{8(n-1)^2 . (n+2)}, \quad \nu = \frac{4(n-1)^2}{4n-1},$$

$$\mu' = \frac{n'(4n'-1)}{8(n'-1)^2 . (n'+2)}, \quad \nu' = \frac{4(n'-1)^2}{4n'-1}$$

$$\text{und } \sqrt{\lambda - 1} = \frac{4(n^2-1)}{2n\sqrt{4n-1}},$$

$$p' = -\frac{(1-\Delta)^2}{P}, \quad a' = -(1-\Delta) \text{ und } \alpha' = \frac{(1-\Delta)^2}{1-(P+\Delta)}.$$

Kennt man so die Größen μ, ν, μ', ν', λ, p', a' und α', so findet man die beiden Halbmesser r' und ρ' der zweiten Linse durch die Gleichungen

$$\frac{1}{r'} = \frac{L}{\alpha'} + \frac{M}{a'} + \frac{N.\sqrt{\lambda'-1}}{p'} \quad \text{und}$$

$$\frac{1}{\rho'} = \frac{L}{\alpha'} + \frac{M}{a'} - \frac{N.\sqrt{\lambda'-1}}{p'},$$

$$\text{wo } \lambda' = -\frac{\mu\lambda p'^3}{\mu' a'^4} - \frac{\nu' p'^2}{a' \alpha'} \text{ und}$$

$$L = \frac{4+n'-2n'^2}{2(n'-1)(n'+2)}, \quad M = \frac{n(2n'+1)}{2(n'-1)(n'+2)}$$

$$\text{und } N = \frac{n'\sqrt{4n'-1}}{2(n'-1)(n'+2)} \text{ ist.}$$

Diese Ausdrücke setzen die Brennweite der ersten Linse als Einheit, und zugleich diese erste Linse als gleichseitig, also $r = \rho = 2(n-1)$ voraus. Die Berechnung derselben läfst sich übrigens durch mehrere Tafeln sehr abkürzen, bei denen ich mich aber hier nicht weiter aufhalte, und nur noch bemerke, dafs negative Werthe von r' oder ρ' zu concaven Flächen der zweiten Linse gehören.

Kennt man so einen der beiden Werthe von r' beinahe durch die vorhergehende directe, aber nur genä-

herte Auflösung, so wird man die zwar indirecte, aber ganz strenge Auflösung des Problemes bequem nach den Gleichungen der Seite 137 des III[ten] Bandes beginnen, wobei aber bemerkt werden mufs, dafs die zwei letzten Gleichungen der Seite 147 sich auf die dort aufgestellte Voraussetzung von $\Delta = 0$ beziehen, die hier nicht mehr Statt hat. Um das hieher Gehörende zur leichteren Übersicht beisammen zu haben, werde ich die Ausdrücke, wie sie in der Ordnung ihrer Entwicklung auf einander folgen, mittheilen, wobei die höheren Potenzen der Dicke d der ersten Linse weggelassen, $d = 0$ gesetzt, und endlich die Distanz Δ der beiden Linsen ganz genau berücksichtiget wurde.

Man sucht also zuerst den Werth von B' aus der Gleichung

$$\frac{1}{B'} = \frac{1}{1-\Delta} - \frac{(n'-1)\varpi}{(n-1)(1-\Delta)^2}$$
$$+ \left[\frac{n(n-1)^2(1-\Delta) - (n'-1)[(n-1)^2\Delta + n^2 - 1]\varpi}{4n^2(n-1)^2(1-\Delta)^3}\right].d \ldots \text{(II.)}$$

Mit einem angenommenen ersten Einfallswinkel a findet man dann die Gröfsen α, (A), b, β und (B), die, so wie die folgenden gleichnamigen, die in Vol. III., Seite 136 angegebene Bedeutung haben, durch die Ausdrücke

$$\text{Sin.}\,\alpha = \frac{1}{n}\,\text{Sin.}\,a,$$
$$(A) = a - \alpha,$$
$$\text{Sin.}\,b = \text{Sin.}\,\alpha + \frac{(2r-d)}{r}\,\text{Sin.}\,(A),$$
$$\text{Sin.}\,\beta = n\,\text{Sin.}\,b \quad \text{und}$$
$$(B) = (A) + \beta - b,$$

wo $r = \rho = 2(n-1)$ ist. Alles Vorhergehende ist von jeder Hypothese unabhängig, und darf daher nur ein Mal berechnet werden.

Dann sucht man mit dem aus der vorhergehenden

directen Auflösung erhaltenen genäherten Werthe von r' die Gröfse ρ' aus

$$\frac{1}{\rho'}+\frac{1}{r'}=-\frac{\varpi}{(n-1)(1-\Delta)^2}-\frac{[(n-1)^2\Delta+n^2-1]}{4n^2(n-1)^2(1-\Delta)^3}\varpi d \ldots \text{(III.)},$$

und damit endlich die Gröfsen a', α', (A') ... (B') und B' aus den Gleichungen

$$\text{Sin.}\,a' = \frac{(r+r'+\Delta)}{r'}\,\text{Sin.}\,(B) - \frac{r}{r'}\,\text{Sin.}\,\beta,$$

$$\text{Sin.}\,\alpha' = \frac{1}{n'}\,\text{Sin.}\,a',$$

$$(A') = (B) + \alpha' - a',$$

$$\text{Sin.}\,b' = \frac{(r'+\rho')}{\rho'}\,\text{Sin.}\,(A') - \frac{r'}{\rho'}\,\text{Sin.}\,\alpha',$$

$$\text{Sin.}\,\beta' = n'\,\text{Sin.}\,b',$$

$$(B') = (A') + \beta' - b' \quad \text{und}$$

$$B' = \rho'\,\frac{\text{Sin.}\,\beta'}{\text{Sin.}\,(B')} - \rho'.$$

Sollte der aus der letzten Gleichung erhaltene Werth von der vierten Vereinigungsweite B der Randstrahlen nicht genau genug mit der aus der vorhergehenden Gleichung (II.) erhaltenen vierten Vereinigungsweite B' der Centralstrahlen übereinstimmen, so wird man mit einem etwas veränderten Werth von r' den letzten Theil der Rechnung wiederholen, und dann nach dem Vol. III., Seite 148 angezeigten Verfahren sich der Wahrheit leicht so weit nähern, als man für jeden speciellen Fall wünscht, oder als es unsere Logarithmentafeln mit sieben Decimalstellen erlauben.

Es wird vielleicht nicht überflüssig seyn, das Vorhergehende durch ein Beispiel zu erläutern, und wir wollen dazu dieselben Glasarten wählen, die ich in meinem früheren öfter erwähnten Aufsatze, Seite 149, bereits unter der Voraussetzung von $\Delta = 0$ berechnet habe, und für die man hat $n = 1.53$ und $n' = 1.58$, mit

dem Unterschiede, dafs wir für die Gröfse $\varpi = \frac{dn}{dn'}$, für welche wir dort $\frac{2}{3}$ angenommen haben, hier $\varpi = \frac{1}{6}$ voraussetzen wollen.

Sey ferner, die Brennweite der ersten Linse als die Einheit aller Dimensionen des Fernrohres betrachtet, die Distanz der beiden Linsen $\Delta = 0.63522$ und $d = 0$, so hat man zuerst für die genäherte directe Auflösung

$\mu = 0.9875$, $p' = -0.73133$, $L = 0.1414$,
$\mu' = 0.8724$, $a' = -0.36478$, $M = 1.5827$,
$\nu' = 0.2529$, $\alpha' = +0.72787$, $N = 0.9775$,
$\lambda = 1.6001$, $r = \rho = 1.06$,
$P = 0.1823899$,

und damit findet man $\lambda' = 40.509$ und

$$r' = -0.17373,$$
$$\rho' = +0.29426,$$

oder auch, wegen dem doppelten Werthe der Quadratwurzel

$$r' = +0.10719,$$
$$\rho' = -0.08556.$$

Wählt man das erste Paar, welches die gröfseren Halbmesser gibt, und daher vortheilhafter ist, so gibt die Gleichung (II.) den Werth von $B' = 0.7295597$. Ferner gibt der erste Einfallswinkel $a = 10^\circ$

$$\alpha = 6^\circ\ 31'\ 0''.7,$$
$$(A) = 3^\circ\ 28'\ 59''.3,$$
$$b = 13^\circ\ 35'\ 30''.9,$$
$$\beta = 21^\circ\ 4'\ 22''.9,$$
$$(B) = 10^\circ\ 57'\ 51''.3.$$

Mit dem genäherten Werthe von $r' = -0.17$ findet man jetzt durch die Gleichung (III.)

$$\rho' = +0.2842,$$

und damit

$$\begin{aligned}
a' &= 32^\circ\ 22'\ 40'',\\
\alpha' &= 19^\circ\ 48'\ 40'',\\
(A') &= -\ 1^\circ\ 36'\ 10'',\\
b' &= 11^\circ\ \ 2'\ 30'',\\
\beta' &= 17^\circ\ 36'\ 50'',\\
(B') &= 4^\circ\ 58'\ 10'',\\
B' &= 0.70853,
\end{aligned}$$

also der Fehler dieser ersten Hypothese $dB' = 0.02103$.

Eben so gibt eine zweite Hypothese $r' = -0.165$, $\rho' = +0.27046$ und $B' = 0.7208979$, also der Fehler $dB' = 0.0086618$, wodurch man endlich findet

Halbmesser der ersten Linse $r = \rho = +1.06$ biconvex,
Halbmesser der zweiten Linse $r' = -0.16188$ concav,
$\rho' = +0.2621811$ convex.

Um zu prüfen, ob die mittleren Central- und Randstrahlen bei dieser Anordnung der Halbmesser nach ihren vierten Brechungen zusammen fallen, hat man mit den letzten Werthen von r' und ρ' nach den vorhergehenden Gleichungen

$$\begin{aligned}
a' &= 33^\circ\ 33'\ 46''.01,\\
\alpha' &= 20^\circ\ 28'\ 53''.47,\\
(A') &= -\ 2^\circ\ \ 7'\ \ 1''.24,\\
b' &= 11^\circ\ 38'\ 55''.62,\\
\beta' &= 18^\circ\ 36'\ 13''.39,\\
(B') &= 4^\circ\ 50'\ 16''.53,
\end{aligned}$$

Vereinigungsweite $\begin{cases} B' = 0.7295645 \text{ für die äufsersten Randstrahl} \\ B' = 0.7295597 \text{ für die Centralstrahlen,} \end{cases}$

Differenz 0.0000048,

also ist bei dieser Einrichtung des Fernrohres die Abweichung der Stahlen wegen der sphärischen Gestalt der Linsen sehr gut gehoben, und dasselbe hat auch für die Abweichung wegen der Farbenzerstreuung Statt. — Dividirt man die vorhergehenden Werthe der Halbmesser

in Mineralien auftritt, herrühre; erhitzte ich denselben auf einer Kohle vor dem Löthrohre, wobei ein weifser pulveriger Rückstand von Magniumoxyd zurückblieb.

Zur Ausmittelung eines möglichen Lithiongehalts des Wassers wurden 10,000 Grane desselben verdünstet, durch zweimaliges Schmelzen und Wiederauflösen des Salzrückstandes im Wasser von allem durch Sodiumoxyd zurückgehaltenen Magniumoxyd vollkommen gereinigt, und hierauf mit basisch-phosphorsaurem Ammoniak versetzt; nicht die mindeste Trübung wurde wahrgenommen, und nach Verdünstung der Flüssigkeit zur Trockne, und Wiederauflösen des Salzes in wenig Wassers, blieb keine Spur eines Lithiondoppelsalzes zurück.

28. Da wir nun die Menge aller Bestandtheile unseres Mineralwassers theils unmittelbar, theils mittelbar kennen, so müssen wir die auf beide Arten bestimmte Kohlenstoffsäure auch noch in ihrer Totalmenge darzustellen suchen. In 1., 2. und 3. haben wir die beim Siedepuncte des Wassers ausgeschiedene Menge derselben bestimmt, und haben dann nur noch diejenige quantitative zu bestimmen, welche an die im kohlenstoffsäuerlichen Zustande in dem Wasser zurückgebliebenen Oxyde gebunden geblieben ist, und deren Menge *b*, *c*, *d*, *e* und *f* des folgenden Verzeichnisses für 10,000 Gr. unseres Wassers ausdrückt.

a.	Herrn M. Dr. *Carl's* Versuchen zu Folge (1. u. 3.) enthalten 10,000 Gr. desselben beim Siedepuncte entweichender Kohlenstoffsäure	27.574800 Gr.
b.	Den 31,85014 Gr. kohlenstoffsäuerlichen Sodiumoxyds (17.) entsprechen	13,189540 »
c.	Den 3,50525 Gr. Calciumoxyds (23.) entsprechen	2,719750 »
	Fürtrag .	43,484090 Gr.

	Übertrag .	43,484090 Gr.
d.	Den 0,039225 Gr. Strontiumoxyds (24.) entsprechen	0,016725 »
e.	Den 0,0552 Gr. Baryumoxyds (25.) entsprechen	0,015925 »
f.	Den 0,1976 Gr. Magniumoxyds (26.) entsprechen endlich	0,211313 »
	Totalgewicht der in 10,000 Gr. Wassers enthaltenen Kohlenstoffsäure . . .	43,728053 Gr.

29. Jetzt wollen wir zur Anordnung der einfachen und zusammengesetzten Bestandtheile des Wassers schreiten. Ohne Zweifel findet eine solche Anordnung unter denselben Statt, dafs ein jedes Oxyd mit allen vorhandenen Säuren, oder, was dasselbe ist, jede Säure mit allen vorhandenen Oxyden verbunden ist, welches dann auch bei den vorhandenen Salzbildern und den metallischen Grundlagen der Oxyde angenommen werden müfste. Wollten wir nun eine solche Anordnung versuchen, und *Berzelius's* richtige Ansicht über die Salzbilder, dafs ihre Verbindungen mit anderen einfachen Stoffen nämlich, selbst in im Wasser gelösten Zustande, immer noch als binär angesehen werden müssen, annehmen: so hätten wir in diesem Wasser 9 Chloride, eben so viele Jodide, Bromide und Fluoride, 9 kohlenstoffsaure Salze, und 8 Silicate oder kieselsaure Salze, so dafs das Wasser dann als eine Lösung, oder in einigem Sinne vielmehr, als eine chemische Verbindung von 53 theils binären, theils quaternären Verbindungen betrachtet werden könnte. Da indessen die Darstellung der relativen Quantitäten solcher Verbindungen nicht möglich ist, und es auch wohl niemals werden kann: so müssen die bekannten Gesetze der chemischen Verwandtschaft zu Rathe gezogen, und nach ihnen die wirkliche Anordnung der Bestandtheile vorgenommen werden.

30. Berücksichtigt man nun diese Gesetze und die gleich im Anfange angezeigten und im Verfolge der Analyse bestimmten Bestandtheile, so ergibt sich: dafs das Chlor vorzugsweise mit der im Wasser befindlichen Menge Kaliums und sein Überrest mit Sodium, das Brom und Jod aber mit Sodium verbunden sind, während das Fluor entweder eine binäre Verbindung mit einem Theile des vorhandenen Calciums, oder aber eine ternäre, aus Fluor, Calcium und Silicium bestehende Verbindung bildet. Dafs übrigens das von den oben angeführten Verbindungen übrig gebliebene Sodium als Oxyd, und die übrigen im Wasser gefundenen Oxyde — das Siliciumoxyd abgerechnet, welches wir für sich anführen wollen — mit der im Übermafse vorhandenen Kohlenstoffsäure als neutrale kohlenstoffsaure Salze — Bicarbonate — anzuordnen sind, braucht wohl kaum erwähnt zu werden.

31. Aus 17. ist uns die Menge der Chlor-, Brom- und Jodverbindungen schon bekannt. Was das Fluor, als den in unserem Wasser befindlichen vierten Salzbilder betrifft, so erfordern die für 10,000 Gr. Wassers gefundenen 0,02776 Gr. desselben 0,04222 Gr. Calciums, die wir auch in dem aus dem in 18. analysirten Fluorcalcium dargestellten kohlenstoffsäuerlichen Calciumoxyd finden müssen, weil nur aus diesem die Menge des Fluors berechnet wurde. Es ist dann:

$$\frac{57{,}0 \times 0{,}75}{101{,}25} = 0{,}4222\ldots \quad \text{und} \quad \frac{0{,}4222\ldots}{10} = 0{,}04222\ldots,$$

wornach also 10,000 Gr. dieses Wassers

$$0{,}02776 + 0{,}04222 = 0{,}06998 \text{ Gr.}$$

Fluorcalciums enthalten.

32. Nach 17. lieferten 10,000 Gr. Wassers 31,85014 Gr. kohlenstoffsäuerlichen Sodiumoxyds. Da nun dieses

Salz neben freier Kohlenstoffsäure nicht als solches, sondern nur als ein neutrales bestehen kann, und die angegebene Menge noch 13,18954 Gr. Kohlenstoffsäure zur vollständigen Sättigung erfordert; so müssen 10,000 Gr. unseres Wassers 45,03968 Gr. (neutrales) kohlenstoffsaures Sodiumoxyd enthalten.

33. Auch die Oxyde des Calciums, Baryums, Strontiums und Magniums, so wie auch die Protoxyde des Eisens und des Mangans sind nur als Bicarbonate im Wasser löslich, und müssen als in diesem Zustande in unserem Wasser vorhanden angesehen werden. Um aber in diesen Zustand verwandelt zu werden, erfordern an Kohlenstoffsäure die in 10,000 Gr. Wassers gefundenen

3,505250	Gr.	Calciumoxyds	5,439500	Gr.,	und	bilden	damit	8,944750	Gr.	$CaO + CO^4$,
0,055200	»	Baryumoxyds	0,031850	»	»	»	»	0,087050	»	$BaO + CO^4$,
0,039225	»	Strontiumoxyds	0,033450	»	»	»	»	0,072675	»	$SrO + CO^4$,
0,197600	»	Magniumoxyds	0,422626	»	»	»	»	0,620226	»	$MgO + CO^4$,
0,061600	»	Eisenprotoxyds	0,077482	»	»	»	»	0,139082	»	$FeO + CO^4$,
0,032450	»	Manganprotoxyds	0,039330	»	»	»	»	0,071780	»	$MnO + CO^4$,

wie man sich durch eine kleine Rechnung überzeugen kann.

34. In 28. haben wir gesehen, dafs sämmtliche in 10,000 Gr. Wassers vorfindige Kohlenstoffsäure 43,728053 Gr. betrage. Ziehen wir nun diejenige Quantität davon ab, welche zur Bildung von kohlenstoffsauren Salzen (Bicarbonaten) mit den in derselben Menge Wassers gefundenen

Oxyden erforderlich ist, so bleiben

43.728053 — 32,423318 = 11.314735 Gr.

für diejenige Kohlenstoffsäure übrig, welche im freien Zustande in 10,000 Gr. unseres Wassers enthalten ist, und von deren Zurückkehren in den elastisch-flüssigen Zustand das sehr starke Blasenwerfen in grofsen, und Perlen in kleinen Quantitäten desselben herrührt.

Die folgende Tabelle zeigt nun, der vorhergegangenen Analyse zu Folge, die Quantitäten der in 10,000 Gr. der Luhatschowitzer Trinkquelle gefundenen Bestandtheile im wasserfreien Zustande in W. Medicinalgranen an, wobei ich nur zu erwähnen habe, dafs dieselben blofs wegen einigen in diesem Mineralwasser in sehr geringer Menge vorkommenden Bestandtheilen, als Jod, Brom, Fluor etc. bis in die sechste Decimalstelle angegeben werden mufsten, keineswegs aber in einer ins Kleinliche gehenden Genauigkeitssucht zu suchen sind.

35. Tabellarische Übersicht der in 10,000 Gran. des aus der Luhatschowitzer Trinkquelle — Vincentiusbrunnen — geschöpften Wassers enthaltenen Bestandtheile im wasserfreien Zustande.

Namen der Bestandtheile — sämmtliche als Anhydrate.	Gewicht in Wiener Apothekergranen.
Freie Kohlenstoffsäure . . .	12,602000
Chlorkalium	2,588700
Chlorsodium	23,921800
Bromsodium	0,053740
Jodsodium	0,085620
Fluorcalcium	0,069980
Fürtrag .	39,321840

Namen der Bestandtheile — sämmtliche als Anhydrate.	Gewicht in Wiener Apothekergranen.
Übertrag .	39,321840
Kohlenstoffsaures Sodiumoxyd .	45,039680
» Calciumoxyd .	8,944750
» Baryumoxyd .	0,087050
» Strontiumoxyd	0,072675
» Magniumoxyd	0,620226
» Eisenprotoxyd	0,139082
» Manganprotox.	0,071780
Siliciumoxyd	0,480000
Zusammen .	94.777083
Wasser	9905.222917
Zusammen .	10,000 Gr.

Aus dieser Übersicht ergibt sich nun, dafs dieses Wasser 94,777 Gr. an theils elastisch-flüssigen, theils festen Bestandtheilen in 10,000 Gr. enthält; und da die versandten Flaschen immer zu 20,000 bis 20,300 Gran Wassers enthalten, so wäre der Gehalt einer solchen Flasche an mineralischen Substanzen immer circa 189,5 bis 200 W. Medicinalgrane anzunehmen, wenn die im Wasser ursprünglich vorhandene freie Kohlenstoffsäure nicht durch vorsetzliches Offenlassen der gefüllten Flaschen, um sie vor dem Zerspringen zu sichern, wenigstens zur Hälfte entwichen wäre. Diesem Übel könnte indessen die Brunnenanstalt dadurch steuern, dafs zum Vortheile Derjenigen, welche dieses Mineralwasser in seinem ganz unveränderten Zustande geniefsen wollten, immer eine Anzahl steingutener Krüge damit unter dem Wasserspiegel des Brunnens gefüllt und wohl verkorkt und verpicht versandt würde.

III.

Entwickelungen der allgemeinen Eigenschaften einiger Ausdrücke, welche in der Theorie der geraden Linie und der Ebene vorkommen;

von

Franz Xav. Moth.

---

1. Wenn xyz die drei rechtwinkligen Coordinaten eines Punctes im Raume sind, so ist es bekannt, daſs die Beziehung

$$A.x + B.y + C.z = 0$$

die Gleichung einer durch den Anfangspunct der Coordinaten gelegten Ebene sey.

Betrachten wir nun zwei solche Ebenen, und es seyen ihre Gleichungen:

$$A'.x + B'.y + C'.z = 0,$$
$$A''.x + B''.y + C''.z = 0.$$

Jene Ebene wollen wir mit I., diese aber mit II. bezeichnen.

Nimmt man beide Gleichungen als coëxistirend an, so daſs die Werthe der Coordinaten xyz in der einen Gleichung dieselben sind, als in der andern; so werden diese zugleich die Werthe der Coordinaten der Durchschnittslinie jener zwei Ebenen seyn.

Eliminirt man aus den Gleichungen der Ebenen I., II. zuerst z, hierauf y, endlich x, so wird man nachstehende drei Gleichungen erhalten:

$$\left.\begin{array}{l}(B'C'' - B''C').y - (A''C' - A'C'').x = 0\\(B'C'' - B''C').z - (A'B'' - A''B').x = 0\\(A''C' - A'C'').z - (A'B'' - A''B').y = 0\end{array}\right\}(a).$$

Die erste dieser Gleichungen gehört bekanntlich für die Projection der Durchschnittslinie jener zwei Ebenen in der coordinirten Ebene xy; eben so ist die zweite und dritte der Gleichungen (a) respective die Gleichung der Projection jener Geraden in der Ebene xz und yz. Jede dieser Gleichungen ist eine Folge der beiden anderen, und zwei derselben, zusammen betrachtet, gehören für die Durchschnittslinie jener zwei Ebenen im Raume. Da die beiden Ebenen I., II. durch den Anfangspunct der Coordinaten gehen, so geht auch ihre gemeinschaftliche Durchschnittslinie durch diesen Punct, wie die Gleichungen (a) unmittelbar zeigen.

In den Gleichungen (a) erscheinen nun zunächst, als die Coefficienten der Coordinaten xyz die zweitheiligen Ausdrücke:

$$(B'C'' - B''C'); \quad (A''C' - A'C''); \quad (A'B'' - A''B').$$

Zur Bestimmung des Winkels, welchen die zwei Ebenen I. und II. mit einander machen, gibt die anal. Geometrie den Ausdruck:

$$\cos.(\text{I. II.}) = \frac{A'.A'' + B'.B'' + C'.C''}{\sqrt{(A'^2 + B'^2 + C'^2)} \cdot \sqrt{(A''^2 + B''^2 + C''^2)}};$$

dieser Ausdruck findet sich zusammengesetzt aus den zwei ähnlichen Formen

$$(A'^2 + B'^2 + C'^2) \quad \text{und} \quad (A''^2 + B''^2 + C''^2),$$

und aus der Form

$$(A'A'' + B'B'' + C'C'').$$

2. Denken wir uns jetzt durch den Anfangspunct der Coordinaten noch eine dritte Ebene gelegt, welche wir mit III. bezeichnen wollen, oder stellen wir uns überhaupt ein System dreier Ebenen I., II., III. vor, von denen sich je zwei in einer Geraden durchschneiden, und nennen wir die Durchschnittslinie der Ebenen

II., III., die Linie 1; so wie die Durchschnittslinien der Ebenen I., III.; und I.. II., die Linien 2 und 3.

Ist die Gleichung der Ebene III.:

$$A''' \,.\, x + B''' \,.\, y + C''' \,.\, z = 0,$$

so wird man noch sechs ähnliche Gleichungen wie in (a) erhalten. Man setze nun

$$\left.\begin{array}{lll} B''C''' - B'''C'' = A_{,}; & B'''C' - B'C''' = A_{,,}; & B'C'' - B'C'' = A_{,,,}; \\ A'''C'' - A''C''' = B_{,}; & A'C''' - A'''C' = B_{,,}; & A''C' - A'C'' = B_{,,,}; \\ A''B''' - A'''B'' = C_{,}; & A'''B' - A'B''' = C_{,,}; & A'B'' - A''B' = C_{,,,}; \end{array}\right\} \ldots (1),$$

so sind die Gleichungen der Projectionen:

	der Geraden 1	der Geraden 2	der Geraden 3
in der Ebene yz	$C_{,} \,.\, y - B_{,} \,.\, z = 0$	$C_{,,} \,.\, y - B_{,,} \,.\, z = 0$	$C_{,,,} \,.\, y - B_{,,,} \,.\, z = 0;$
in der Ebene xz	$A_{,} \,.\, z - C_{,} \,.\, x = 0$	$A_{,,} \,.\, z - C_{,,} \,.\, x = 0$	$A_{,,,} \,.\, z - C_{,,,} \,.\, x = 0;$
in der Ebene xy	$B_{,} \,.\, x - A_{,} \,.\, y = 0$	$B_{,,} \,.\, x - A_{,,} \,.\, y = 0$	$B_{,,,} \,.\, x - A_{,,,} \,.\, y = 0.$

Man setze ferner:

$$\left.\begin{array}{l} A'^2 + B'^2 + C'^2 = P'^2 \\ A''^2 + B''^2 + C''^2 = P''^2 \\ A'''^2 + B'''^2 + C'''^2 = P'''^2 \end{array}\right\} \ldots (2)$$

und

$$\left.\begin{array}{l} A''.A''' + B''.B''' + C''.C''' = M' \\ A'''.A' + B'''.B' + C'''.C' = M'' \\ A'.A'' + B'.B'' + C'.C'' = M''' \end{array}\right\} \ldots (3),$$

so hat man:

$$\cos.(\text{II. III.}) = \frac{M'}{P'' \,.\, P'''};\quad \cos.(\text{I. III.}) = \frac{M''}{P' \,.\, P'''};$$

$$\cos.(\text{I. II.}) = \frac{M'''}{P' \,.\, P''}.$$

3. Betrachten wir noch insbesondere das System der drei Geraden 1, 2, 3, welche durch den Anfangspunct der Coordinaten gehen. Setzt man, um abzukürzen:

$$\left.\begin{array}{l} A_{,}^2 + B_{,}^2 + C_{,}^2 = P_{,}^2 \\ A_{,,}^2 + B_{,,}^2 + C_{,,}^2 = P_{,,}^2 \\ A_{,,,}^2 + B_{,,,}^2 + C_{,,,}^2 = P_{,,,}^2 \end{array}\right\} \ldots (4)$$

und

$$\left.\begin{array}{l} A_{,,} . A_{,,,} + B_{,,} . B_{,,,} + C_{,,} . C_{,,,} = M_{,} \\ A_{,,,} . A_{,} + B_{,,,} . B_{,} + C_{,,,} . C_{,} = M_{,,} \\ A_{,} . A_{,,} + B_{,} . B_{,,} + C_{,} . C_{,,} = M_{,,,} \end{array}\right\} \ldots (5),$$

so hat man bekanntlich:

$$\cos.(2, 3) = \frac{M_{,}}{P_{,,} \,.\, P_{,,,}};\quad \cos.(1, 3) = \frac{M_{,,}}{P_{,} \,.\, P_{,,,}},$$

$$\cos.(1, 2) = \frac{M_{,,,}}{P_{,} \,.\, P_{,,}}.$$

Es ist interessant, zu bemerken, dafs sich die Ausdrücke für die Cosinusse der Winkel, welche die Durchschnittslinien der Ebenen I., II., III. gegenseitig mit einander machen, sich eben so aus den Gröfsen

$$M_{,}\ M_{,,}\ M_{,,,}\ P_{,}\ P_{,,}\ P_{,,,}$$

zusammengesetzt finden, als die Ausdrücke der Cosinusse der Winkel dieser respectiven Ebenen selbst aus den Gröfsen

$$M'\ M''\ M'''\ P'\ P''\ P'''$$

zusammengesetzt sind.

Neben diesen Ausdrücken wollen wir noch folgenden bemerken:

$$(A'B''C'''+A''B'''C'+A'''B'C''-A'B'''C''-A''B'C'''-A'''B''C') = N \ldots (6),$$

welcher, wie man weifs, in der Theorie der Ebene häufig vorzukommen pflegt.

4. Die Gröfsen $A_{,}$ $B_{,}$ $C_{,}$ $A_{,,}$ ... hängen auf eine gewisse Art und Weise von den Gröfsen A' B' C' A'' ... ab; man kann aber auf eben dieselbe Art andere Gröfsen von $A_{,}$ $B_{,}$ $C_{,}$ $A_{,,}$ ... wieder abhängen lassen. Man setze nämlich, ganz den Ausdrücken (1) analog:

$$\left.\begin{array}{c} B_{,,}.C_{,,,}-B_{,,,}.C_{,,}=\mathfrak{A}'; \quad B_{,,,}.C_{,}-B_{,}.C_{,,,}=\mathfrak{A}''; \\ B_{,}.C_{,,}-B_{,,}.C_{,}=\mathfrak{A}'''; \\ A_{,,,}.C_{,,}-A_{,,}.C_{,,,}=\mathfrak{B}'; \quad A_{,}.C_{,,,}-A_{,,,}.C_{,}=\mathfrak{B}''; \\ A_{,,}.C_{,}-A_{,}.C_{,,}=\mathfrak{B}'''; \\ A_{,,}.B_{,,,}-A_{,,,}.B_{,,}=\mathfrak{C}'; \quad A_{,,,}.B_{,}-A_{,}.B_{,,,}=\mathfrak{C}''; \\ A_{,}.B_{,,}-A_{,,}.B_{,}=\mathfrak{C}'''. \end{array}\right\} (7)$$

Es ist leicht, die geometrische Bedeutung dieser Ausdrücke nachzuweisen. Denn da die Gleichungen der Ebenen, welche durch den Anfangspunct der Coordinaten senkrecht auf die respectiven Geraden 1, 2, 3 gelegt werden, und die wir mit I_0, II_0, III_0 bezeichnen wollen, sind:

$$\begin{array}{c} A_{,}.x+B_{,}.y+C_{,}.z=0; \\ A_{,,}.x+B_{,,}.y+C_{,,}.z=0; \\ A_{,,,}.x+B_{,,,}.y+C_{,,,}.z=0; \end{array}$$

da sich ferner je zwei dieser Ebenen in einer Geraden durchschneiden (welche Durchschnittslinien respective mit 1_0, 2_0, 3_0 bezeichnet werden sollen), so werden die Gleichungen der Projectionen dieser Geraden, und zwar

	der Geraden 1_0	der Geraden 2_0	der Geraden 3_0
in der Ebene yz	$\mathfrak{C}'.y - \mathfrak{B}'.z = 0;$	$\mathfrak{C}''.y - \mathfrak{B}''.z = 0;$	$\mathfrak{C}'''.y - \mathfrak{B}'''.z = 0;$
in der Ebene xz	$\mathfrak{A}'.z - \mathfrak{C}'.x = 0;$	$\mathfrak{A}''.z - \mathfrak{C}''.x = 0;$	$\mathfrak{A}'''.z - \mathfrak{C}'''.x = 0;$
in der Ebene xy	$\mathfrak{B}'.x - \mathfrak{A}'.y = 0;$	$\mathfrak{B}''.x - \mathfrak{A}''.y = 0;$	$\mathfrak{B}'''.x - \mathfrak{A}'''.y = 0.$

Setzt man nun, den Ausdrücken (2) und (3) analog:

$$\left.\begin{array}{l} \mathfrak{A}'^2 + \mathfrak{B}'^2 + \mathfrak{C}'^2 = \mathfrak{P}'^2; \\ \mathfrak{A}''^2 + \mathfrak{B}''^2 + \mathfrak{C}''^2 = \mathfrak{P}''^2; \\ \mathfrak{A}'''^2 + \mathfrak{B}'''^2 + \mathfrak{C}'''^2 = \mathfrak{P}'''^2; \end{array}\right\} \ldots (8) \quad \text{und} \quad \left.\begin{array}{l} \mathfrak{A}''.\mathfrak{A}''' + \mathfrak{B}''.\mathfrak{B}''' + \mathfrak{C}''.\mathfrak{C}''' = \mathfrak{M}'; \\ \mathfrak{A}'''.\mathfrak{A}' + \mathfrak{B}'''.\mathfrak{B}' + \mathfrak{C}'''.\mathfrak{C}' = \mathfrak{M}''; \\ \mathfrak{A}'.\mathfrak{A}'' + \mathfrak{B}'.\mathfrak{B}'' + \mathfrak{C}'.\mathfrak{C}'' = \mathfrak{M}'''; \end{array}\right\} \ldots (9),$$

so wird man haben:

$$\cos.(\mathrm{II}_0 . \mathrm{III}_0) = \frac{M_{,}}{P_{,,} . P_{,,,}}; \quad \cos.(\mathrm{I}_0 . \mathrm{III}_0) = \frac{M_{,,}}{P_{,} . P_{,,,}}; \quad \cos.(\mathrm{I}_0 . \mathrm{II}_0) = \frac{M_{,,,}}{P_{,} . P_{,,}} \quad \text{und}$$

$$\cos.(2_0 . 3_0) = \frac{\mathfrak{M}'}{\mathfrak{P}'' . \mathfrak{P}'''}; \quad \cos.(1_0 . 3_0) = \frac{\mathfrak{M}''}{\mathfrak{P}' . \mathfrak{P}'''}; \quad \cos.(1_0 . 2_0) = \frac{\mathfrak{M}'''}{\mathfrak{P}' . \mathfrak{P}''}.$$

Endlich sey noch:

$$(A_{,} B_{,,} C_{,,,} + A_{,,} B_{,,,} C_{,} + A_{,,,} B_{,} C_{,,} - A_{,} B_{,,,} C_{,,} - A_{,,} B_{,} C_{,,,} - A_{,,,} B_{,,} C_{,}) = \mathfrak{N} \ldots (10).$$

5. Die in vorstehenden zehn Systemen von Gleichungen enthaltenen Ausdrücke besitzen eine Menge merkwürdiger und wichtiger Beziehungen gegen einander sowohl, als auch gegen ihre ursprünglichen Bestandtheile A' B' C' A'' . . . Die Erforschung der Eigenschaften dieser Ausdrücke ist nun der Hauptzweck der gegenwärtigen Untersuchungen. Um dieselben auf eine leichte Weise

zu entwickeln, und auf einem einfachen Wege zu ihrer Kenntnifs zu gelangen, werde ich noch einige aus den Gröfsen $A' B' C' A'' \ldots$ und $A_, B_, C_, A_{,,} \ldots$ zusammengesetzte Ausdrücke zu Hülfe nehmen, welche sich noch im nachstehenden Systeme zusammengesetzt finden.

$$\left.\begin{array}{l}
B' C_{,,} - B_{,,} C' = A'_{,,};\quad C' A_{,,} - A' C_{,,} = B'_{,,}; \\
\qquad A' B_{,,} - A_{,,} B' = C'_{,,}; \\
C'' B_{,} - B'' C_{,} = A''_{,};\quad A'' C_{,} - C'' A_{,} = B''_{,}; \\
\qquad B'' A_{,} - A'' B_{,} = C''_{,}; \\
C' B_{,,,} - B' C_{,,,} = A'_{,,,};\quad A' C_{,,,} - C' A_{,,,} = B'_{,,,}; \\
\qquad B' A_{,,,} - A' B_{,,,} = C'_{,,,}; \\
B''' C_{,} - C''' B_{,} = A'''_{,};\quad C''' A_{,} - A''' C_{,} = B'''_{,}; \\
\qquad A''' B_{,} - B''' A_{,} = C'''_{,}; \\
B'' C_{,,,} - C'' B_{,,,} = A''_{,,,};\quad C'' A_{,,,} - A'' C_{,,,} = B''_{,,,}; \\
\qquad A'' B_{,,,} - B'' A_{,,,} = C''_{,,,}; \\
C''' B_{,,} - B''' C_{,,} = A'''_{,,};\quad A''' C_{,,} - C''' A_{,,} = B'''_{,,}; \\
\qquad B''' A_{,,} - A''' B_{,,} = C'''_{,,};
\end{array}\right\} (11)$$

Die Eigenschaften der aus den Gröfsen $A' B' C' A'' \ldots$ formirten Ausdrücke, welche wir hier entwickeln werden, sind nicht nur an und für sich schon sehr merkwürdig, sondern auch noch wegen ihren schönen Anwendungen in einigen Theilen der Geometrie und Mechanik von grofser Wichtigkeit. Sie bestehen hauptsächlich in gewissen Relationen, welche die formirten Ausdrücke entweder gegen die ursprünglichen Gröfsen $A' B' C' A'' \ldots$ oder gegen einander haben. In dieser Beziehung unterscheide ich auch *zwei* Classen von Relationen. In denen der ersten Classe kommen die accentuirten Buchstaben ABC und $\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}\,\mathfrak{C}$ vor, während die andere Classe nur Relationen zwischen den Gröfsen $P\ M\ \mathfrak{P}\ \mathfrak{M}\ N\ \mathfrak{N}$ enthält. Diese letztern enthalten die

Grundlage einer ganz neuen und sehr einfachen Methode, alle Gleichungen der sphärischen Trigonometrie mit Eleganz, Leichtigkeit und Präcision auf eine gleichförmige Art zu entwickeln. Indem ich nun in diesem Aufsatze die allgemeinen Eigenschaften einiger in der analytischen Geometrie vorkommender Ausdrücke entwickle, habe ich zugleich die Absicht, diese Anwendungen, welche sich von ihnen zu dem gedachten Zwecke machen lassen, in einer Reihe von Aufsätzen nach und nach bekannt zu machen.

I. Classe.

Von den Beziehungen der accentuirten Gröſsen $ABC\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ sowohl gegen einander, als auch gegen die Gröſsen $PM\mathfrak{P}\mathfrak{M}$, N und $\mathfrak{N}$.

6. Von den formirten Ausdrücken sind mehrere unter mannigfaltigen Gestalten vorstellbar. Wir werden nun mit den Transformationen solcher Ausdrücke den Anfang machen. Von denen verdienen unsere Aufmerksamkeit zuerst diejenigen, welche wir mit N und $\mathfrak{N}$ bezeichneten. Man hat nämlich:

$$\left.\begin{aligned}
N &= A' \,.\, A_{,} + B' \,.\, B_{,} + C' \,.\, C_{,};\\
N &= A'' \,.\, A_{,,} + B'' \,.\, B_{,,} + C'' \,.\, C_{,,};\\
N &= A''' \,.\, A_{,,,} + B''' \,.\, B_{,,,} + C''' \,.\, C_{,,,};\\
N &= A' \,.\, A_{,} + A'' \,.\, A_{,,} + A''' \,.\, A_{,,,};\\
N &= B' \,.\, B_{,} + B'' \,.\, B_{,,} + B''' \,.\, B_{,,,};\\
N &= C' \,.\, C_{,} + C' \,.\, C_{,,} + C''' \,.\, C_{,,,}.
\end{aligned}\right\}\ \ldots\ (12)$$

Eben so ist:

$$\left.\begin{aligned}
\mathfrak{N} &= A_{,} \,.\, \mathfrak{A}' + B_{,} \,.\, \mathfrak{B}' + C_{,} \,.\, \mathfrak{C}';\\
\mathfrak{N} &= A_{,,} \,.\, \mathfrak{A}'' + B_{,,} \,.\, \mathfrak{B}'' + C_{,,} \,.\, \mathfrak{C}'';\\
\mathfrak{N} &= A_{,,,} \,.\, \mathfrak{A}''' + B_{,,,} \,.\, \mathfrak{B}''' + C_{,,,} \,.\, \mathfrak{C}''';\\
\mathfrak{N} &= A_{,} \,.\, \mathfrak{A}' + A_{,,} \,.\, \mathfrak{A}'' + A_{,,,} \,.\, \mathfrak{A}''';\\
\mathfrak{N} &= B_{,} \,.\, \mathfrak{B}' + B_{,,} \,.\, \mathfrak{B}'' + B_{,,,} \,.\, \mathfrak{B}''';\\
\mathfrak{N} &= C_{,} \,.\, \mathfrak{C}' + C_{,,} \,.\, \mathfrak{C}'' + C_{,,,} \,.\, \mathfrak{C}'''.
\end{aligned}\right\}\ \ldots\ (13)$$

$$(A'B''C'''+A''B'''C'+A'''B'C''-A'B'''C''-A''B'C'''-A'''B''C') = N \ldots (6),$$

welcher, wie man weifs, in der Theorie der Ebene häufig vorzukommen pflegt.

4. Die Gröfsen $A_{,}$ $B_{,}$ $C_{,}$ $A_{,,}$ ... hängen auf eine gewisse Art und Weise von den Gröfsen A' B' C' A'' ... ab; man kann aber auf eben dieselbe Art andere Gröfsen von $A_{,}$ $B_{,}$ $C_{,}$ $A_{,,}$ ... wieder abhängen lassen. Man setze nämlich, ganz den Ausdrücken (1) analog:

$$\left.\begin{array}{c}
B_{,,}.C_{,,,}-B_{,,,}.C_{,,}=\mathfrak{A}'; \quad B_{,,,}.C_{,}-B_{,}.C_{,,,}=\mathfrak{A}''; \\
B_{,}.C_{,,}-B_{,,}.C_{,}=\mathfrak{A}'''; \\
A_{,,,}.C_{,,}-A_{,,}.C_{,,,}=\mathfrak{B}'; \quad A_{,}.C_{,,,}-A_{,,,}.C_{,}=\mathfrak{B}''; \\
A_{,,}.C_{,}-A_{,}.C_{,,}=\mathfrak{B}'''; \\
A_{,,}.B_{,,,}-A_{,,,}.B_{,,}=\mathfrak{C}'; \quad A_{,,,}.B_{,}-A_{,}.B_{,,,}=\mathfrak{C}''; \\
A_{,}.B_{,,}-A_{,,}.B_{,}=\mathfrak{C}'''.
\end{array}\right\} (7)$$

Es ist leicht, die geometrische Bedeutung dieser Ausdrücke nachzuweisen. Denn da die Gleichungen der Ebenen, welche durch den Anfangspunct der Coordinaten senkrecht auf die respectiven Geraden 1, 2, 3 gelegt werden, und die wir mit I_0, II_0, III_0 bezeichnen wollen, sind:

$$\begin{array}{c}
A_{,}\,.\,x + B_{,}\,.\,y + C_{,}\,.\,z = 0; \\
A_{,,}\,.\,x + B_{,,}\,.\,y + C_{,,}\,.\,z = 0; \\
A_{,,,}\,.\,x + B_{,,,}\,.\,y + C_{,,,}\,.\,z = 0;
\end{array}$$

da sich ferner je zwei dieser Ebenen in einer Geraden durchschneiden (welche Durchschnittslinien respective mit 1_0, 2_0, 3_0 bezeichnet werden sollen), so werden die Gleichungen der Projectionen dieser Geraden, und zwar

	der Geraden 1_0	der Geraden 2_0	der Geraden 3_0
in der Ebene yz	$\mathfrak{C}' . y - \mathfrak{B}' . z = 0;$	$\mathfrak{C}'' . y - \mathfrak{B}'' . z = 0;$	$\mathfrak{C}''' . y - \mathfrak{B}''' . z = 0;$
in der Ebene xz	$\mathfrak{A}' . z - \mathfrak{C}' . x = 0;$	$\mathfrak{A}'' . z - \mathfrak{C}'' . x = 0;$	$\mathfrak{A}''' . z - \mathfrak{C}''' . x = 0;$
in der Ebene xy	$\mathfrak{B}' . x - \mathfrak{A}' . y = 0;$	$\mathfrak{B}'' . x - \mathfrak{A}'' . y = 0;$	$\mathfrak{B}''' . x - \mathfrak{A}''' . y = 0.$

Setzt man nun, den Ausdrücken (2) und (3) analog:

$$\left.\begin{array}{l} \mathfrak{A}'^2 + \mathfrak{B}'^2 + \mathfrak{C}'^2 = \mathfrak{P}'^2; \\ \mathfrak{A}''^2 + \mathfrak{B}''^2 + \mathfrak{C}''^2 = \mathfrak{P}''^2; \\ \mathfrak{A}'''^2 + \mathfrak{B}'''^2 + \mathfrak{C}'''^2 = \mathfrak{P}'''^2; \end{array}\right\} \ldots (8) \quad \text{und} \quad \left.\begin{array}{l} \mathfrak{A}''.\mathfrak{A}''' + \mathfrak{B}''.\mathfrak{B}''' + \mathfrak{C}''.\mathfrak{C}''' = \mathfrak{M}'; \\ \mathfrak{A}'''.\mathfrak{A}' + \mathfrak{B}'''.\mathfrak{B}' + \mathfrak{C}'''.\mathfrak{C}' = \mathfrak{M}''; \\ \mathfrak{A}'.\mathfrak{A}'' + \mathfrak{B}'.\mathfrak{B}'' + \mathfrak{C}'.\mathfrak{C}'' = \mathfrak{M}'''; \end{array}\right\} \ldots (9),$$

so wird man haben:

$$\cos.(\mathrm{II}_0 . \mathrm{III}_0) = \frac{M_{,}}{P_{,,} . P_{,,,}}; \quad \cos.(\mathrm{I}_0 . \mathrm{III}_0) = \frac{M_{,,}}{P_{,} . P_{,,,}}; \quad \cos.(\mathrm{I}_0 . \mathrm{II}_0) = \frac{M_{,,,}}{P_{,} . P_{,,}} \text{ und}$$

$$\cos.(2_0 . 3_0) = \frac{\mathfrak{M}'}{\mathfrak{P}'' . \mathfrak{P}'''}; \quad \cos.(1_0 . 3_0) = \frac{\mathfrak{M}''}{\mathfrak{P}' . \mathfrak{P}'''}; \quad \cos.(1_0 . 2_0) = \frac{\mathfrak{M}'''}{\mathfrak{P}' . \mathfrak{P}''}.$$

Endlich sey noch:

$$(A_{,} B_{,,} C_{,,,} + A_{,,} B_{,,,} C_{,} + A_{,,,} B_{,} C_{,,} - A_{,} B_{,,,} C_{,,} - A_{,,} B_{,} C_{,,,} - A_{,,,} B_{,,} C_{,}) = \mathfrak{N} \ldots (10).$$

5. Die in vorstehenden zehn Systemen von Gleichungen enthaltenen Ausdrücke besitzen eine Menge merkwürdiger und wichtiger Beziehungen gegen einander sowohl, als auch gegen ihre ursprünglichen Bestandtheile A' B' C' A'' ... Die Erforschung der Eigenschaften dieser Ausdrücke ist nun der Hauptzweck der gegenwärtigen Untersuchungen. Um dieselben auf eine leichte Weise

Von der Richtigkeit dieser Ausdrücke kann man sich durch eine leichte Substitution versichern.

Zwischen den Ausdrücken des Systemes (1) und ihren Bestandtheilen finden ferner nachstehende Beziehungen Statt:

$$\left.\begin{array}{l} B' . C_{\prime} + B'' . C_{\prime\prime} + B''' . C_{\prime\prime\prime} = 0; \\ C' . A_{\prime} + C'' . A_{\prime\prime} + C''' . A_{\prime\prime\prime} = 0; \\ A' . B_{\prime} + A'' . B_{\prime\prime} + A''' . B_{\prime\prime\prime} = 0; \\ C' . B_{\prime} + C'' . B_{\prime\prime} + C''' . B_{\prime\prime\prime} = 0; \\ A' . C_{\prime} + A'' . C_{\prime\prime} + A''' . C_{\prime\prime\prime} = 0; \\ B' . A_{\prime} + B'' . A_{\prime\prime} + B''' . A_{\prime\prime\prime} = 0; \end{array}\right\} \ldots (14)$$

$$\left.\begin{array}{l} A'' . A_{\prime\prime\prime} + B'' . B_{\prime\prime\prime} + C'' . C_{\prime\prime\prime} = 0; \\ A''' . A_{\prime} + B''' . B_{\prime} + C''' . C_{\prime} = 0; \\ A' . A_{\prime\prime} + B' . B_{\prime\prime} + C' . C_{\prime\prime} = 0; \\ A''' . A_{\prime\prime} + B''' . B_{\prime\prime} + C''' . C_{\prime\prime} = 0; \\ A' . A_{\prime\prime\prime} + B_{\prime} . B_{\prime\prime\prime} + C_{\prime} . C_{\prime\prime\prime} = 0; \\ A'' . A_{\prime} + B'' . B_{\prime} + C'' . C_{\prime} = 0. \end{array}\right\} \ldots (15)$$

Von der Statthaftigkeit dieser Beziehungen wird man sich auf der Stelle überzeugen, wenn man in ihnen für die Grössen $A_{\prime}$ $B_{\prime}$ $C_{\prime}$ $A_{\prime\prime}$ ... ihre Bedeutungen aus (1) setzt.

Da ferner auch die mit $\mathfrak{A}'$ $\mathfrak{B}'$ $\mathfrak{C}'$ $\mathfrak{A}''$ ... bezeichneten Ausdrücke auf eben dieselbe Weise aus den Grössen $A_{\prime}$ $B_{\prime}$ $C_{\prime}$ $A_{\prime\prime}$ ... zusammengesetzt sind, wie diese Grössen selbst aus den ursprünglichen A' B' C' A'' ...; so folgt, dass auch zwischen jenen die nämlichen Relationen obwalten werden, als zwischen diesen. Man hat sofort:

$$\left.\begin{array}{l} B_{\prime} . \mathfrak{C}' + B_{\prime\prime} . \mathfrak{C}'' + B_{\prime\prime\prime} . \mathfrak{C}''' = 0; \\ C_{\prime} . \mathfrak{A}' + C_{\prime\prime} . \mathfrak{A}'' + C_{\prime\prime\prime} . \mathfrak{A}''' = 0; \\ A_{\prime} . \mathfrak{B}' + A_{\prime\prime} . \mathfrak{B}'' + A_{\prime\prime\prime} . \mathfrak{B}''' = 0; \\ C_{\prime} . \mathfrak{B}' + C_{\prime\prime} . \mathfrak{B}'' + C_{\prime\prime\prime} . \mathfrak{B}''' = 0; \\ A_{\prime} . \mathfrak{C}' + A_{\prime\prime} . \mathfrak{C}'' + A_{\prime\prime\prime} . \mathfrak{C}''' = 0; \\ B_{\prime} . \mathfrak{A}' + B_{\prime\prime} . \mathfrak{A}'' + B_{\prime\prime\prime} . \mathfrak{A}''' = 0; \end{array}\right\} \ldots (16)$$

$$\left.\begin{array}{l} A_{\prime\prime} \cdot \mathfrak{A}''' + B_{\prime\prime} \cdot \mathfrak{B}''' + C_{\prime\prime} \cdot \mathfrak{C}''' = 0; \\ A_{\prime\prime\prime} \cdot \mathfrak{A}' + B_{\prime\prime\prime} \cdot \mathfrak{B}' + C_{\prime\prime\prime} \cdot \mathfrak{C}' = 0; \\ A_{\prime} \cdot \mathfrak{A}'' + B_{\prime} \cdot \mathfrak{B}'' + C_{\prime} \cdot \mathfrak{C}'' = 0; \\ A_{\prime\prime\prime} \cdot \mathfrak{A}'' + B_{\prime\prime\prime} \cdot \mathfrak{B}'' + C_{\prime\prime\prime} \cdot \mathfrak{C}'' = 0; \\ A_{\prime} \cdot \mathfrak{A}''' + B_{\prime} \cdot \mathfrak{B}''' + C_{\prime} \cdot \mathfrak{C}''' = 0; \\ A_{\prime\prime} \cdot \mathfrak{A}' + B_{\prime\prime} \cdot \mathfrak{B}' + C_{\prime\prime} \cdot \mathfrak{C}' = 0. \end{array}\right\} \ldots (17)$$

7. Wir wollen jetzt die Ausdrücke des Systemes (7.) näher entwickeln. Setzt man im Ausdrucke

$$\mathfrak{A}' = (B_{\prime\prime} \cdot C_{\prime\prime\prime} - B_{\prime\prime\prime} \cdot C_{\prime\prime})$$

anstatt $B_{\prime\prime}$ und $B_{\prime\prime\prime}$ die dafür angenommenen Ausdrücke, so erhält man

$$\mathfrak{A}' = (A' . C''' - A''' . C') . C_{\prime\prime\prime} - (A'' . C' - A' . C'') . C_{\prime\prime}$$

oder

$$\mathfrak{A}' = [A' . (C'' . C_{\prime\prime} + C''' . C_{\prime\prime\prime}) - C' . (A'' . C_{\prime\prime} + A''' . C_{\prime\prime\prime})].$$

Nun aber ist, gemäſs Vorhergehendem:

$$(C'' . C_{\prime\prime} + C''' . C_{\prime\prime\prime}) = N - C' . C_{\prime};$$

folglich wird man haben:

$$\mathfrak{A}' = [A' . N - C' . (A' . C_{\prime} + A'' . C_{\prime\prime} + A''' . C_{\prime\prime\prime})];$$

und wegen

$$A' . C_{\prime} + A'' . C_{\prime\prime} + A''' . C_{\prime\prime\prime} = 0$$

ist endlich $\qquad \mathfrak{A}' = A' . N.$

Auf eben diese Art lassen sich die übrigen Ausdrücke, als $\mathfrak{B}'\ \mathfrak{C}'\ \mathfrak{A}'' \ldots$, reduciren; man findet sonach die folgenden sehr merkwürdigen Beziehungen:

$$\left.\begin{array}{lll} \mathfrak{A}' = N . A'; & \mathfrak{A}'' = N . A''; & \mathfrak{A}''' = N . A'''; \\ \mathfrak{B}' = N . B'; & \mathfrak{B}'' = N . B''; & \mathfrak{B}''' = N . B'''; \\ \mathfrak{C}' = N . C'; & \mathfrak{C}'' = N . C''; & \mathfrak{C}''' = N . C'''. \end{array}\right\} (18)$$

Bringt man diese Ausdrücke von $\mathfrak{A}'\ \mathfrak{B}'\ \mathfrak{C}'\ \mathfrak{A}'' \ldots$ in die Gleichungen (8) und (9), so hat man:

$$\left.\begin{array}{l} \mathfrak{P}' = N . P'; \\ \mathfrak{P}'' = N . P''; \\ \mathfrak{P}''' = N . P'''. \end{array}\right\} \ldots (19) \qquad \left.\begin{array}{l} \mathfrak{M}' = N^2 . M'; \\ \mathfrak{M}'' = N^2 . M''; \\ \mathfrak{M}''' = N^2 . M'''. \end{array}\right\} \ldots (20)$$

Von der Richtigkeit dieser Ausdrücke kann man sich durch eine leichte Substitution versichern.

Zwischen den Ausdrücken des Systemes (1) und ihren Bestandtheilen finden ferner nachstehende Beziehungen Statt:

$$\left.\begin{array}{l}
B' \,.\, C_{,} + B'' \,.\, C_{,,} + B''' \,.\, C_{,,,} = 0; \\
C' \,.\, A_{,} + C'' \,.\, A_{,,} + C''' \,.\, A_{,,,} = 0; \\
A' \,.\, B_{,} + A'' \,.\, B_{,,} + A''' \,.\, B_{,,,} = 0; \\
C' \,.\, B_{,} + C'' \,.\, B_{,,} + C''' \,.\, B_{,,,} = 0; \\
A' \,.\, C_{,} + A'' \,.\, C_{,,} + A''' \,.\, C_{,,,} = 0; \\
B' \,.\, A_{,} + B'' \,.\, A_{,,} + B''' \,.\, A_{,,,} = 0;
\end{array}\right\} \ldots (14)$$

$$\left.\begin{array}{l}
A'' \,.\, A_{,,,} + B'' \,.\, B_{,,,} + C'' \,.\, C_{,,,} = 0; \\
A''' \,.\, A_{,} + B''' \,.\, B_{,} + C''' \,.\, C_{,} = 0; \\
A' \,.\, A_{,,} + B' \,.\, B_{,,} + C' \,.\, C_{,,} = 0; \\
A''' \,.\, A_{,,} + B''' \,.\, B_{,,} + C''' \,.\, C_{,,} = 0; \\
A' \,.\, A_{,,,} + B_{,} \,.\, B_{,,,} + C_{,} \,.\, C_{,,,} = 0; \\
A'' \,.\, A_{,} + B'' \,.\, B_{,} + C'' \,.\, C_{,} = 0.
\end{array}\right\} \ldots (15)$$

Von der Statthaftigkeit dieser Beziehungen wird man sich auf der Stelle überzeugen, wenn man in ihnen für die Gröfsen $A_{,}$ $B_{,}$ $C_{,}$ $A_{,,}$ ... ihre Bedeutungen aus (1) setzt.

Da ferner auch die mit $\mathfrak{A}'$ $\mathfrak{B}'$ $\mathfrak{C}'$ $\mathfrak{A}''$ ... bezeichneten Ausdrücke auf eben dieselbe Weise aus den Gröfsen $A_{,}$ $B_{,}$ $C_{,}$ $A_{,,}$ ... zusammengesetzt sind, wie diese Grössen selbst aus den ursprünglichen A' B' C' A'' ...; so folgt, dafs auch zwischen jenen die nämlichen Relationen obwalten werden, als zwischen diesen. Man hat sofort:

$$\left.\begin{array}{l}
B_{,} \,.\, \mathfrak{C}' + B_{,,} \,.\, \mathfrak{C}'' + B_{,,,} \,.\, \mathfrak{C}''' = 0; \\
C_{,} \,.\, \mathfrak{A}' + C_{,,} \,.\, \mathfrak{A}'' + C_{,,,} \,.\, \mathfrak{A}''' = 0; \\
A_{,} \,.\, \mathfrak{B}' + A_{,,} \,.\, \mathfrak{B}'' + A_{,,,} \,.\, \mathfrak{B}''' = 0; \\
C_{,} \,.\, \mathfrak{B}' + C_{,,} \,.\, \mathfrak{B}'' + C_{,,,} \,.\, \mathfrak{B}''' = 0; \\
A_{,} \,.\, \mathfrak{C}' + A_{,,} \,.\, \mathfrak{C}'' + A_{,,,} \,.\, \mathfrak{C}''' = 0; \\
B_{,} \,.\, \mathfrak{A}' + B_{,,} \,.\, \mathfrak{A}'' + B_{,,,} \,.\, \mathfrak{A}''' = 0;
\end{array}\right\} \ldots (16)$$

$$\left.\begin{array}{l}
A_{\prime\prime} \,.\, \mathfrak{A}''' + B_{\prime\prime} \,.\, \mathfrak{B}''' + C_{\prime\prime} \,.\, \mathfrak{C}''' = 0; \\
A_{\prime\prime\prime} \,.\, \mathfrak{A}' + B_{\prime\prime\prime} \,.\, \mathfrak{B}' + C_{\prime\prime\prime} \,.\, \mathfrak{C}' = 0; \\
A_{\prime} \,.\, \mathfrak{A}'' + B_{\prime} \,.\, \mathfrak{B}'' + C_{\prime} \,.\, \mathfrak{C}'' = 0; \\
A_{\prime\prime\prime} \,.\, \mathfrak{A}'' + B_{\prime\prime\prime} \,.\, \mathfrak{B}'' + C_{\prime\prime\prime} \,.\, \mathfrak{C}'' = 0; \\
A_{\prime} \,.\, \mathfrak{A}''' + B_{\prime} \,.\, \mathfrak{B}''' + C_{\prime} \,.\, \mathfrak{C}''' = 0; \\
A_{\prime\prime} \,.\, \mathfrak{A}' + B_{\prime\prime} \,.\, \mathfrak{B}' + C_{\prime\prime} \,.\, \mathfrak{C}' = 0.
\end{array}\right\} \ldots (17)$$

7. Wir wollen jetzt die Ausdrücke des Systemes (7.) näher entwickeln. Setzt man im Ausdrucke

$$\mathfrak{A}' = (B_{\prime\prime} \,.\, C_{\prime\prime\prime} - B_{\prime\prime\prime} \,.\, C_{\prime\prime})$$

anstatt $B_{\prime\prime}$ und $B_{\prime\prime\prime}$ die dafür angenommenen Ausdrücke, so erhält man

$$\mathfrak{A}' = (A'.C''' - A'''.C').C_{\prime\prime\prime} - (A''.C' - A'.C'').C_{\prime\prime}$$

oder

$$\mathfrak{A}' = [A'.(C''.C_{\prime\prime} + C'''.C_{\prime\prime\prime}) - C'.(A''.C_{\prime\prime} + A'''.C_{\prime\prime\prime})].$$

Nun aber ist, gemäfs Vorhergehendem:

$$(C'' \,.\, C_{\prime\prime} + C''' \,.\, C_{\prime\prime\prime}) = N - C' \,.\, C_{\prime};$$

folglich wird man haben:

$$\mathfrak{A}' = [A' \,.\, N - C' \,.\, (A' \,.\, C_{\prime} + A'' \,.\, C_{\prime\prime} + A'''.C_{\prime\prime\prime})];$$

und wegen

$$A' \,.\, C_{\prime} + A'' \,.\, C_{\prime\prime} + A''' \,.\, C_{\prime\prime\prime} = 0$$

ist endlich $\qquad \mathfrak{A}' = A' \,.\, N.$

Auf eben diese Art lassen sich die übrigen Ausdrücke, als $\mathfrak{B}'\ \mathfrak{C}'\ \mathfrak{A}'' \ldots$, reduciren; man findet sonach die folgenden sehr merkwürdigen Beziehungen:

$$\left.\begin{array}{lll}
\mathfrak{A}' = N \,.\, A'; & \mathfrak{A}'' = N \,.\, A''; & \mathfrak{A}''' = N \,.\, A'''; \\
\mathfrak{B}' = N \,.\, B'; & \mathfrak{B}'' = N \,.\, B''; & \mathfrak{B}''' = N \,.\, B'''; \\
\mathfrak{C}' = N \,.\, C'; & \mathfrak{C}'' = N \,.\, C''; & \mathfrak{C}''' = N \,.\, C'''.
\end{array}\right\} (18)$$

Bringt man diese Ausdrücke von $\mathfrak{A}'\ \mathfrak{B}'\ \mathfrak{C}'\ \mathfrak{A}'' \ldots$ in die Gleichungen (8) und (9), so hat man:

$$\left.\begin{array}{l}
\mathfrak{P}' = N \,.\, P'; \\
\mathfrak{P}'' = N \,.\, P''; \\
\mathfrak{P}''' = N \,.\, P'''.
\end{array}\right\} \ldots (19) \qquad
\left.\begin{array}{l}
\mathfrak{M}' = N^2 \,.\, M'; \\
\mathfrak{M}'' = N^2 \,.\, M''; \\
\mathfrak{M}''' = N^2 \,.\, M'''.
\end{array}\right\} \ldots (20)$$

Setzt man sie endlich noch in die Gleichungen (13), so zeigt eine jede von ihnen, daſs

$$\mathfrak{N} = N^2 \quad \text{sey.}$$

8. Substituirt man in den Ausdrücken des Systemes (11) für $A_{,}$, $B_{,}$, $C_{,}$, $A_{,,}$ . . . die Bedeutungen derselben aus dem Systeme (1), so findet man nach einigen leichten und einfachen Reductionen nachstehende Formen:

$$\left.\begin{array}{l} A_{,}'' = (A'''.P''^2 - A''.M'); \; A_{,,}' = (A'''.P'^2 - A'.M'') \\ B_{,}'' = (B'''.P''^2 - B''.M'); \; B_{,,}' = (B'''.P'^2 - B'.M'') \\ C_{,}'' = (C'''.P''^2 - C''.M'); \; C_{,,}' = (C'''.P'^2 - C'.M'') \end{array}\right\} (21)$$

$$\left.\begin{array}{l} A_{,}''' = (A''.P'''^2 - A'''.M'); \; A_{,,,}' = (A''.P'^2 - A'.M''') \\ B_{,}''' = (B''.P'''^2 - B'''.M'); \; B_{,,,}' = (B''.P'^2 - B'.M''') \\ C_{,}''' = (C''.P'''^2 - C'''.M'); \; C_{,,,}' = (C''.P'^2 - C'.M''') \end{array}\right\} (22)$$

$$\left.\begin{array}{l} A_{,,}''' = (A'.P'''^2 - A'''.M''); \; A_{,,,}'' = (A'.P''^2 - A''.M''') \\ B_{,,}''' = (B'.P'''^2 - B'''.M''); \; B_{,,,}'' = (B',P''^2 - B''.M''') \\ C_{,,}''' = (C'.P'''^2 - C'''.M''); \; C_{,,,}'' = (C'.P''^2 - C''.M''') \end{array}\right\} (23)$$

9. Wenn man von den drei Gleichungen:

$$M'' = A' . A''' + B' . B''' + C' . C''';$$
$$M''' = A' . A'' + B' . B'' + C' . C'';$$
$$P'^2 = A' . A' + B' . B' + C' . C';$$

die erste mit $A_{,,,}$, die zweite mit $A_{,,}$, und die dritte mit $A_{,}$ multiplicirt, und hierauf addirt; so erhält man, wegen

$$A' \; A_{,} + A'' . A_{,,} + A''' . A_{,,,} = N;$$
$$B' . B_{,} + B'' . A_{,,} + B''' . A_{,,,} = o;$$
$$C' . A_{,} + C'' . A_{,,} + C''' . A_{,,,} = o;$$

die Gleichung:

$$P'^2 . A_{,} + M''' . A_{,,} + M'' . A_{,,,} = N . A' = \mathfrak{A}'.$$

Diese Gleichung würde man auch noch erhalten können, wenn man von jenen drei letzten Gleichungen

die erste mit A', die zweite mit B', und die dritte mit C' multiplicirt hätte; ihre Summe gibt sodann gleichfalls die schon gefundene Relation.

Aufser dieser existiren zwischen PMN und den Gröfsen ABC noch acht ähnliche, die man auf gleiche Weise, wie die schon gefundene, aus den vorhergehenden ableiten kann; so dafs man das nachstehende System von neun Relationen haben wird:

$$\left.\begin{array}{l} N.A' = \mathfrak{A}' = P'^2.A_, + M'''.A_{,,} + M''.A_{,,,}; \\ N.B' = \mathfrak{B}' = P'^2.B_, + M'''.B_{,,} + M''.B_{,,,}; \\ N.C' = \mathfrak{C}' = P'^2.C_, + M'''.C_{,,} + M''.C_{,,,}; \end{array}\right\} (24)$$

$$\left.\begin{array}{l} N.A'' = \mathfrak{A}'' = M'''.A_, + P''^2.A_{,,} + M'.A_{,,,}; \\ N.B'' = \mathfrak{B}'' = M'''.B_, + P''^2.B_{,,} + M'.B_{,,,}; \\ N.C'' = \mathfrak{C}'' = M'''.C_, + P''^2.C_{,,} + M'.C_{,,,}; \end{array}\right\} (25)$$

$$\left.\begin{array}{l} N.A''' = \mathfrak{A}''' = M''.A_, + M'.A_{,,} + P'''^2.A_{,,,}; \\ N.B''' = \mathfrak{B}''' = M''.B_, + M'.B_{,,} + P'''^2.B_{,,,}; \\ N.C''' = \mathfrak{C}''' = M''.C_, + M'.C_{,,} + P'''^2.C_{,,,}. \end{array}\right\} (26)$$

10. Wenn wir jetzt, dem Vorhergehenden analog, von den drei Gleichungen:

$$M_{,,} = A_, \,.\, A_{,,,} + B_, \,.\, B_{,,,} + C_, \,.\, C_{,,,};$$
$$M_{,,,} = A_, \,.\, A_{,,} + B_, \,.\, B_{,,} + C_, \,.\, C_{,,};$$
$$P_,^2 = A_, \,.\, A_, + B_, \,.\, B_, + C_, \,.\, C_,;$$

die erste mit A''', die zweite mit A'', und die dritte mit A' multiplicirt, so gibt ihre Summe, wegen:

$$A' \,.\, A_, + A'' \,.\, A_{,,} + A''' \,.\, A_{,,,} = N;$$
$$A' \,.\, B_, + A'' \,.\, B_{,,} + A''' \,.\, B_{,,,} = 0;$$
$$A' \,.\, C_, + A'' \,.\, C_{,,} + A''' \,.\, C_{,,,} = 0:$$

nachstehende Gleichung:

$$N \,.\, A_, = A' \,.\, P_,^2 + M_{,,,} \,.\, A'' + M_{,,} \,.\, A'''.$$

Diese Gleichung würde auch noch zum Vorschein kommen, wenn man von den letzten drei Gleichungen

die erste mit $A_{,}$, die zweite mit $B_{,}$, und die dritte mit $C_{,}$ multiplicirt, und hierauf addirt hätte.

Außer der gefundenen Gleichung lassen sich noch acht ähnliche auf dieselbe Weise erhalten, auf welche man jene erhielt; so daſs man nun nachstehendes System von neun Relationen haben wird:

$$\left.\begin{array}{l} N \,.\, A_{,} = P_{,}^{2} \,.\, A' + M_{,,,} \,.\, A'' + M_{,,} \,.\, A'''; \\ N \,.\, B_{,} = P_{,}^{2} \,.\, B' + M_{,,,} \,.\, B'' + M_{,,} \,.\, B'''; \\ N \,.\, C_{,} = P_{,}^{2} \,.\, C_{,} + M_{,,,} \,.\, C'' + M_{,,} \,.\, C'''; \end{array}\right\} (27)$$

$$\left.\begin{array}{l} N \,.\, A_{,,} = M_{,,,} \,.\, A' + P_{,,}^{2} \,.\, A'' + M_{,} \,.\, A''': \\ N \,.\, B_{,,} = M_{,,,} \,.\, B' + P_{,,}^{2} \,.\, B'' + M_{,} \,.\, B'''; \\ N \,.\, C_{,,} = M_{,,,} \,.\, C' + P_{,,}^{2} \,.\, C'' + M_{,} \,.\, C'''; \end{array}\right\} (28)$$

$$\left.\begin{array}{l} N \,.\, A_{,,,} = M_{,,} \,.\, A' + M_{,} \,.\, A'' + P_{,,,}^{2} \,.\, A'''; \\ N \,.\, B_{,,,} = M_{,,} \,.\, B' + M_{,} \,.\, B'' + P_{,,,}^{2} \,.\, B'''; \\ N \,.\, C_{,,,} = M_{,,} \,.\, C' + M_{,} \,.\, C'' + P_{,,,}^{2} \,.\, C'''. \end{array}\right\} (29)$$

Sowohl aus den Relationen (24), (25), (26), als auch aus (27), (28), (29) können neue hergeleitet werden, wenn man jene mit N^2, und diese mit N multiplicirt, und von den Relationen (18), (19), (20) Gebrauch macht. So z. B. ist

$$N^3 \,.\, A' = N^2 \,.\, \mathfrak{A}' = \mathfrak{P}'^2 \,.\, A' + \mathfrak{M}''' \,.\, A_{,,} + \mathfrak{M}'' \,.\, A_{,,,};$$

u. s. w.

$$N^2 \,.\, A_{,} = P_{,}^{2} \,.\, \mathfrak{A}' + M_{,,,} \,.\, \mathfrak{A}_{,,} + M_{,,} \,.\, \mathfrak{A}_{,,,};$$

u. s. w.

11. Wenn man von den Gleichungen des Systemes (27):

$$N \,.\, B_{,} = P_{,}^{2} \,.\, B' + M_{,,,} \,.\, B'' + M_{,,} \,.\, B''';$$
$$N \,.\, C_{,} = P_{,}^{2} \,.\, C' + M_{,,,} \,.\, C'' + M_{,,} \,.\, C''';$$

die erste mit C'', die andere mit B'' multiplicirt, und hierauf von einander subtrahirt; so wird man erhalten:

$$N \,.\, (B_{,}\, C^{\prime\prime} - C_{,}\, B^{\prime\prime}) =$$
$$= P_{,}^{2}\, (B^{\prime}\, C^{\prime\prime} - B^{\prime\prime}\, C^{\prime}) - M_{,,} \,.\, (B^{\prime\prime}\, C^{\prime\prime\prime} - B^{\prime\prime\prime}\, C^{\prime\prime})$$

oder $N \,.\, A_{,}^{\prime\prime} = (P_{,}^{2} \,.\, A_{,,,} - M_{,,} \,.\, A_{,})$.

Diesem Ausdrucke analog findet man auch noch alle übrigen, für $N \,.\, B_{,}^{\prime\prime}$; $N \,.\, C_{,}^{\prime\prime}$; u. s. w. Man wird folglich nachstehendes System von Relationen erhalten:

$$\left.\begin{array}{l} N.A_{,}^{\prime\prime} = P_{,}^{2}.A_{,,,} - M_{,,}.A_{,}\,;\; N.A_{,,}^{\prime} = P_{,,}^{2}.A_{,,,} - M_{,}.A_{,,} \\ N.B_{,}^{\prime\prime} = P_{,}^{2}.B_{,,,} - M_{,,}.B_{,}\,;\; N.B_{,,}^{\prime} = P_{,,}^{2}.B_{,,,} - M_{,}.B_{,,} \\ N.C_{,}^{\prime\prime} = P_{,}^{2}.C_{,,,} - M_{,,}.C_{,}\,;\; N.C_{,,}^{\prime} = P_{,,}^{2}.C_{,,,} - M_{,}.C_{,,} \end{array}\right\} (30)$$

$$\left.\begin{array}{l} N.A_{,}^{\prime\prime\prime} = P_{,}^{2}.A_{,,} - M_{,,,}.A_{,}\,;\; N.A_{,,,}^{\prime} = P_{,,,}^{2}.A_{,,} - M_{,}.A_{,,,} \\ N.B_{,}^{\prime\prime\prime} = P_{,}^{2}.B_{,,} - M_{,,,}.B_{,}\,;\; N.B_{,,,}^{\prime} = P_{,,,}^{2}.B_{,,} - M_{,}.B_{,,,} \\ N.C_{,}^{\prime\prime\prime} = P_{,}^{2}.C_{,,} - M_{,,,}.C_{,}\,;\; N.C_{,,,}^{\prime} = P_{,,,}^{2}.C_{,,} - M_{,}.C_{,,,} \end{array}\right\} (31)$$

$$\left.\begin{array}{l} N.A_{,,}^{\prime\prime\prime} = P_{,,}^{2}.A_{,} - M_{,,,}.A_{,,}\,;\; N.A_{,,,}^{\prime\prime} = P_{,,,}^{2}.A_{,} - M_{,,}.A_{,,,} \\ N.B_{,,}^{\prime\prime\prime} = P_{,,}^{2}.B_{,} - M_{,,,}.B_{,,}\,;\; N.B_{,,,}^{\prime\prime} = P_{,,,}^{2}.B_{,} - M_{,,}.B_{,,,} \\ N.C_{,,}^{\prime\prime\prime} = P_{,,}^{2}.C_{,} - M_{,,,}.C_{,,}\,;\; N.C_{,,,}^{\prime\prime} = P_{,,,}^{2}.C_{,} - M_{,,}.C_{,,,} \end{array}\right\} (32)$$

12. Wir wollen jetzt den Ausdruck

$$(A_{,,} \,.\, M_{,,} - A_{,,,} \,.\, M_{,,,})$$

entwickeln. Setzt man für $M_{,}$ $M_{,,,}$ ihre Bedeutungen, so erhält man:

$$(A_{,,} \,.\, M_{,,} - A_{,,,} \,.\, M_{,,,}) = \left\{\begin{array}{l} A_{,,} \,.\, B_{,} B_{,,,} + A_{,,} \,.\, C_{,} C_{,,,} \\ - A_{,,,} \,.\, B_{,} B_{,,} - A_{,,,} \,.\, C_{,} C_{,,} \end{array}\right\}$$
$$= [B_{,}.(A_{,,}.B_{,,,} - A_{,,,}.B_{,,}) - C_{,}.(A_{,,,}.C_{,,} - A_{,,}.C_{,,,})]$$
$$= (B_{,}.\mathfrak{C}^{\prime} - C_{,}.\mathfrak{B}^{\prime}) = N.(B_{,}.C^{\prime} - C_{,}.B^{\prime}).$$

Nun findet man auf gleiche Weise:

$$(B_{,} \,.\, C^{\prime} - C_{,} \,.\, B^{\prime}) = (A^{\prime\prime\prime} \,.\, M^{\prime\prime\prime} - A^{\prime\prime} \,.\, M^{\prime\prime});$$

folglich hat man:

$$(A_{,,} \,.\, M_{,,} - A_{,,,} \,.\, M_{,,,}) = N \,.\, (A^{\prime\prime\prime} \,.\, M^{\prime\prime\prime} - A^{\prime\prime} \,.\, M^{\prime\prime}),$$

woraus

die erste mit $A_{\prime}$, die zweite mit $B_{\prime}$, und die dritte mit $C_{\prime}$ multiplicirt, und hierauf addirt hätte.

Aufser der gefundenen Gleichung lassen sich noch acht ähnliche auf dieselbe Weise erhalten, auf welche man jene erhielt; so dafs man nun nachstehendes System von neun Relationen haben wird:

$$\left.\begin{aligned} N \,.\, A_{\prime} &= P_{\prime}^2 \,.\, A' + M_{\prime\prime\prime} \,.\, A'' + M_{\prime\prime} \,.\, A''' ; \\ N \,.\, B_{\prime} &= P_{\prime}^2 \,.\, B' + M_{\prime\prime\prime} \,.\, B'' + M_{\prime\prime} \,.\, B''' ; \\ N \,.\, C_{\prime} &= P_{\prime}^2 \,.\, C_{\prime} + M_{\prime\prime\prime} \,.\, C'' + M_{\prime\prime} \,.\, C''' ; \end{aligned}\right\} (27)$$

$$\left.\begin{aligned} N \,.\, A_{\prime\prime} &= M_{\prime\prime\prime} \,.\, A' + P_{\prime\prime}^2 \,.\, A'' + M_{\prime} \,.\, A''' : \\ N \,.\, B_{\prime\prime} &= M_{\prime\prime\prime} \,.\, B' + P_{\prime\prime}^2 \,.\, B'' + M_{\prime} \,.\, B''' ; \\ N \,.\, C_{\prime\prime} &= M_{\prime\prime\prime} \,.\, C' + P_{\prime\prime}^2 \,.\, C'' + M_{\prime} \,.\, C''' ; \end{aligned}\right\} (28)$$

$$\left.\begin{aligned} N \,.\, A_{\prime\prime\prime} &= M_{\prime\prime} \,.\, A' + M_{\prime} \,.\, A'' + P_{\prime\prime\prime}^2 \,.\, A''' ; \\ N \,.\, B_{\prime\prime\prime} &= M_{\prime\prime} \,.\, B' + M_{\prime} \,.\, B'' + P_{\prime\prime\prime}^2 \,.\, B''' ; \\ N \,.\, C_{\prime\prime\prime} &= M_{\prime\prime} \,.\, C' + M_{\prime} \,.\, C'' + P_{\prime\prime\prime}^2 \,.\, C''' . \end{aligned}\right\} (29)$$

Sowohl aus den Relationen (24), (25), (26), als auch aus (27), (28), (29) können neue hergeleitet werden, wenn man jene mit N^2, und diese mit N multiplicirt, und von den Relationen (18), (19), (20) Gebrauch macht. So z. B. ist

$$N^3 \,.\, A' = N^2 \,.\, \mathfrak{A}' = \mathfrak{P}'^2 \,.\, A' + \mathfrak{M}''' \,.\, A_{\prime\prime} + \mathfrak{M}'' \,.\, A_{\prime\prime\prime} ;$$

u. s. w.

$$N^2 \,.\, A_{\prime} = P_{\prime}^2 \,.\, \mathfrak{A}' + M_{\prime\prime\prime} \,.\, \mathfrak{A}_{\prime\prime} + M_{\prime\prime} \,.\, \mathfrak{A}_{\prime\prime\prime} ;$$

u. s. w.

11. Wenn man von den Gleichungen des Systemes (27):

$$N \,.\, B_{\prime} = P_{\prime}^2 \,.\, B' + M_{\prime\prime\prime} \,.\, B'' + M_{\prime\prime} \,.\, B''' ;$$
$$N \,.\, C_{\prime} = P_{\prime}^2 \,.\, C' + M_{\prime\prime\prime} \,.\, C'' + M_{\prime\prime} \,.\, C''' ;$$

die erste mit C'', die andere mit B'' multiplicirt, und hierauf von einander subtrahirt; so wird man erhalten:

$$N \,.\, (B_, C'' - C_, B'') =$$
$$= P_,^2 (B' C'' - B'' C') - M_{,,} \,.\, (B'' C''' - B''' C'')$$
oder $N \,.\, A_,'' = (P_,^2 \,.\, A_{,,,} - M_{,,} \,.\, A_,)$.

Diesem Ausdrucke analog findet man auch noch alle übrigen, für $N \,.\, B_,''$; $N \,.\, C_,''$; u. s. w. Man wird folglich nachstehendes System von Relationen erhalten:

$$\left.\begin{array}{l} N.A_,'' = P_,^2.A_{,,,} - M_{,,}.A_,\,;\; N.A_{,,}' = P_{,,}^2.A_{,,,} - M_,.A_{,,} \\ N.B_,'' = P_,^2.B_{,,,} - M_{,,}.B_,\,;\; N.B_{,,}' = P_{,,}^2.B_{,,,} - M_,.B_{,,} \\ N.C_,'' = P_,^2.C_{,,,} - M_{,,}.C_,\,;\; N.C_{,,}' = P_{,,}^2.C_{,,,} - M_,.C_{,,} \end{array}\right\} (30)$$

$$\left.\begin{array}{l} N.A_,''' = P_,^2.A_{,,} - M_{,,,}.A_,\,;\; N.A_{,,,}' = P_{,,,}^2.A_{,,} - M_,.A_{,,,} \\ N.B_,''' = P_,^2.B_{,,} - M_{,,,}.B_,\,;\; N.B_{,,,}' = P_{,,,}^2.B_{,,} - M_,.B_{,,,} \\ N.C_,''' = P_,^2.C_{,,} - M_{,,,}.C_,\,;\; N.C_{,,,}' = P_{,,,}^2.C_{,,} - M_,.C_{,,,} \end{array}\right\} (31)$$

$$\left.\begin{array}{l} N.A_{,,}''' = P_{,,}^2.A_, - M_{,,,}.A_{,,}\,;\; N.A_{,,,}'' = P_{,,,}^2.A_, - M_{,,}.A_{,,,} \\ N.B_{,,}''' = P_{,,}^2.B_, - M_{,,,}.B_{,,}\,;\; N.B_{,,,}'' = P_{,,,}^2.B_, - M_{,,}.B_{,,,} \\ N.C_{,,}''' = P_{,,}^2.C_, - M_{,,,}.C_{,,}\,;\; N.C_{,,,}'' = P_{,,,}^2.C_, - M_{,,}.C_{,,,} \end{array}\right\} (32)$$

12. Wir wollen jetzt den Ausdruck

$$(A_{,,} \,.\, M_{,,} - A_{,,,} \,.\, M_{,,,})$$

entwickeln. Setzt man für $M_,$ $M_{,,,}$ ihre Bedeutungen, so erhält man:

$$(A_{,,} \,.\, M_{,,} - A_{,,,} \,.\, M_{,,,}) = \left\{\begin{array}{l} A_{,,} \,.\, B_, B_{,,,} + A_{,,} \,.\, C_, C_{,,,} \\ - A_{,,,} \,.\, B_, B_{,,} - A_{,,,} \,.\, C_, C_{,,} \end{array}\right\}$$
$$= [B_, .(A_{,,} .B_{,,,} - A_{,,,}.B_{,,}) - C_,.(A_{,,,}.C_{,,} - A_{,,}.C_{,,,})]$$
$$= (B_,.\mathfrak{C}' - C_,.\mathfrak{B}') = N.(B_,.C' - C_,.B').$$

Nun findet man auf gleiche Weise:

$$(B_, \,.\, C' - C_, \,.\, B') = (A''' \,.\, M''' - A'' \,.\, M'');$$

folglich hat man:

$$(A_{,,} \,.\, M_{,,} - A_{,,,} \,.\, M_{,,,}) = N \,.\, (A''' \,.\, M''' - A'' \,.\, M''),$$

woraus

$$N = \left(\frac{A_{,,}.M_{,,} - A_{,,,}.M_{,,,}}{A'''.M''' - A''.M''}\right) = -\left(\frac{A_{,,}.M_{,,} - A_{,,,}.M_{,,,}}{A''.M'' - A'''.M'''}\right)$$

folgt. Diesem Ausdrucke analog hat man nun:

$$\left.\begin{aligned}
N &= -\frac{A_{,,}M_{,,} - A_{,,,}M_{,,,}}{A''M'' - A'''M'''} = -\frac{A_{,,,}M_{,,,} - A_{,}M_{,}}{A'''M''' - A'M'} \\
&= -\frac{A_{,}M_{,} - A_{,,}M_{,,}}{A'M' - A''M''}; \\
N &= -\frac{B_{,,}M_{,,} - B_{,,,}M_{,,,}}{B''M'' - B'''M'''} = -\frac{B_{,,,}M_{,,,} - B_{,}M_{,}}{B'''M''' - B'M'} \\
&= -\frac{B_{,}M_{,} - B_{,,}M_{,,}}{B'M' - B''M''}; \\
N &= -\frac{C_{,,}M_{,,} - C_{,,,}M_{,,,}}{C''M'' - C'''M'''} = -\frac{C_{,,,}M_{,,,} - C_{,}M_{,}}{C'''M''' - C'M'} \\
&= -\frac{C_{,}M_{,} - C_{,,}M_{,,}}{B M' - C''M''}.
\end{aligned}\right\} (33)$$

13. Wenn man im Ausdrucke

$$(B''' . C''_{,} - C''' . B''_{,})$$

für $C''_{,}$ $B''_{,}$ ihre Bedeutungen aus den Gleichungen (11) setzt, so hat man dafür:

$$[B''' . (B''A_{,} - A''B_{,}) - C''' . (A''C_{,} - C''A_{,})]$$

oder

$$[A_{,} . (B''B''' + C''C''') - A'' . (B'''B_{,} + C'''C_{,})]$$

oder

$$[A_{,} . (M' - A''A''') + A'' . A''' . A_{,}] = A_{,} . M'.$$

Auf eben diese Form würde sich der Ausdruck

$$(C'' . B'''_{,} - B'' . C'''_{,})$$

reduciren. Sonach erhält man das nachstehende System von Relationen:

$$\left.\begin{aligned}
A_{,}.M' &= B'''.C''_{,} - C'''.B''_{,} = C''.B'''_{,} - B''.C'''_{,} \\
B_{,}.M' &= C'''.A''_{,} - A'''.C''_{,} = A''.C'''_{,} - C''.A'''_{,} \\
C_{,}.M' &= A'''.B''_{,} - B'''.A''_{,} = B''.A'''_{,} - A''.B'''_{,}
\end{aligned}\right\} (34)$$

$$\left.\begin{aligned}
A_{\prime\prime}.M'' &= B'.C'''_{\prime\prime} - C'.B'''_{\prime\prime} = C'''.B'_{\prime\prime} - B'''.C'_{\prime\prime}\\
B_{\prime\prime}.M'' &= C'.A'''_{\prime\prime} - A'.C'''_{\prime\prime} = A'''.C'_{\prime\prime} - C'''.A'_{\prime\prime}\\
C_{\prime\prime}.M'' &= A'.B'''_{\prime\prime} - B'.A'''_{\prime\prime} = B'''.A'_{\prime\prime} - A'''.B'_{\prime\prime}
\end{aligned}\right\}\ (35)$$

$$\left.\begin{aligned}
A_{\prime\prime\prime}.M''' &= B''.C'_{\prime\prime\prime} - C''.B'_{\prime\prime\prime} = C'.B''_{\prime\prime\prime} - B'.C''_{\prime\prime\prime}\\
B_{\prime\prime\prime}.M''' &= C''.A'_{\prime\prime\prime} - A''.C'_{\prime\prime\prime} = A'.C''_{\prime\prime\prime} - C'.A''_{\prime\prime\prime}\\
C_{\prime\prime\prime}.M''' &= A''.B'_{\prime\prime\prime} - B''.A'_{\prime\prime\prime} = B'.A''_{\prime\prime\prime} - A'.B''_{\prime\prime\prime}
\end{aligned}\right\}\ (36)$$

14. Setzen wir im Ausdrucke

$$(B_{\prime\prime\prime} \,.\, C'_{\prime\prime} - C_{\prime\prime\prime} \,.\, B'_{\prime\prime})$$

anstatt $C'_{\prime\prime}$ $B'_{\prime\prime}$ ihre Bedeutungen aus (11); so erhalten wir:

$$[B_{\prime\prime\prime} \,.\, (A'B_{\prime\prime} - A_{\prime\prime}B') - C_{\prime\prime\prime} \,.\, (C'A_{\prime\prime} - A'C_{\prime\prime})],$$

und dieser Ausdruck reducirt sich leicht auf die Form:

$$A' \,.\, M_{\prime}.$$

Auf eben diese Form reducirt sich auch noch der Ausdruck:

$$(C'' \,.\, B'_{\prime\prime\prime} - B_{\prime\prime} \,.\, C'_{\prime\prime}).$$

Man hat also nachstehende, den vorhergehenden analoge Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}
A'.M_{\prime} &= B_{\prime\prime\prime}.C'_{\prime\prime} - C_{\prime\prime\prime}.B'_{\prime\prime} = C_{\prime\prime}.B'_{\prime\prime\prime} - B_{\prime\prime}.C'_{\prime\prime\prime}\\
B'.M_{\prime} &= C_{\prime\prime\prime}.A'_{\prime\prime} - A_{\prime\prime\prime}.C'_{\prime\prime} = A_{\prime\prime}.C'_{\prime\prime\prime} - C_{\prime\prime}.A'_{\prime\prime\prime}\\
C'.M_{\prime} &= A_{\prime\prime\prime}.B'_{\prime\prime} - B_{\prime\prime\prime}.A'_{\prime\prime} = B_{\prime\prime}.A'_{\prime\prime\prime} - A_{\prime\prime}.B'_{\prime\prime\prime}
\end{aligned}\right\}\ (37)$$

$$\left.\begin{aligned}
A''.M_{\prime\prime} &= B_{\prime}.C''_{\prime\prime\prime} - C_{\prime}.B''_{\prime\prime\prime} = C_{\prime\prime\prime}.B''_{\prime} - B_{\prime\prime\prime}.C''_{\prime}\\
B''.M_{\prime\prime} &= C_{\prime}.A''_{\prime\prime\prime} - A_{\prime}.C''_{\prime\prime\prime} = A_{\prime\prime\prime}.C''_{\prime} - C_{\prime\prime\prime}.A''_{\prime}\\
C''.M_{\prime\prime} &= A_{\prime}.B''_{\prime\prime\prime} - B_{\prime}.A''_{\prime\prime\prime} = B_{\prime\prime\prime}.A''_{\prime} - A_{\prime\prime\prime}.B''_{\prime}
\end{aligned}\right\}\ (38)$$

$$\left.\begin{aligned}
A'''.M_{\prime\prime\prime} &= B_{\prime\prime}.C'''_{\prime} - C_{\prime\prime}.B'''_{\prime} = C_{\prime}.B'''_{\prime\prime} - B_{\prime}.C'''_{\prime\prime}\\
B'''.M_{\prime\prime\prime} &= C_{\prime\prime}.A'''_{\prime} - A_{\prime\prime}.C'''_{\prime} = A_{\prime}.C'''_{\prime\prime} - C_{\prime}.A'''_{\prime\prime}\\
C'''.M_{\prime\prime\prime} &= A_{\prime\prime}.B'''_{\prime} - B_{\prime\prime}.A'''_{\prime} = B_{\prime}.A'''_{\prime\prime} - A_{\prime}.B'''_{\prime\prime}
\end{aligned}\right\}\ (39)$$

15. Wenn man durch dasselbe Verfahren, das in

den beiden vorhergehenden Art. gebraucht wurde, den Ausdruck

$$(C_{,,} \,.\, B'''_{,,} - B_{,,} \,.\, C'''_{,,})$$

reducirt; so wird man finden, daſs dieser Ausdruck endlich auf die einfache Form

$$A''' \,.\, P^2_{,,}$$

gebracht werde. Diesem analog hat man nun:

$$\left.\begin{array}{l}
B'''_{,,} \,.\, C_{,,} - B_{,,} \,.\, C'''_{,,} = A''' \,.\, P^2_{,,}; \\
B'_{,,,} \,.\, C_{,,,} - B_{,,,} \,.\, C'_{,,,} = A' \,.\, P^2_{,,,}; \\
B''_{,} \,.\, C_{,} - B_{,} \,.\, C''_{,} = A'' \,.\, P^2_{,}; \\
B_{,,,} \,.\, C''_{,,,} - B''_{,,,} \,.\, C_{,,,} = A'' \,.\, P^2_{,,,}; \\
B_{,} \,.\, C'''_{,} - B'''_{,} \,.\, C_{,} = A''' \,.\, P^2_{,}; \\
B_{,,} \,.\, C'_{,,} - B'_{,,} \,.\, C_{,,} = A' \,.\, P^2_{,,}.
\end{array}\right\} \ldots (40)$$

Aus diesem Systeme erhält man noch zwei analoge, wenn man nur B und C mit A verwechselt.

16. Reducirt man den Ausdruck:

$$(B''_{,,,} \,.\, C'' - B'' \,.\, C''_{,,,});$$

so wird man finden, daſs er $= A_{,,,} \,.\, P'^2$ werde. Man hat folglich, diesem Ausdrucke analog:

$$\left.\begin{array}{l}
B''_{,,,} \,.\, C'' - B'' \,.\, C''_{,,,} = A_{,,,} \,.\, P'^2; \\
B'''_{,} \,.\, C''' - B''' \,.\, C'''_{,} = A_{,} \,.\, P''^2; \\
B'_{,,} \,.\, C' - B' \,.\, C'_{,,} = A_{,,} \,.\, P'^2; \\
B''' \,.\, C'''_{,,} - B'''_{,,} \,.\, C''' = A_{,,} \,.\, P''^2; \\
B' \,.\, C'_{,,,} - B'_{,,,} \,.\, C' = A_{,,,} \,.\, P'^2; \\
B'' \,.\, C''_{,} - B''_{,} \,.\, C'' = A_{,} \,.\, P''^2.
\end{array}\right\} \ldots (41)$$

Auſser diesem Systeme existiren noch zwei ähnliche, die man hieraus unmittelbar erhält, wenn man nur B und C mit A vertauscht.

17. Der Ausdruck

$$(B'_{\prime\prime\prime} \cdot C'_{\prime\prime} - B'_{\prime\prime} \cdot C'_{\prime\prime\prime})$$

wird nach einigen leichten Reductionen auf die Form

$$N \cdot A' \cdot P'^2$$

zurückgebracht werden. Man wird daher haben:

$$\left.\begin{array}{l} B'_{\prime\prime\prime} \cdot C'_{\prime\prime} - B'_{\prime\prime} \cdot C'_{\prime\prime\prime} = N \cdot A' \cdot P'^2; \\ B''_{\prime} \cdot C''_{\prime\prime\prime} - B''_{\prime\prime\prime} \cdot C''_{\prime} = N \cdot A'' \cdot P''^2; \\ B'''_{\prime\prime} \cdot C'''_{\prime} - B'''_{\prime} \cdot C'''_{\prime\prime} = N \cdot A''' \cdot P'''^2. \end{array}\right\} \ldots (42)$$

Diesem Systeme analog erhält man durch Vertauschung der Buchstaben B und C mit A noch zwei ähnliche.

Endlich findet man noch:

$$\left.\begin{array}{l} B'''_{\prime} \cdot C''_{\prime} - B''_{\prime} \cdot C'''_{\prime} = A_{\prime} \cdot P^2_{\prime}; \\ B'_{\prime\prime} \cdot C'''_{\prime\prime} - B'''_{\prime\prime} \cdot C'_{\prime\prime} = A_{\prime\prime} \cdot P^2_{\prime\prime}; \\ B''_{\prime\prime\prime} \cdot C'_{\prime\prime\prime} - B'_{\prime\prime\prime} \cdot C''_{\prime\prime\prime} = A_{\prime\prime\prime} \cdot P^2_{\prime\prime\prime}. \end{array}\right\} \ldots (43)$$

Und neben diesem existiren noch zwei ihm analoge Systeme, die man durch Vertauschung der Buchstaben B und C mit A erhält.

18. Bisher haben wir die Entwicklungen nur solcher Zusammensetzungen aus den accentuirten Größen ABC gegeben, welche sich als *Binomien* darstellen. Es ist interessant, auch noch einige Entwicklungen solcher Ausdrücke kennen zu lernen, welche sich als *Trinomien* darstellen. Diese werden insgemein durch schickliche Verbindungen der bereits entwickelten Binomien gefunden.

Wenn man von den drei Gleichungen des Systemes (21)

$$\left\{\begin{array}{l} A''_{\prime} = A''' \cdot P''^2 - A'' \cdot M'; \\ B''_{\prime} = B''' \cdot P''^2 - B'' \cdot M'; \\ C''_{\prime} = C''' \cdot P''^2 - C'' \cdot M'; \end{array}\right\} \ldots (a)$$

die erste mit A'', die zweite mit B'', und die dritte mit C'' multiplicirt, und hierauf addirt, so erhält man:

$$A'' \cdot A_{,}'' + B'' \cdot B_{,}'' + C'' \cdot C_{,}'' = 0.$$

Dieser Gleichung analog hat man nun:

$$\left.\begin{aligned}
A'' \cdot A_{,}'' + B'' \cdot B_{,}'' + C'' \cdot C_{,}'' &= 0;\\
A''' \cdot A_{,}''' + B''' \cdot B_{,}''' + C''' \cdot C_{,}''' &= 0;\\
A' \cdot A_{,,}' + B' \cdot B_{,,}' + C' \cdot C_{,,}' &= 0;\\
A''' \cdot A_{,,}''' + B''' \cdot B_{,,}''' + C''' \cdot C_{,,}''' &= 0;\\
A' \cdot A_{,,,}' + B' \cdot B_{,,,}' + C' \cdot C_{,,,}' &= 0;\\
A'' \cdot A_{,,,}'' + B'' \cdot B_{,,,}'' + C'' \cdot C_{,,,}'' &= 0.
\end{aligned}\right\} \ldots (44)$$

Multiplicirt man hingegen dieselben Gleichungen (α) respective mit $A_{,}$ $B_{,}$ $C_{,}$; so wird ihre Summe geben:

$$A_{,} \cdot A_{,}'' + B_{,} \cdot B_{,}'' + C_{,} \cdot C_{,}'' = 0.$$

Dieser Gleichung analog hat man nun folgende:

$$\left.\begin{aligned}
A_{,} \cdot A_{,}'' + B_{,} \cdot B_{,}'' + C_{,} \cdot C_{,}'' &= 0;\\
A_{,} \cdot A_{,}''' + B_{,} \cdot B_{,}''' + C_{,} \cdot C_{,}''' &= 0;\\
A_{,,} \cdot A_{,,}' + B_{,,} \cdot B_{,,}' + C_{,,} \cdot C_{,,}' &= 0;\\
A_{,,} \cdot A_{,,}''' + B_{,,} \cdot B_{,,}''' + C_{,,} \cdot C_{,,}''' &= 0;\\
A_{,,,} \cdot A_{,,,}' + B_{,,,} \cdot B_{,,,}' + C_{,,,} \cdot C_{,,,}' &= 0;\\
A_{,,,} \cdot A_{,,,}'' + B_{,,,} \cdot B_{,,,}'' + C_{,,,} \cdot C_{,,,}'' &= 0.
\end{aligned}\right\} \ldots (45)$$

Multiplicirt man die Gleichung (α) respective mit $A_{,,}$, $B_{,,}$, $C_{,,}$; so gibt ihre Summe die Gleichung:

$$A_{,,} \cdot A_{,}'' + B_{,,} \cdot B_{,}'' + C_{,,} \cdot C_{,}'' = -N \cdot M'.$$

Eben so ist:

$$\left.\begin{aligned}
A_{,,,} \cdot A_{,}''' + B_{,,,} \cdot B_{,}''' + C_{,,,} \cdot C_{,}''' &= -N \cdot M';\\
A_{,} \cdot A_{,,}' + B_{,} \cdot B_{,,}' + C_{,} \cdot C_{,,}' &= -N \cdot M'';\\
A_{,,,} \cdot A_{,,}''' + B_{,,,} \cdot B_{,,}''' + C_{,,,} \cdot C_{,,}''' &= -N \cdot M'';\\
A_{,} \cdot A_{,,,}' + B_{,} \cdot B_{,,,}' + C_{,} \cdot C_{,,,}' &= -N \cdot M''';\\
A_{,,} \cdot A_{,,,}'' + B_{,,} \cdot B_{,,,}'' + C_{,,} \cdot C_{,,,}'' &= -N \cdot M'''.
\end{aligned}\right\} (46)$$

Werden die Gleichungen (α) respective mit $A_{,,,}$, $B_{,,,}$, $C_{,,,}$ multiplicirt, und hierauf addirt, so erhält man:

$$A_{,,,} \,.\, A''_{,} + B_{,,,} \,.\, B''_{,} + C_{,,,} \,.\, C''_{,} = N \,.\, P''^{2}.$$

Dieser Gleichung analog erhält man noch fünf andere, so daſs man nachstehendes System von Relationen erhalten wird:

$$\left.\begin{array}{l}
A_{,,} \,.\, A'_{,,,} + B_{,,} \,.\, B'_{,,,} + C_{,,} \,.\, C'_{,,,} = N \,.\, P'^{2}; \\
A_{,,,} \,.\, A'_{,,} + B_{,,,} \,.\, B'_{,,} + C_{,,,} \,.\, C'_{,,} = N \,.\, P'^{2}; \\
A_{,} \,.\, A''_{,,,} + B_{,} \,.\, B''_{,,,} + C_{,} \,.\, C''_{,,,} = N \,.\, P''^{2}; \\
A_{,,,} \,.\, A''_{,} + B_{,,,} \,.\, B''_{,} + C_{,,,} \,.\, C''_{,} = N \,.\, P''^{2}; \\
A_{,} \,.\, A'''_{,,} + B_{,} \,.\, B'''_{,,} + C_{,} \,.\, C'''_{,,} = N \,.\, P'''^{2}; \\
A_{,,} \,.\, A'''_{,} + B_{,,} \,.\, B'''_{,} + C_{,,} \,.\, C'''_{,} = N \,.\, P'''^{2}.
\end{array}\right\} \ldots (47)$$

19. Wenn wir von den drei Gleichungen des Systems (30):

$$\left.\begin{array}{l}
N \,.\, A''_{,} = P_{,}^{2} \,.\, A_{,,,} - M_{,,} \,.\, A_{,}; \\
N \,.\, B''_{,} = P_{,}^{2} \,.\, B_{,,,} - M_{,,} \,.\, B_{,}; \\
N \,.\, C''_{,} = P_{,}^{2} \,.\, C_{,,,} - M_{,,} \,.\, C_{,};
\end{array}\right\} \ldots (\beta)$$

die erste mit A''', die zweite mit B''', und die dritte mit C''' multipliciren, und hierauf addiren, so erhält man nachstehende:

$$A''' \,.\, A''_{,} + B''' \,.\, B''_{,} + C''' \,.\, C''_{,} = P_{,}^{2}.$$

Dieser Gleichung analog hat man noch fünf andere, so daſs man folgendes System von Relationen erhalten wird:

$$\left.\begin{array}{l}
A''' \,.\, A''_{,} + B''' \,.\, B''_{,} + C''' \,.\, C''_{,} = P_{,}^{2}; \\
A'' \,.\, A'''_{,} + B'' \,.\, B'''_{,} + C'' \,.\, C'''_{,} = P_{,}^{2}; \\
A''' \,.\, A'_{,,} + B''' \,.\, B'_{,,} + C''' \,.\, C'_{,,} = P_{,,}^{2}; \\
A' \,.\, A'''_{,,} + B' \,.\, B'''_{,,} + C' \,.\, C'''_{,,} = P_{,,}^{2}; \\
A'' \,.\, A'_{,,,} + B'' \,.\, B'_{,,,} + C'' \,.\, C'_{,,,} = P_{,,,}^{2}; \\
A' \,.\, A''_{,,,} + B' \,.\, B''_{,,,} + C' \,.\, C''_{,,,} = P_{,,,}^{2}.
\end{array}\right\} \ldots (48)$$

Wenn man dieselben Gleichungen (β) respective mit A', B', C' multiplicirt, und hierauf addirt, so wird man erhalten:

$$A' . A''_{,} + B' . B''_{,} + C' . C''_{,} = - M_{,,}.$$

Dieser Relation analog existiren noch fünf andere, und man wird nun nachstehendes System haben:

$$\left.\begin{array}{l} A'' . A'_{,,} + B'' . B'_{,,} + C'' . C'_{,,} = - M_{,}; \\ A''' . A'_{,,,} + B''' . B'_{,,,} + C''' . C'_{,,,} = - M_{,}; \\ A' . A''_{,} + B' . B''_{,} + C' . C''_{,} = - M_{,,}; \\ A''' . A''_{,,,} + B''' . B''_{,,,} + C''' . C''_{,,,} = - M_{,,}; \\ A' . A'''_{,} + B' . B'''_{,} + C' . C'''_{,} = - M_{,,,}; \\ A'' . A'''_{,,} + B'' . B'''_{,,} + C'' . C'''_{,,} = - M_{,,,}. \end{array}\right\} (49)$$

20. Die in den beiden vorhergehenden Art. entwickelten Relationen lassen sich auch durch schickliche Verbindungen der in den Art. 13, 14, 15, 16, 17 gefundenen Gleichungen erhalten. So z. B. multiplicire man von den drei folgenden Gleichungen des Systemes (34):

$$\left.\begin{array}{l} A_{,} . M' = B''' . C''_{,} - C''' . B''_{,}; \\ B_{,} . M' = C''' . A''_{,} - A''' . C''_{,}; \\ C_{,} . M' = A''' . B''_{,} - B''' . A''_{,}; \end{array}\right\} \ldots\ldots (\gamma)$$

die erste mit A', die zweite mit B', die dritte mit C', und addire, so wird man haben:

$$N . M' = A''_{,} . (B' C''' - B''' C') + B''_{,} . (C' A''' - C''' A') + C''_{,} . (A' B''' - A''' B'),$$

d. i. $N . M' = - (A_{,,} . A''_{,} + B_{,,} . B''_{,} + C_{,,} . C''_{,})$, wodurch die erste der Gleichungen (46) zum Vorschein kommt.

Wir wollen jetzt die nämlichen Gleichungen (γ) respective mit $A_{,}$, $B_{,}$, $C_{,}$ multipliciren, und hierauf addi-

ren, so wird man haben:

$$P^2_{,} . M' = A''_{,} . (B_{,} C''' - B''' C_{,}) + B''_{,} . (C_{,} A'' - C''' A_{,})$$
$$+ C''_{,} . (A_{,} B''' - A''' B_{,})$$
$$= - [A''_{,} . A'''_{,} + B''_{,} . B'''_{,} + C''_{,} . C'''_{,}].$$

Hieraus ergibt sich nun das nachstehende System:

$$\left.\begin{array}{l} A''_{,} . A'''_{,} + B''_{,} . B'''_{,} + C''_{,} . C'''_{,} = - M' . P^2_{,} \\ A'''_{,,} . A'_{,,} + B'''_{,,} . B'_{,,} + C'''_{,,} . C'_{,,} = - M'' . P^2_{,,} \\ A'_{,,,} . A''_{,,,} + B'_{,,,} . B''_{,,,} + C'_{,,,} . C''_{,,,} = - M''' . P^2_{,,,} \end{array}\right\} (50)$$

Multiplicirt man die nämlichen Gleichungen (γ) respective mit $A_{,,}$, $B_{,,}$, $C_{,,}$, so gibt ihre Summe:

$$M' . M_{,,,} = A''_{,} . (B_{,,} C''' - B''' C_{,,}) + B''_{,} . (C_{,,} A''' - C''' A_{,,})$$
$$+ C''_{,} . (A_{,,} B''' - A''' B_{,,})$$
$$= A''_{,} . A'''_{,,} + B''_{,} . B'''_{,,} + C''_{,} . C'''_{,,}.$$

Es existiren noch fünf dieser analoge Relationen, so dafs man nun nachstehendes System erhalten wird:

$$\left.\begin{array}{l} M'' . M_{,,,} = A'''_{,} . A'_{,,} + B'''_{,} . B'_{,,} + C'''_{,} . C'_{,,}; \\ M''' . M_{,,} = A''_{,} . A'_{,,,} + B''_{,} . B'_{,,,} + C''_{,} . C'_{,,,}; \\ M' . M_{,,,} = A'''_{,,} . A''_{,} + B'''_{,,} . B''_{,} + C'''_{,,} . C''_{,}; \\ M''' . M_{,} = A'_{,,} . A''_{,,,} + B'_{,,} . B''_{,,,} + C'_{,,} . C''_{,,,}; \\ M' . M_{,,} = A''_{,,,} . A'''_{,} + B''_{,,,} . B'''_{,} + C''_{,,,} . C'''_{,}; \\ M'' . M_{,} = A'_{,,,} . A'''_{,,} + B'_{,,,} . B'''_{,,} + C'_{,,,} . C'''_{,,}. \end{array}\right\} (51)$$

21. Wenn wir auf gleiche Weise von den drei Gleichungen des Systemes (37):

$$A' . M_{,} = B_{,,,} . C'_{,,} - C_{,,,} . B'_{,,};$$
$$B' . M_{,} = C_{,,,} . A'_{,,} - A_{,,,} . C'_{,,};$$
$$C' . M_{,} = A_{,,,} . B'_{,,} - B_{,,,} . A'_{,,};$$

die erste mit A', die zweite mit B', die dritte mit C' multipliciren, und hierauf addiren, so wird man haben:

$$P'^2 . M_{,} = A'_{,,} . (B' C_{,,,} - B_{,,,} C') + B'_{,,} . (C' A_{,,,} - C_{,,,} A') + C'_{,,} . (A' B_{,,,} - A_{,,,} B')$$
$$= -[A'_{,,} . A'_{,,,} + B'_{,,} . B'_{,,,} + C'_{,,} . C'_{,,,}].$$

Dieser Relation analog hat man nun folgende Gleichungen:

$$\left. \begin{array}{l} A'_{,,} . A'_{,,,} + B'_{,,} . B'_{,,,} + C'_{,,} . C'_{,,,} = - P'^2 . M_{,} \\ A''_{,} . A''_{,,,} + B''_{,} . B''_{,,,} + C''_{,} . C''_{,,,} = - P''^2 . M_{,,} \\ A'''_{,} . A'''_{,,} + B'''_{,} . B'''_{,,} + C'''_{,} . C'''_{,,} = - P'''^2 . M_{,,,} \end{array} \right\} (52)$$

22. Wenn man von den drei Gleichungen:

$$B''_{,} . C_{,} - B_{,} . C''_{,} = A'' . P^2_{,};$$
$$C''_{,} . A_{,} - C_{,} . A''_{,} = B'' . P^2_{,};$$
$$A''_{,} . B_{,} - A_{,} . B''_{,} = C'' . P^2_{,};$$

welche sich aus den Relationen (40) ergeben, die erste mit A'', die zweite mit B'', und die dritte mit C'' multiplicirt, und hierauf addirt, so wird man erhalten:

$$P''^2 . P^2_{,} = A''_{,} . (C'' B_{,} - C_{,} B'') + B''_{,} . (A'' C_{,} - A_{,} C'') + C''_{,} . (B'' A_{,} - B_{,} A'')$$
$$= (A''^2_{,} + B''^2_{,} + C''^2_{,}).$$

Außer dieser Relation gibt es noch fünf ihr analoge, so daß man folgendes System von Gleichungen haben wird:

$$\left. \begin{array}{l} A''^2_{,} + B''^2_{,} + C''^2_{,} = P''^2 . P^2_{,}; \\ A'''^2_{,} + B'''^2_{,} + C'''^2_{,} = P'''^2 . P^2_{,}; \\ A'^2_{,,} + B'^2_{,,} + C'^2_{,,} = P'^2 . P^2_{,,}; \\ A'''^2_{,,} + B'''^2_{,,} + C'''^2_{,,} = P'''^2 . P^2_{,,}; \\ A'^2_{,,,} + B'^2_{,,,} + C'^2_{,,,} = P'^2 . P^2_{,,,}; \\ A''^2_{,,,} + B''^2_{,,,} + C''^2_{,,,} = P''^2 . P^2_{,,,}. \end{array} \right\} \ldots (53)$$

23. Wenn man das Binomium

$$(C_{\prime\prime} \,.\, B''_{\prime\prime\prime} - B_{\prime\prime} \,.\, C''_{\prime\prime\prime})$$

entwickelt, so findet man, nach einigen sehr leichten Reductionen, dafür

$$(N \,.\, A_{\prime\prime\prime} - A'' \,.\, M_{\prime}) = (A' \,.\, M_{\prime\prime} + A''' \,.\, P^{2}_{\prime\prime\prime}).$$

Wenn man nun von folgenden, hieraus entspringenden analogen Relationen:

$$\begin{array}{l} C_{\prime\prime} \,.\, B''_{\prime\prime\prime} - B_{\prime\prime} \,.\, C''_{\prime\prime\prime} = N \,.\, A_{\prime\prime\prime} - A'' \,.\, M_{\prime}; \\ A_{\prime\prime} \,.\, C''_{\prime\prime\prime} - C_{\prime\prime} \,.\, A''_{\prime\prime\prime} = N \,.\, B_{\prime\prime\prime} - B'' \,.\, M_{\prime}; \\ B_{\prime\prime} \,.\, A''_{\prime\prime\prime} - A_{\prime\prime} \,.\, B''_{\prime\prime\prime} = N \,.\, C_{\prime\prime\prime} - C'' \,.\, M_{\prime}; \end{array}$$

die erste mit A''', die zweite mit B''', die dritte mit C''' multiplicirt, und hierauf addirt, so wird man erhalten:

$$\left.\begin{array}{l} A''_{\prime\prime\prime} . A'''_{\prime\prime} + B''_{\prime\prime\prime} . B'''_{\prime\prime} + C''_{\prime\prime\prime} . C'''_{\prime\prime} = N^{2} - M' \,.\, M_{\prime}; \\ \text{und dieser analog:} \\ A'_{\prime\prime\prime} . A'''_{\prime} + B'_{\prime\prime\prime} . B'''_{\prime} + C'_{\prime\prime\prime} . C'''_{\prime} = N^{2} - M'' . M_{\prime\prime}; \\ A'_{\prime\prime} . A''_{\prime} + B'_{\prime\prime} . B''_{\prime} + C'_{\prime\prime} . C''_{\prime} = N^{2} - M''' . M_{\prime\prime\prime}; \end{array}\right\} (54)$$

Die bisher entwickelten Relationen zwischen den accentuirten Gröſsen ABC und PMN werden uns jetzt weiter dazu dienen, um die gegenseitigen Beziehungen der Stücke PMN zu finden, welche ich Relationen der zweiten Classe genannt habe.

(Die Fortsetzung folgt.)

IV.

Über verschiedene Mangan-Präparate;

von

J. Bachmann.

α) Schwefelsaures Manganoxydul.

Es gibt verschiedene Methoden, dieses Salz darzustellen, nur wenige geben es ganz rein; da das natürliche in Handel, unter dem Namen Braunstein vorkommende Superoxyd, gewöhnlich mit Eisen, Blei, Kupfer, Kieselerde etc. verunreiniget ist, so muſs bei Bereitung des Salzes darauf Rücksicht genommen werden.

Manganoxyd hat die Eigenschaft, Kieselerde in seine Auflösungen mitzunehmen; dieſs geschieht ungleich mehr bei vorwaltender Säure, als wenn die Lösung neutral ist, der ganze Gehalt derselben kann aber nur durch Verjagung aller Flüssigkeit und Wiederauflösen des Salzes davon entfernt werden. Hieraus folgt, daſs alle Bereitungsarten des schwefelsauren Manganoxyduls, bewerkstelliget durch unmittelbare Auflösung des Oxydes in Säure, kein reines schwefelsaures Salz geben können, in so fern man es mit einem kieselerdehältigen Oxyde zu thun hat.

Vom Eisen wird das Salz befreit, wenn man, wie die schon längst bekannte Methode lehrt, Mangansuperoxyd, oder auch das bei Bereitung des Sauerstoffgases erhaltene braune Oxyd mit concentrirter Schwefelsäure anrührt, und recht stark durchglüht (den halben Gewichtstheil Schwefelsäure auf einen Theil Mangansuperoxyd habe ich als das beste Verhältniſs gefunden). Das Salz wird selbst bei der Weiſsglühhitze nur langsam zersetzt, es bedeckt sich mit braunem Oxyde, und unter

selbem findet man häufig unzersetztes Salz. Glüht man daher das mit Eisen verunreinigte lange genug durch, auf 36 Unzen Masse $^3/_4$ bis 1 Stunde, und laugt sie dann aus, so reagirt die Flüssigkeit mit Cyaneisenkalium gar nicht mehr auf Eisen, wobei indessen zu bemerken ist, daſs die Flüssigkeiten nicht zu concentrirt seyen, auch nicht zu viel Reagens hinzugegeben werde, weil sonst das sich mit weiſser Farbe fällende Mangan die Reaction auf Eisen, falls nur Spuren davon vorhanden sind, undeutlich macht. Unterdessen habe ich wohl mehr als zwanzig Mal das Salz mit verschiedenem Braunstein auf diese Art bereitet, und es immer eisenfrei erhalten.

Ist das Salz rein, so gibt es mit *Hahnemann*'scher Weinprobe einen blaſs ziegelrothen, oder, wenn die Lösung verdünnt war, einen weiſsen Präcipitat; ist Eisen oder Kupfer zugegen, einen schwarzen Niederschlag; tröpfelt man nun etwas Salz oder Schwefelsäure hinzu, so wird das Eisen aufgelöst, während Schwefelkupfer ungelöst zurückbleibt, selbst wenn freie Säure (nur nicht in zu groſser Menge) zugegen ist, wird das Eisen durch Weinprobe angezeigt; dieſs geschieht nicht durch reines Schwefelwasserstoffgas, auch bemerkt man gar wohl, daſs zuerst Eisen, dann aber Mangan gefällt wird. In dieser Hinsicht, und auch wegen der schwarzen Farbe des Präcipitates, welche deutlicher erscheint als bei der Cyanverbindung, ziehe ich die Weinprobe vor. Hat man aber ein mit Eisen und Kupfer verunreinigtes Salz, so thut man am besten, die Flüssigkeit mit kohlensaurem Baryt zu digeriren; ist das Eisen als Oxydul darin enthalten, so fällt es erst nach einiger Zeit, indem es Sauerstoff aus der Luft anzieht, als Oxyd zu Boden. Vom Kupfer wird das Salz sehr leicht durch einen Strom Schwefelwasserstoff befreit.

Man hat vorgeschlagen, schwefelsaures Mangan

durch Glühen von Mangansuperoxyd mit 40 Proc. schwefelsauren Eisenoxydes zu bereiten (welchem Verhältnisse beiläufig 1/3 Schwefelsäurehydrat entspricht); diese Methode gibt allerdings reines schwefelsaures Salz, hat aber keine Vorzüge vor der oben erwähnten, und ist wegen Anwendung des schwefelsauren Eisenoxydes, welches man sich doch erst bereiten muſs, umständlicher.

Enthält das Manganoxyd keine Kieselerde, so kann durch folgende Methode auch reines Salz gewonnen werden *): Mangansuperoxyd oder Oxyd wird mit der nöthigen Menge ganz fein gepulverter Kohle, am besten Kienruſs, innig gemengt, mit Öhl zu einem Teige angemacht, aus demselben Kugeln geformt, selbe zwischen Kohlenpulver gut eingefuttert, und dann einer 1/2 bis 1stündigen Rothglühhitze ausgesetzt. Nach dem Erkalten des Tiegels werden die Kugeln heraus genommen, etwas zerrieben (was leicht geschieht, indem der Zusammenhang derselben sehr lose ist), das Pulver mit Wasser übergossen, und nun beiläufig die halbe Gewichtsmenge concentrirter Schwefelsäure nach und nach zugesetzt. Die Mischung erhitzt sich sehr stark, stärker als dieſs der Fall beim Mischen von Schwefelsäure und Wasser ist: nachdem die Flüssigkeit durch 24 Stunden ruhig gestanden, wird sie filtrirt; sie ist vom Eisen ganz frei.

Wird das Gemenge von Manganoxyd und Kohle für sich allein in einem lutirten Tiegel geglüht, so miſslingt manchmal die Operation, weil sich das Manganoxydul sehr leicht mit der Tiegelmasse vereiniget, und damit

*) Den gröſsten Theil dieser, und der noch zu erwähnenden Versuche, habe ich, durch die Güte des Freiherrn von *Jacquin*, in dem Universitäts-Laboratorium angestellt.

einen sehr harten, Glas ritzenden Körper bildet; dieſs geschieht besonders dann, wenn der Tiegel einer zu hohen Temperatur ausgesetzt wird; überdieſs ist auch das sich bildende Oxydul nicht so gut vor dem Zutritte der Luft geschützt. Wird nun das Pulver mit Wasser und Schwefelsäure übergossen, so verhindert der groſse Überschuſs von Manganoxydul theils die Auflösung des Eisens, theils schlägt er das schon aufgelöste nieder; die dabei frei gewordene Wärme verhindert die Einmischung des Oxydsalzes, wenn das Oxydul durch längeres Verweilen an der Atmosphäre zum Theil in Oxyd verwandelt worden wäre. Diese Methode ist, wie schon erinnert wurde, nur dann brauchbar, wenn das Oxyd frei von Kieselerde ist, im Gegentheile führt sie nicht zum Zwecke. Ist die Kieselerde in bedeutender Menge zugegen, so gelatinirt die Flüssigkeit während des Erkaltens, und ich fand manchen sogenannten Braunstein, dessen Auflösung nach dem Abkühlen zu einem festen Klumpen erstarrte; wird dann mehr Wasser zugesetzt und gut damit vermengt, so setzt sich nach einiger Zeit ein Theil der Kieselerde als Gelée ab.

Gestützt auf die Thatsache, daſs die Auflösungen des Mangans in Mineralsäuren vom Schwefelwasserstoff, wenn selbe sauer sind, gar nicht, und die neutralen Verbindungen nur in etwas zersetzt werden, versuchte ich das schwefelsaure Salz durch Auflösen von Schwefelmangan mit verdünnter Schwefelsäure zu bereiten; ich hoffte durch einen bedeutenden Überschuſs von Schwefelmangan das Eisen zu entfernen, und in dieser Hinsicht ein reines Salz zu gewinnen; allein so viel Mühe ich mir auch in dieser Hinsicht gab, so gelangte ich doch zu keinem befriedigenden Resultate.

Ist ein groſser Überschuſs von Schwefelmangan zugegen, so wird zwar der gröſste Theil des Eisens, nicht

aber die letzten Antheile desselben entfernt; nur ein Mal gelang es mir auf diese Art, ein ganz eisenfreies Salz zu erhalten, doch kann ich mich auf die näheren Umstände nicht mehr entsinnen. Da durch den entwickelten Schwefelwasserstoff das Eisen als Oxydul in der Lösung enthalten ist, so kann man den ganzen Gehalt von Manganoxydul bis zur Bildung von schwefelsaurem Manganoxydul-Ammoniak mittelst dieses Alkali fällen, ohne jedoch das Eisen dadurch zu entfernen; nur wenn die Lösung längere Zeit an der Luft gestanden, oxydirt es sich höher, und fällt dann als Oxyd zu Boden; werden einige Tropfen salpetrige Säure zugesetzt, so erlangt die Flüssigkeit eine schwarze Farbe durch höhere Oxydation des Mangans; diese Farbe verschwindet indessen zum Theil durch längeres Stehen an der atmosphärischen Luft, und gänzlich durch Erhitzen, und jetzt kann das Eisen vollständig gefällt werden. Setzt man der durch salpetrige Säure schwarz gefärbten Flüssigkeit während des Erhitzens Ammoniak zu, so scheidet sich Manganoxydul und Oxyd aus; ist so viel Alkali hinzugegeben worden, dafs sich fast nichts mehr herausfällt, so setzt sich nach kurzer Zeit, Ruhe, das Oxyd zu Boden; nimmt man etwas von der überstehenden heifsen Flüssigkeit in ein Probirglas, so ist sie im ersten Augenblicke völlig klar, sie wird aber bald trübe, und gibt einen braunen Bodensatz; reagirt man, während die Flüssigkeit noch heifs und klar ist, so findet man Eisen, diese Reaction verschwindet aber gänzlich nach dem Erkalten und darauf folgenden Klären.

Ich glaubte ferner dadurch das Eisen zu entfernen, dafs ich schwarzes Manganoxyd zusetzte (sowohl das durch Salpetersäure bereitete, als auch das durch Oxydation des Oxydulhydrats an der Luft erhaltene), so dafs sich ein Theil Sauerstoff des Oxydes mit dem Eisenoxy-

dul verbände, und das so entstandene Eisenoxyd von dem seine Stelle einnehmenden Manganoxydule gefällt würde; allein diefs geschieht nicht so; nach einiger Zeit verlor zwar das Manganoxyd seine schwarze Farbe und die Flüssigkeit, wurde braun, trübe, dicklich, und liefs sich äufserst schwer filtriren, das Filtrat hatte eine reine gelbe Farbe, war anfangs klar, wurde aber bald trübe, hatte aber seinen Eisengehalt nicht verloren; es war demnach allen Anzeigen nach ein Oxyduloxydsalz entstanden. Nachdem sie sich durch acht Tage langes ruhiges Stehen nicht klären wollte, wurde sie mit Wasser verdünnt, und, um zu dem Oxydulsalze zurückgebracht zu werden, mit Schwefelwasserstoff in Berührung gebracht; es fällte sich nichts, auch verlor das suspendirte braune Wesen seine Farbe nicht. Hier zeigte sich recht deutlich die verschiedene Wirkungsart des reinen Schwefelwasserstoffes und der *Hahnemann*'schen Probeflüssigkeit; denn wurde etwas der Flüssigkeit während dem beständigen Durchströmen von Gas zugesetzt, so entstand sogleich ein schwarzer Präcipitat vom Schwefeleisen, der aber bald wieder verschwand.

Nachdem der Geruch von Hydrothionsäure nach einiger Zeit verschwunden war, blieb ein sehr starker und unverkennbarer Rettiggeruch zurück, welcher dem Niederschlage, welcher rostfarben aussah, selbst nach dem sorgfältigsten Aussüfsen und Trocknen anhing; da der Schwefelwasserstoff aus Schwefeleisen (bereitet durch Erhitzen von Eisenspänen, französischen Schwefelblumen und Wasser) entwickelt wurde, so konnte man daher auf einen Selengehalt im obbenannten Schwefel schliefsen. Der erwähnte braune Präcipitat gab durch Digeriren mit Schwefelsäure an selbe braunes Manganoxyd ab, und änderte seine Farbe in Weifs; nach dem Waschen, Trocknen und Glühen verhielt er sich als

reine Kieselerde. Die Flüssigkeit, aus welcher sich der braune Präcipitat absetzte, mit kohlensaurem Baryt in Berührung gebracht, gab nach einiger Zeit Eisenoxyd, und nach dem Eintrocknen und Wiederauflösen reines schwefelsaures Salz.

β) Schwefelmangan.

Ist schon sehr lange bekannt, und wird erhalten, wenn 100 Theile Mangansuperoxyd mit 75 Theilen Schwefel erhitzt werden. Wird die Operation in einem Kolben gemacht, so bemerkt man, dafs die Vereinigung nahe beim Glühen vor sich geht; es entweicht schwefelige Säure, etwas Schwefel sublimirt sich, während das Gefäfs mit einem dunkel orangefarben Gas erfüllt wird, und ein grünes Pulver, das Schwefelmangan, bleibt zurück. In einem lutirten Tiegel kann die Arbeit ebenfalls gemacht werden, doch darf die Hitze nicht zu hoch steigen, weil sonst Schwefel entweicht, und eine graue, körnige, sehr harte, aus Kieselerde, Thonerde und Schwefelmangan bestehende Masse gebildet wird. Das Hydrat dieses Sulfurides wird entweder aus dem essigsauren durch Fällung mit Schwefelwasserstoff, oder aus dem schwefelsauren mit Hydrothionammoniak erhalten, auch aus dem Doppelsalze; vom schwefelsauren Manganammoniak kann es zum Theil mittelst Schwefelwasserstoff gefällt werden; bringt man es auf ein Filtrum, und wäscht es, so wird es bald schwarz, und geht in Oxyd über; mit Ätzkalilauge entweder gekocht oder auch nur digerirt, färbt es dieselbe gelb; diefs geschieht sowohl mit dem Hydrate, als auch mit dem durch Glühen erhaltenen; bleibt das Hydrat lange Zeit mit der Lauge in Berührung, so wird es oberflächlich grün; dieses kann entweder durch Entziehen des Wassers, oder, weil die Lauge nach und nach dunkler wird, durch Ent-

ziehen eines Theiles Schwefel (welches wahrscheinlicher ist) geschehen; da keine niedrigere Schwefelungsstufe bekannt ist, so reducirt sich vielleicht ein Theil Kali zu Kalium, es bildet sich Schwefelkalium, und das sogleich zu besprechende Oxysulfurid des Mangans. In freier Luft, heftig geglüht, wird es zersetzt, schwefelige Säure und Schwefeldämpfe entweichen, und es bleibt braunrothes Oxyd zurück, welehes, mit Säure übergossen, nicht eine Spur von Schwefelwasserstoff gibt. Die nämliche Zersetzung tritt ebenfalls ein, wenn man Schwefelmangan noch heiſs gleich nach der Bereitung der Luft aussetzt; zerbricht man den losen Klumpen, welcher gewöhnlich erhalten wird, so verglimmt es öfters sehr lebhaft zum Oxyde.

Herr *Arfwedson* hat eine Verbindung von Schwefelmangan mit Manganoxydul entdeckt; da ich mir die Abhandlung darüber nicht verschaffen konnte, sondern nur wuſste, daſs selbe durch Darüberleiten von Wasserstoff über glühendes schwefelsaures Salz erhalten wird, wobei Wasser und schwefelige Säure entweichen, so stellte ich zu meiner Belehrung einige Versuche an. Über ganz fein gepulvertes schwefelsaures Manganoxydul, welches vorher bis zum Braunrothglühen erhitzt war, wurde in einer Röhre Wasserstoff geleitet; nachdem die atmosphärische Luft vertrieben war, wurde die Röhre bis zum Glühen erhitzt; man sieht die Zersetzung bald eintreten, das Salz verliert seine weiſse Farbe und wird grün, nicht nur Wasser und schwefelige Säure, sondern auch Schwefelwasserstoff entweichen, und Schwefel sublimirt sich; ist das Salz fein gepulvert, und vorher nicht ausgeglüht worden, so wird etwas Salz mit fortgerissen. Nachdem der Wasserstoff geruchlos, oder wenigstens nur mit dem, nach Art seiner Bereitung, ihm eigenthümlichen Geruche übergeht, ist die Arbeit beendiget. Am

besten geschieht sie in einer Porzellanröhre, weil gläserne Röhren selten aushalten, sondern schmelzen, und so mit dem Versuch verderben. Das in der Röhre Enthaltene hat eine sehr schöne dunkelgrüne Farbe, besitzt ganz den losen Zusammenhang und das Äufsere des Schwefelmangans. Mit Wasser in Berührung bedeckt es sich bald mit braunem Oxyde, mit Essigsäure längere Zeit stehen gelassen (ein bis zwei Monate) wird die Flüssigkeit dicklich, hat einen zusammenziehenden, bitteren, hintennach süfslichen Geschmack, mit Wasser verdünnt bleibt am Boden Schwefelmangan, sie enthält essigsaures als auch schwefelsaures Manganoxydul.

Was die relative Menge der Bestandtheile des Oxysulfurides betrifft, so ist dieselbe ohne Schwierigkeit auszumitteln. Wenn 100 Th. Oxysulfurid entweder unmittelbar oder auch mittelbar (durch Glühen desselben und darauf folgendes Anrühren des braunen Oxydes mit Schwefelsäure) in schwefelsaures Manganoxydul verwandelt werden, so erhält man 189 desselben; dieser Menge entsprechen aber 99 Theile Schwefelsäure, daher mufs, weil sich der Schwefel zum Sauerstoff verhält wie 20·1 zu 10, $\frac{20{\cdot}1}{10}(99 - 89) = 20{\cdot}1$ die in denen 100 Th. enthaltene Menge Schwefel seyn; dieser entsprechen aber 55·6 Schwefelmangan, folglich bleiben für das Oxydul 44·4; dieses Verhältnifs kommt dem von 1 Atom Schwefelmangan und 1 Atom Manganoxydul sehr nahe, denn man hat 1 Atom Schwefelmangan = 55·6, und 1 Atom Manganoxydul = 45·5, also

Berechnung.	Versuch.				
54·99	55·6	Mg.S,	daher	70·227	Mangan,
45·01	44·4	Mg,		19·882	Schwefel,
				9·891	Sauerstoff.
100·00	100·0.			100·000.	

Noch habe ich den Schwefel auf eine andere Art bestimmt, gröſstentheils um mich über eine in mehreren Lehrbüchern enthaltene Angabe, daſs das durch Schwefelwasserstoff aus einer Lösung gefällte Schwefelkupfer ($CupS^2$) beim Zutritte der Luft sehr schnell in schwefelsaures Kupferoxyd übergehe, auch nur bei verhindertem Luftzutritte getrocknet werden könne, zu belehren. 100 Th. Oxysulfurid wurden mit einer mit etwas Schwefelsäure versetzten Lösung von schwefelsaurem Kupferoxyde übergossen, die Zersetzung ging sogleich und ganz ruhig vor sich, das erhaltene schwarze Schwefelkupfer wurde auf einem gewogenen Filtrum sorgfältig gewaschen, und dann in freier Luft, unter Anwendung von etwas Wärme, getrocknet, welches binnen 24 Stunden Statt fand; das erhaltene Schwefelkupfer, jetzt von grünlichem Ansehen, wog 55·75 Th. Es wurde mit Wasser gekocht; das Filtrat gab mit Schwefelwasserstoff, Cyaneisenkalium und Chlorbarium, bloſs nach fünf bis sechs Minuten, Spuren von schwefelsaurem Kupfer zu erkennen. — Durch die erhaltene Menge Schwefelkupfer wird übrigens die obige Angabe über das Verhältniſs des Schwefels bestätiget.

V.

Fortschritte der Physik in der neuesten Zeit.

A. Physikalische Chemie *).

1. Über die Wirkung des Jods auf die Kieselflufssäure. Von *Varvinsky*.

(Annals of phil. Decemb. 1827.)

Hr. *Varvinsky* liefs in einen mit Jodgas gefüllten Recipienten kieselflufssaures Gas, so wie es sich aus einer Retorte entwickelte, treten, und fand, dafs sich das Innere des Recipienten mit einer weifsen Kruste beschlug. Nach dem Aufhören der Wechselwirkung wurde Wasser in den Recipienten gegossen, wodurch sich Siliciumoxyd niederschlug, während eine von überschüssiger Jodine gelblich gefärbte Flüssigkeit erhalten wurde, die nach dem Verdünsten farbenlos erschien. Kohlenstoffsäuerliches Ammoniak schlug daraus unter Kohlenstoffsäuregasentwickelung Siliciumoxyd nieder; die Flüssigkeit verlor durchs Verdünsten ihr Ammoniak, reagirte sauer, und setzte bei fernerer Verdünstung goldgelbe Krystalle ab, welche saure Eigenschaften besafsen, mehr im heifsen als im kalten Wasser löslich waren, und mit concentrirter Kaliumoxydlösung ein gallertartiges, sehr unangenehm schmeckendes Salz bildeten.

Die Lösung des erhaltenen kryst. sauren Körpers wurde, jedoch nur unter Mitwirkung von Wärme, von salpetersaurem Baryumoxyd gefällt, und Stärkekleister machte sie erst auf Zusatz von Schwefelsäure blau, woraus man schliefsen könnte, dafs diese Krystalle eine Doppelsäure, bestehend aus Jod- und Flufssäure, sind. Bei

*) Bearbeitet von *J. Planiawa*.

fernerer Untersuchung überzeugte sich Hr. *Varvinsky*, dafs sie kein Ammoniak in ihrer Mischung enthalten, und flüchtig sind.

2. Über Salpetersäure und ein eigenthümliches schwefelsaures Salz. Von *R. Phillips*.

Um sich eine möglichst concentrirte Salpetersäure zu bereiten, vermischte Hr. *Phillips* 70 Theile salpetersauren Kaliumoxyds mit seinem gleichen Gewichte Schwefelsäurehydrats. Nach einer achtstündigen Destillation erhielt er 46,13 Theile einer gelblichen Säure von 1,5033 spec. Gew. bei 60° Fahrenh., die sich bei der Untersuchung mittelst kohlenstoffsäuerlichen Calciumoxyds als aus 80,16 Th. wirklicher Säure, und 19,84 Th. Wassers bestehend erwies.

Diese Zusammensetzung der Säure entspricht

		in 100 Gthlen.
2 stöch. Anth. Salpetersäure . . = (54 × 2 =)	108 oder	80.
3 » » Wasserstoffoxyds = (9 × 3 =)	27 »	20.
1 stöch. Antheil Salpetersäurehydrats . . =	135 »	100.

Das in der Retorte zurückgebliebene Salz wurde mit seinem gleichen Gewichte heifsen Wassers, ohne es jedoch bis zum Aufwallen zu erhitzen, behandelt, und lieferte nach dem Auskühlen der Flüssigkeit sehr kleine asbestähnliche Fäden, die sich bei der Analyse mittelst Chlorbaryums und Rothglühhitze folgendermafsen zusammengesetzt erwiesen:

		In 100 Thl.	n. d. Versuche.
3 stöch. Anth. Schwefelsäure = (40 × 3 =)	120 =	53,33 . .	52,45.
2 » » Kaliumoxyds = (48 × 2 =)	96 =	42,66 . .	42,80.
1 » » Wassers	9 =	4,00 . .	4,75.
1 stöch. Antheil des neuen Salzes . =	225 =	100,00 .	100,00.

Diesemnach läfst sich dieses Salz auch als eine Mischung aus zwei stöch. Antheilen schwefelsauren Ka-

liumoxyds und 1 stöch. Antheile Schwefelsäurehydrats bestehend, betrachten. Hr. *Phillips* fand es überdiess schwer, dieses Salz, welches er mit Recht anderthalb schwefelsaures Kaliumoxyd nennt, ganz frei von dem doppelt schwefelsauren Salze darzustellen.

B. Meteorologie.

1. Über den Hagel und die Hagelableiter. Von *Arago*.

(*Annuaire du Bureau des longitudes*, 1828.)

Arago hat in der angezeigten Quelle eine Abhandlung über das Entstehen des Hagels und die Hagelableiter bekannt gemacht. Wiewohl in dieser Abhandlung, was den Gegenstand selbst betrifft, keine neuen Thatsachen und keine neue Theorie vorkommt, so halte ich es doch für nothwendig, die Substanz derselben hier mitzutheilen, weil es in einem Gegenstande, der so wichtig und so unentschieden zugleich ist, ein nicht gemeines Interesse haben muss, die Meinung eines Gelehrten von dem Range, wie ihn *Arago* behauptet, zu hören.

Arago beschreibt in dieser Abhandlung die Phänomene des Hagels mit ihren Nebenumständen, setzt dann die sinnreiche Theorie *Volta's* über sein Entstehen aus einander, zeigt ihre schwachen Seiten, und beurtheilt darnach, was von Hagelableitern zu halten sey.

Der Hagel, sagt *Arago*, bildet sich hauptsächlich im mittägigen Frankreich, in Italien, Spanien etc. im Frühlinge und Herbst in den wärmsten Stunden des Tages. In Europa fällt er fast immer bei Tage, doch gibt es auch Fälle, wo er des Nachts fällt. So fiel der Hagel, welcher im August 1787 in der Umgebung des Comosees eine Strecke von 30 M. Länge und 20 M. Breite verwüstete, zu Mitternacht. Dasselbe war mit dem Hagel der

Fall, welcher im August 1778 in Italien fiel, und ein anderer im Juli 1806 begann, mit Tagesanbruch zu fallen. Er geht meistens dem Gewitterregen vorher, begleitet ihn aber auch manchmal, nie oder fast nie folgt er auf ihn, besonders wenn dieser Regen etwas anhaltend ist.

Die Hagelwolken haben viel Tiefe, und unterscheiden sich von anderen Gewitterwolken durch ihre merkwürdige Aschfarbe; sie sind an den Rändern vielfach zerrissen, haben an ihrer Oberfläche hie und da unregelmäfsige Hervorragungen, und scheinen aufgedunsen. Sie sind gemeiniglich nicht hoch über der Erde. Dieses beweiset der Umstand, dafs es selten hagelt, ohne zu donnern, und dafs sich daher beide Meteore in derselben Höhe ausbilden; aber der Donner, welcher sich beim Hageln hören läfst, folgt meistens 1—2 Secunden nach dem Blitze, so dafs die Donnerwolke nur 300—700 Met. entfernt seyn kann; auch hat man schon öfter die Erfahrung gemacht, dafs eine Wolke, die bald darauf Hagel herabschüttete, wie ein dichter Schleier Thäler bedeckte, während die benachbarten Hügel heiteren Himmel über sich hatten, und eine gemäfsigte Temperatur genossen.

Beim Annähern eines Hagels ändert sich die Luftelectricität sehr oft schnell hinter einander, nicht blofs in Betreff ihrer Stärke, sondern auch in Betreff ihrer Natur (ihres Zeichens), wie man mittelst eines Electrometers erfährt; nicht selten schlägt sie innerhalb einer Minute 10—12 Mal vom Positiven ins Negative, und umgekehrt um. Manchmal hört man vor dem Hagelfall ein Geräusch, als würden Nüsse in einem Sack geschüttelt.

Die Gestalt der Hagelkörner ist sehr verschieden, doch haben alle etwas Gemeinschaftliches an sich. Fast

immer bemerkt man in der Mitte der Hagelkörner einen schwammigen Schneekern, der allein am ganzen Korn undurchsichtig ist, während die ganze Umhüllung desselben transparent erscheint, wie gewöhnliches Eis. Man muſs daher annehmen, daſs der Kern auf eine andere Weise sich bilde, als das Äuſsere des Hagels. Manchmal fallen auch groſse Körner, die in der Mitte einen Schneekern haben, der abwechselnd von durchsichtigen und undurchsichtigen Schichten eingeschlossen ist. Der wenig consistente Hagel, der in gewissen Jahreszeiten bei vorübergehenden schwachen Gewittern fällt, ist ein Mittelding zwischen Schnee und Hagel. Er fällt in den mittägigen Gegenden nie im Sommer. Es gibt noch eine dritte Art des Hagels, der ganz kernlos erscheint, er ist klein, wie der vorhergehende, aber durchsichtig. Man nimmt an, er entstehe aus Regentropfen, die, von einer Wolke kommend, auf ihrem Wege durch eine noch tiefer schwebende gehen müssen.

Um die Erklärung des Hagels, die man aufgestellt hat, prüfen zu können, muſs man das Gewicht der gröſsten Hagelkörner kennen, die je gefallen sind. In folgendem Verzeichnisse kommen Beobachtungen über diesen Gegenstand vor, jedoch sind nur solche aufgenommen worden, deren Wahrheit von einem bekannten Physiker bezeugt wird.

Am 29. April 1697 fielen in Flintshire nach *Halley's* Bericht Hagelkörner von 5 Unzen Gewicht.

Am 4. Mai desselben Jahres maſs *R. Taylor* zu Hatschin in Hartfordshire Hagelkörner, die 14 Z. im Umfange, mithin einen Durchmesser von 4 Z. hatten.

Parent, Mitglied der Academie der Wissenschaften, berichtet, daſs am 15. Mai 1703 faustgroſse Hagelkörner in Persche gefallen sind.

Am 11. Juli 1753 sammelte *Montignot* zu Toul Ha-

gelkörner von polyëdrischer Gestalt von fast 3 Z. im Durchmesser. Jedes Stück bestand aus mehreren kleineren Körnern, die im Herabfallen zusammenbackten.

Während eines Gewitters, das am 7. Juli 1769 zu Paris um 6 Uhr Abends bei einem Westwind niederging, bemerkte *Adanson* in der ersten halben Stunde 6 L. lange, 3 L. breite pyramidale Körner mit 6 Flächen. Als aber der Wind in Nordost umschlug, nahmen diese Körner die Gestalt von Menisken an, die 9 L. im Durchmesser hatten, von einer Seite convex, von der andern concav waren. Sie waren so durchsichtig und regelmäſsig, daſs sie die Gegenstände ohne Entstellung vergröſserten.

In dem oben genannten Gewitter, welches die Stadt Como und ihre Umgebung in der Nacht vom 19ten auf den 20. August 1787 traf, fielen Hagelkörner so groſs wie Hühnereier. Mehrere hatten ein Gewicht von mehr als 9 Unzen. *Volta* selbst gibt diese Zahlen an.

Delcros erzählt, er habe oft pyramidale Hagelkörner bemerkt, die aus Strahlen bestanden, welche vom Mittelpuncte gegen den Umfang hinliefen, und von einer krummen Fläche begrenzt waren, als wären sie Kugelstücke. Am 14. Juli 1819 Nachts sammelte *Delcros* zuerst bei einem Gewitter, welches das westliche Frankreich hart hernahm, mehrere ganze Körner, worin er einen opaken weiſsen Kern mit Spuren von concentrischen Schichten bemerkte, die von auſsen von zwölf groſsen Pyramiden begrenzt waren, zwischen welchen kleinere Pyramiden eingeschaltet waren. Das Ganze bildete eine kugelförmige Masse von beinahe 9 Centim. im Durchmesser.

Es fand vielleicht nie in irgend einem Lande ein Hagelfall Statt, dessen Wirkungen verheerender waren, und den merkwürdigere Umstände begleiteten, als jener ist, den *Tessier* vom Jahre 1790 berichtet. Das Gewitter

begann im mittägigen Frankreich Morgens am 13. Juli 1788, durchstreifte in weniger als einer Stunde das ganze Königreich der Länge nach, und erstreckte sich auch über die Niederlande und über Holland. Die vom Hagel getroffenen Ländereien lagen in zwei parallelen Strichen von Südwest nach Nordost, einer davon war 175 M., der andere 200 M. lang. Die mittlere Breite des westlichen Streifens betrug 4 M., die des anderen 2 M. Auf den zwischen beiden gelegenen Streifen fiel kein Hagel, sondern nur häufiger Regen; er war 5 M. breit. Sowohl an der Ostseite des östlichen behagelten Streifens, als auch an der Westseite des westlichen fiel viel Wasser herab; überall ging dem Ausbruche eine tiefe Dunkelheit voraus, selbst an den vom Hagel verschonten Theilen.

Aus einer Vergleichung der Stunden, wo der Hagel an verschiedenen Stellen fiel, findet man, daſs das Gewitter in einer Stunde 16 $^1/_2$ M. von Mittag gegen Mitternacht zurücklegte, und daſs an beiden Streifen dieselbe Geschwindigkeit herrschte. Am westlichen Streifen hagelte es in Tourain bei Loches um 6 $^1/_2$ Uhr früh, zu Chartres um 7 $^1/_2$ U., zu Rambouillet um 8 U., zu Pontoise um 8 $^1/_2$ U., zu Clermont um 9 U., zu Douai um 11 U., zu Courtray um Mitternacht, zu Flessing um 1 $^1/_2$ U.

Im östlichen Streifen erreichte das Gewitter Artenay bei Orléans um 7 $^1/_2$ Uhr früh, Andonville um 8 U., die Vorstadt Saint-Antoine zu Paris um 8 $^1/_2$ U., Crespy um 9 $^1/_2$ U., Câteau-Cambrésis um 11 U., Utrecht um 2 $^1/_2$ U. Überall dauerte der Hagelfall nur 7 — 8 Minuten. Die Körner hatten nicht überall dieselbe Gestalt, einige waren rund, andere lang und spitzig, die gröſsten wogen $^1/_2$ Pfund.

Nach dieser Zusammenstellung geht *Arago* auf die

Darstellung der *Volta*'schen Theorie des Hagels über, und beschäftiget sich eigens damit, wie nach dieser Theorie die Bildung des Körpers, die Einhüllung desselben vor sich geht, und worin die Kraft ihren Sitz hat, durch welche Eismassen von 3 — 4 Unzen, ja selbst von einem halben Pfunde Stunden lang in der Luft schwebend erhalten werden; warum die Luftelectricität so intensiv ist und so oft ihr Zeichen ändert, während der Himmel mit Hagelwolken bedeckt ist. *Arago's* Darstellung ist sehr ausführlich, ich glaube mich aber kürzer fassen zu dürfen, weil *Volta's* Theorie ohnehin gröfstentheils bekannt ist. (Siehe meine Naturlehre, 2. Aufl., S. 679.)

Die Ursache der Erkältung, wodurch in der wärmsten Jahreszeit in sehr tief schwebenden Wolken der Hagelkern sich bildet, sucht *Volta, Guyton-Morveau* etc. in der Verdünstung. Die Wolken bestehen nach der Ansicht dieser Gelehrten aus sehr kleinen Wasserbläschen, und diese müssen mitten im Sommer selbst gegen Mittag an der oberen Wolkenseite stark verdünsten, weil sie das intensive Sonnenlicht trifft, und sie in sehr trockener Luft schweben. Auch die in Wolken stets vorhandene Electricität mufs diese Verdünstung noch verstärken, denn der Erfahrung gemäfs verdünstet eine electrisirte Flüssigkeit leichter als eine im natürlichen Zustande befindliche. Nach *Volta's* Ansicht wird endlich die Verdünstung durch die Bläschenform noch begünstiget. Die damit verbundene Erkältung bringt die Bläschen dahin, dafs sie in Eis übergehen, und so den ersten Anfang zum Hagel bilden. Vor *Volta* nahmen die Physiker an, dafs sich dieser Kern beim Herabfallen durch den wässerigen Beschlag, den er aus der feuchten Atmosphäre aufnimmt, bis zum unten anlangenden Hagelkern vergröfsere; da aber die Hagelwolken immer sehr tief schweben, und daher der Hagel gewifs

nicht über eine Minute braucht, um auf die Erde zu gelangen, so ist es wohl nicht begreiflich, wie ein kleiner Kern selbst in sehr feuchter Luft bis zur Gröſse eines Hühnereies anwachsen soll. Darum nahm *Volta* an, der schon gebildete Hagel bleibe in der Luft 5, 16 bis 15 M., ja selbst Stunden lang schweben. In der Erklärung der Möglichkeit dieses Schwebenbleibens liegt das Neue und Sinnreiche der *Volta*'schen Hypothese. Dieser Erklärung liegt ein electrischer Versuch zum Grunde, der den Namen des electrischen Tanzes führt. So wie bei diesem bekannten Phänomen leichte Körper zwischen einer electrischen und einer im natürlichen Zustande befindlichen oder mit entgegengesetzter Electricität versehenen Platte hin und her hüpfen, indem sie von ersterer abwechselnd angezogen und abgestoſsen werden, eben so geht dieses mit den Hagelkernen zwischen zwei über einander befindlichen Wolken, wovon die obere stets electrisch seyn muſs, während die untere entgegengesetzt Electricität haben, oder auch sich im unelectrischen Zustande befinden kann. Bei dem Oscilliren zwischen diesen zwei Wolken setzt sich an die Hagelkerne beständig neue Flüssigkeit an, friert und bildet die concentrische Einhüllung derselben, wodurch sie zu der Gröſse anwachsen können, welche die Erfahrung am Hagel zeigt.

Die Annahme zweier Wolkenschichten über einander hat keine Schwierigkeit; man sieht ja oft, daſs solche Schichten von Winden nach verschiedenen, oft gerade einander entgegengesetzten Richtungen getrieben werden, mithin eine verschiedene Höhe haben müssen. Eben so zeigt das Daseyn solcher Schichten der Umstand, daſs vor einem Gewitter kleine isolirte Wölkchen sich am Himmel befinden, die manchmal unbeweglich dastehen, nicht selten aber mit Heftigkeit unter ande-

ren, an Farbe und Größe verschiedenen Wolken fortgetrieben werden. In derselben Gewitterwolke können sich Partien von entgegengesetzter Electricität befinden, denn *Volta* selbst hat bemerkt, daſs oft die Wolkenelectricität in einer Minute bis vierzehn Mal ihr Zeichen ändere. Man kann sich auch das Entstehen solcher zwei Wolkenschichten leicht erklären. Wenn auf eine schon vorhandene Wolke Sonnenstrahlen fallen, so entwickeln sie an ihrer oberen Fläche viele Dünste, diese sättigen die trockene Luft der nächsten Umgebung, gerathen aber beim Aufsteigen in kältere Schichten, wo sie wieder in Bläschen überzugehen gezwungen werden, und so eine höhere Wolkenschichte bilden. Die obere durch Condensation entstandene Schichte muſs positiv-electrisch seyn, weil unseren Erfahrungen gemäſs die Zersetzung der Dünste mit Entwickelung positiver Electricität verbunden ist; die untere sollte, ihrem Entstehen nach, dieselbe Electricität besitzen, allein weil die entstehenden Dünste selbst positiv-electrisch sind, so muſs in der Wolke negative Electricität zurückbleiben.

Dieser sinnreichen Theorie haben nicht alle Physiker ihre Beistimmung gegeben, und selbst in Italien haben sie sogar *Volta's* Schüler, z. B. *Bellani*, angefochten. Was man ihr entgegensetzt, ist folgendes: Zuerst ist es schwer zu begreifen, wie Sonnenstrahlen oder eine andere Wärmequelle die Verdünstung einer Flüssigkeit anfachen können, ohne eine Erwärmung hervorzubringen, denn das Erwärmen ist doch kein Erkältungsmittel. Wickelt man zwei Thermometerkugeln in nasse Leinwand, und setzt sie der freien Luft so aus, daſs eine im Schatten, die andere im Sonnenlichte sich befindet, so bemerkt man wohl an letzterer eine stärkere Verdünstung, aber der Stand der Quecksilbersäule zeigt an derselben eine höhere Temperatur an, als an der anderen. Da nach

Volta das Sonnenlicht zur Bildung der Hagelkerne unentbehrlich ist, so muſs der Hagel, welcher etwa um 3 oder 4 Uhr früh fällt, wenigstens 10 — 12 Stunden lang zwischen zwei electrischen Wolken oscillirt haben; allein während dieser Zeit hätte der Hagel die Electricität der Wolken gewiſs ausgleichen müssen. Einen noch mehr directen Beweis der Unzulänglichkeit der *Volta*'schen Erklärung findet *Bellani* in einem Gewitter, das im Juli 1806 vor Sonnenaufgang ausbrach, und eine ungeheure Menge Hagel fallen lieſs, und doch konnte er am Abende vorher am ganzen Horizont keine Spur eines Gewitters bemerken. Diese Puncte sprechen gegen die Richtigkeit der Basis der *Volta*'schen Theorie, aber auch im weiteren Verlaufe derselben kommen noch Schwächen vor. Die Theile einer Wolke sind so beweglich, daſs es schwer begreiflich wird, wie sie beim Hin- und Herspringen der Hagelkörner allein unbeweglich bleiben können, man sollte eher glauben, die Kraft, welche die Oscillation jener Körner unterhält, müsse auch eine schnelle Vereinigung der zwei Wolkenschichten bewirken, zwischen welchen die Oscillationen vor sich gehen sollen. Das Experiment, der electrische Tanz genannt, fordert zum Gelingen zwei feste Platten; ersetzt man eine derselben durch eine Wasserschichte, wie *Bellani* gethan hat, so hört der Tanz auf, der hüpfende Körper dringt nach der ersten Oscillation in die Flüssigkeit ein, und verläſst sie nicht wieder. Bei den Wolken müſste dasselbe Statt finden, die Körner müſsten vermöge ihrer Geschwindigkeit in die Wolke eindringen, die Repulsion hätte ein Ende, und es müſsten deren von Zeit zu Zeit herabfallen. Allein der Hagelfall beginnt plötzlich und dauert nicht lange.

Fände die von *Volta* angenommene Oscillation wirklich Statt, so müſsten sie doch Reisende, die sich oft

in der Höhe befanden, wo sie existiren sollte, wahrgenommen haben; auch müfste der Hagel beim Aufsteigen oft in Örter gerathen, wohin er beim Herabfallen nie gelangen könnte, z. B. unter ein Dach oder einen hervorragenden Felsen, und doch hat man noch nie etwas der Art wahrgenommen. *Bellani* führt noch einen besonderen Umstand an. Sollten, sagt er, die Gewitterwolken eine so starke anziehende Kraft besitzen, dafs sie Massen von 8 — 12 Unzen Stunden lang im Oscilliren erhalten könnten, so müfsten auch durch eine einzige Wolke Staub und selbst ziemlich grofse Steine von der Erde gehoben werden können, und beim Herabfallen noch mehrere Verwüstungen verursachen, als es der Hagel zu thun vermag.

Es ist also die *Volta*'sche Theorie nicht genügend, und doch haben die Vertheidiger der Hagelableiter die Gründe zu Gunsten derselben von dieser Ansicht *Volta's* hergenommen. Sollten aber selbst nach *Volta's* Ansicht diese Ableiter nicht mehr schädlich als nützlich seyn? Denn wenn eine ausgebildete Gewitterwolke durch den Wind in eine Gegend getrieben wird, wo sich Hagelableiter befinden, und die vorausgesetzte Wirkung derselben wirklich vorhanden ist, so mufs dadurch der electrische Zustand der Wolke so geändert werden, dafs sie den Hagel fallen lassen mufs. In Italien, Savoyen, im Canton de Vaud, selbst in der Umgebung von Paris errichtet man in den Weinbergen verticale Stangen. Einige versehen sie oben mit einer kupfernen Spitze, und leiten einen Metalldraht herab in die feuchte Erde, Andere behalten die Spitze bei, und nehmen den Leitungsdraht weg, Andere wenden gar nur die blofse Stange an, und doch sollen ungeachtet dieser wesentlichen Verschiedenheiten alle Ableiter gleich gut wirken, und nie, sagt man, sey ein damit versehenes Feld behagelt wor-

den. Allein ein Baum mufs doch wirksamer seyn als eine blofse Stange, und doch werden beholzte Gegenden häufig vom Hagel getroffen; Stangen mit Metallspitzen ohne Ableitungsdraht wirken nicht besser als nackte Stangen, ja selbst mit Stangen, die Metallspitzen und Leitungsdrähte haben, würde man nur dann eine Wirkung erzielen können, wenn man damit grofse Landesstrecken versähe.

2. Besondere Wirkung eines Blitzschlages
Von *Scoresby*.

(Journ. of Scien. N. XVI. p. 203.)

Das Schiff, welches den Weg von London nach New-York regelmäfsig in 25 Tagen macht, wurde auf einer dieser Reisen von einem Blitze getroffen, und verlor dadurch seinen Ableiter. Da der Capitän noch ein neues Gewitter befürchtete, so errichtete er einen anderen Ableiter auf dem Mittelmaste. Wirklich ward auch dieser von einem Blitzstrahle getroffen und völlig geschmolzen, so dafs das Eisen in Tropfen in die See fiel. Alle Reisenden bemerkten, dafs an der Stelle, wo der Blitz ins Wasser fuhr, dasselbe rings herum sehr deutlich sank. Da die Fangstange des Ableiters 4 F. lang und 5—5$^1/_2$ L. dick war, und doch geschmolzen wurde, so war sie offenbar zu dünn. Übrigens brachte dieser Blitz sehr merkwürdige Wirkungen hervor.

Ein vortreffliches Chronometer, das kaum um $^1/_{10}$ S. in 24 Stunden fehlte, war so durch den Blitzschlag hergenommen, dafs es um 24 M. zu früh ging; alle Theile desselben waren stark magnetisch geworden, und sein Gang mufste demnach stark von der Lage dieser Theile gegen die Weltgegenden abhängen, und sich mit ihr ändern.

Eben so wurden alle vom Blitz getroffenen Messer

und Gabeln magnetisch. Auch die Einwirkung auf die am Schiffe befindlichen Magnetnadeln war bemerkenswerth; wiewohl sich alle an demselben Platze befanden, so waren sie doch vom Blitze verschieden afficirt. Einige wurden dadurch stärker, andere schwächer, andere ihrer Kraft gänzlich beraubt, endlich an einigen die Pole umgekehrt. Die merkwürdigste Wirkung erfolgte aber an einem im Schiffe befindlichen paralytischen Kranken. Dieser war hoch in Jahren und an den Gliedern gelähmt, so, dafs er seit drei Jahren keine halbe Meile Wegs machen konnte; seit er sich eingeschifft hatte, konnte er nicht einen Augenblick aufstehen. Der Blitz schlug nahe an seinem Bette ein, und man sah mit Erstaunen, dafs er gleich darauf aufstand und am Verdecke herumging, als hätte er sich nie übel befunden. Zuerst verlor er die Empfindung, doch dauerte dieses nicht lange, und seine Herstellung ist vollkommen; denn er bewegte sich während des noch übrigen Weges stets im Schiffe herum, und konnte selbst beim Ausschiffen in sein Haus gehen.

3. Über die mittlere Temperatur am Äquator. Von *Brewster*.

(Journ. of Scien. N. XV. p. 60.)

Brewster hat aus mehreren in der Nähe des Erdäquators angestellten Temperaturbeobachtungen den mittleren Wärmegrad am Äquator selbst zu deduciren unternommen. Da dieser Gegenstand schon früher von ihm behandelt wurde, bei welcher Gelegenheit er aus Beobachtungen, die man an verschiedenen Puncten von Ceylon und Batavia anstellte, diese mittlere Temperatur nicht über 80° ½ F. (26.9 C.) fand, und *Atkinson's* Arbeit über denselben Gegenstand den grofsen deutschen Naturforscher *A.* von *Humboldt* vermochte, sich mit der ihm eigenen Umsicht und Schärfe über diesen

Punct auszusprechen, so muſs man wohl jeden Beitrag, der diese groſse Frage ihrer endlichen Entscheidung zuführen kann, gehörig beachten, und darum mögen hier die Beobachtungen Platz finden, die zu Singapore, in Malacca und der Prinz Wales-Insel angestellt wurden, nebst dem Raisonnement, wodurch *Brewster* zum Ziele zu gelangen suchte. Die Beobachtungen von Singapore waren zunächst am Äquator angestellt, mit diesen beginnt auch *Brewster*.

1. Singapore.

Nördliche Breite 1°, 24 M., östl. Länge 104°.

Die Beobachtungen wurden vom Lieutenant *W. Farquhar* angestellt.

Die Zeit der Beobachtung war 6 U. Morgens, Mittags, und 6 U. Abends.

1822.

Mittl. Jahrestemp. um 6 U. Abends u. Morgens = 79°.45.
» » » Mittag . . . . 84°.0.

Um von diesen Beobachtungen die mittlere tägliche Temperatur abzuleiten, wendete *Brewster* die Correctionen an, welche zu Leith 1824 und 1825 gefunden wurden. Ob dieses überhaupt mit Recht geschehen durfte, da Leith ein so ausgezeichnetes Seeklima genieſst, und an Breite so sehr von dem hier besprochenen Beobachtungsplatze abweicht, mag dahin gestellt seyn; indeſs scheint mir dieses etwas gewagt. Aus diesen Beobachtungen ergab sich, daſs die mittlere Tagestemperatur um 0°.29 gröſser ist, als diejenige, welche um 6 U. Abends und Morgens Statt hat, und um 2°.51 kleiner, als die zu Mittag. Daher findet man

die mittl. tägl. Temperatur von 6 U. Ab. u. 6 U. M. 79°.74,
» » » » 12 U. Mittags . 81°.49,
Mittelwerth . . 80°.47.

Allein diese Correctionswerthe beziehen sich auf ein nördliches Clima, und können auf ein tropisches nicht wohl angewendet werden, wo sich die Temperatur von Monat zu Monat so wenig ändert. Darum wählte *Brewster* lieber die Correctionswerthe, die sich aus den Beobachtungen in den drei Sommermonaten ergaben, für welche die Curve der täglichen Variationen der Wärme mit der in tropischen Gegenden mehr Ähnlichkeit haben mufs. Doch diese ändern die beobachteten Gröfsen nur wenig, denn sie sind — 0°.08 und — 3°.00. Man erhält mittelst ihrer

die mittlere Tagestemp. von 6 U. Ab. u. 6 U. Morg. 79°.37,
» » » » 12 U. Mittags . . . 81°.89,
. . . . . . Mittelwerth . 80°.18.

Dieser Werth ist zugleich die mittlere Jahrestemperatur.

1 8 2 3.

Mittlere Jahrestemp. von 6 U. Ab. und 6 U. Morg. 79°.0,
» » » 12 U. Mittags . . . . 83°.7;

daher, wenn man die vorigen Correctionen anbringt:

Mittlere Jahrestemp. von 6 U. Ab. und 6 U. Morg. 78°.92,
» » » 12 U. Mittags . . . 80°.70,

Mittelwerth als mittl. Jahrestemp. für 1823 gleich 79°.81.
Das Mittel aus der Temperatur in den Jahren 1822 und 1823 ist demnach . . . . 80°.00.
Die *Brewster*'sche Formel *) gibt . . . . . . 81°.36,
daher die Differenz . . . . 1°.36.

2. Malacca.

Nördliche Breite 2°, 16′, östl. Länge 102°, 12′.

Die Beobachtungen wurden wieder von *Farquhar*

---

*) Diese Formel ist $T = 81°.85 \sin. D + 1$, wo T die mittlere Jahreswärme, D die Breite des Beobachtungsortes bezeichnet.

im Jahre 1809 angestellt, die Instrumente befanden sich im alten Gubernements-Hause.

Mittlere Jahreswärme um 8 Uhr . . . . . . 77°.67,
» » » 4 » . . . . . . 82°.33.

Daran die Correction + 1°.24 und — 3°.95 angebracht, welche sich aus den Sommerbeobachtungen zu Leith ergeben wird:

Mittlere Temperatur um 8 U. . . . . 78°.91,
» » » 4 » . . . . 78°.38,
Mittelwerth . . 78°.65.

Diese ist zugleich die mittlere Jahreswärme für Malacca.

Die *Brewster*'sche Formel gibt . . . . 81°.02,
mithin eine Differenz von . . . . 2°.39.

3. Prinz Wales-Insel.

Nördliche Breite 5°, 25′, östl. Länge 100°, 19′.

Hier wurden die Beobachtungen in den Jahren 1815, 1816, 1820, 1821 und 1823 angestellt.

1815 — 1816.

Diese Beobachtungen erstrecken sich vom Juni 1825 bis Juli 1826; sie wurden alle drei Stunden, nämlich um 6 U., 12 U., 3 U. und 9 U. Abends angestellt.

Mittlere Temperatur um 6 U. v. M. . . . . 76°.1,
» » » 12 U. M. . . . . . 79°.6,
» » » 3 U. n. M. . . . . 81°.5,
» » » 9 U. n. M. . . . . 79°.1.

Bringt man die Correctionen den Beobachtungen zu Leith gemäß an, so wie sie sich für die Sommermonate ergeben, nämlich + 3°.5, — 2°.9, — 3°.9 und 0°.7, so bekommt man

die mittlere tägliche Temperatur um 6 U. v. M. 79°.6,
» » » » » 12 U. M. . 76°.7,
» » » » » 3 U. n. M. 77°.6,
» » » » » 9 U. n. M. 79°.8,

davon das Mittel, als Jahrestemp. für 1815 u. 1816 = 78°.4.

1 8 2 0 — 1 8 2 1.

Die Beobachtungen für dieses Jahr wurden um 7 U. früh, 12 U. Mittags, und um 4 U. n. M. angestellt. Sie gaben

die mittlere Temperatur um 7 U. . . . . 77°.8,
» » » » 12 U. . . . . . . 81°.6,
» » » » 4 U. . . . . . . 83°.1.

Mit den Correctionen für die Sommermonate zu Leith, nämlich + 2°.46, — 3°.03 und — 4°.24, bekommt man

die mittlere Temperatur für 7 U. . . . . . . 80°.3,
» » » » 12 U. . . . . . . 78°.6,
» » » » 4 U. . . . . . . 78°.9,

Mittelwerth, als mittl. Wärmegrad für 1820—1821 79°.26.

1 8 2 3.

Diese Beobachtungen wurden nur in den ersten eilf Monaten dieses Jahres angestellt, um 8 U., 12 U. und 4 U. Sie gaben folgende Resultate:

Mittlere Temperatur um 8 U. . . . . 78°.85,
» » » 12 U. . . . . 82°.90,
» » » 4 U. . . . . 83°.89.

Mittelst der Correctionen für die Sommerwerthe + 1°.25, — 3°.03, — 4°.24 erhält man

mittlere Temperatur um 8 U. . . . . 80°.10,
» » » 12 U. . . . . 79°.87,
» » » 4 U. . . . . 79°.65,

Mittelwerth und mittlere Wärme für 1823 . . 79°.87.

Nimmt man aus den Wärmegraden für 1815—1816, 1820—1821 und 1823 wieder das Mittel, so erhält man als mittlere beobachtete Wärme in der Prinz Wales-Insel . . . . 79°.18,
nach *Brewster's* Formel . . . . 79°.93,

Differenz . 0°.75.

Leitet man nun aus diesen Resultaten die mittlere Temperatur am Äquator mittelst der Formel $\frac{t}{\cos. lat.}$ ab, so bekommt man

von den Beobachtungen zu Singapore . . . 80°.03,
» » » » Malacca . . . . 78°.71,
» » » » Prinz Wales . . 79°.53,

mithin als mittlere Wärme am Äquator . . . 79°.42,
oder in hunderttheiligen Graden . . . . . . 26°.3.

Atkinson nimmt diese = 84°,5 an, nach *A. v. Humboldt* hingegen steigt sie nicht über 81°,5. Man sieht demnach, daſs sich des letzteren Genauigkeit und Scharfsinn wieder auf das beste bewährt hat.

4. Einfluſs der Nordlichter auf die Magnetnadel. Von *Arago*.

(*Annal. de Chim. et de Phys. Tome* 36, *p.* 398.)

Schon im verflossenen Jahrhunderte haben *Celsius* und *Hiorter* bemerkt, daſs Nordlichter an einer Magnetnadel eine unregelmäſsige merkliche Bewegung erzeugen; *Cotte*, *Canton* und *Cassini* haben dieses bestätiget. *Arago* sucht nun sogar nachzuweisen, daſs dieser Einfluſs selbst auf Magnetnadeln sich erstreckt, die sich in Örtern befinden, über deren Horizont das Nordlicht nicht gesehen wird, so daſs man das Stattfinden eines Nordlichtes aus dem Gange einer Magnetnadel gleichsam voraussagen kann, wie dieses von *Arago* wirklich geschehe-

hen ist. Aufser mehreren schon früher von diesem ausgezeichneten Naturforscher aufgestellten Facten zur Bestätigung dieser Behauptung, stellt er im Decemberhefte der *Annales de Chimie etc.* für das Jahr 1827 eine Reihe von Tagen auf, an welchen Störungen in der Richtung der Magnetnadel bemerklich waren, wiewohl man an diesen Tagen zu Paris keine Spur eines Nordlichtes bemerken konnte; von Einigen ist es aber schon ausgemacht, dafs in höheren Breiten Nordlichter gesehen wurden.

Im Jahre 1826 waren Störungen im Gange der Magnetnadel bemerklich an folgenden Tagen: Am 10ten und 13. Februar; am 9ten, 23sten und 29. März, und am 9ten, 13ten, 17ten und 24. April.

Am 29. März wurde wirklich in Schottland und im nördlichen England ein grofses Nordlicht gesehen, wie *Dalton* in Manchester an *Arago* schreibt. Es erschien in Gestalt eines Lichtbogens, und konnte in einer nahe im magnetischen Meridian liegenden Linie von 170 engl. Meilen Länge beobachtet werden. Am südlichsten Theile dieser Linie erschien der höchste Punct dieses Bogens nördlich vom Zenith, im magnetischen Meridian und 60° über dem Horizont; am nördlichsten befand er sich südlich vom Zenith in einer Höhe von 55°, aber auch im magnetischen Meridian. Daraus schliefst *Dalton*, dafs die verticale Höhe des Bogens 100, und dessen Breite 8 — 9 englische Meilen betragen haben dürfe, er mochte auf 500 Meilen von Ost gegen West sichtbar gewesen seyn.

Im Jahre 1827 wurde an folgenden Tagen eine Unruhe an der Magnetnadel bemerkt:

Am 4ten, 9ten, 18ten, 25sten und 30. Jänner; am 3ten, 4ten, 17ten, 18ten und 19. Februar; am 6ten, 7ten, 8ten (Abends), 9ten (Morgens), 12ten, 13ten, 22sten (Mittags),

24sten und 30. März; am 2ten und 16. Mai; am 25sten, 26sten und 27. Juni; am 23. Juli; am 14ten, 27sten und 28. August; am 8ten und 25. September; am 6ten und 17. October; am 18ten und 19. November, und am 29sten und 30. December. An mehreren dieser Tage wurden wirklich Nordlichter beobachtet, von einigen sind noch keine bestimmten Nachrichten vorhanden. Die Tage, an welchen gleichzeitig Störungen im Gange der Magnetnadel und Nordlichter beobachtet wurden, sind: der 9. Jänner 1827. An diesem Tage bemerkte man zu Kendal in England ein glänzendes Nordlicht. In Paris war an diesem Tage der Himmel völlig bedeckt, und man konnte daher nicht gewiſs seyn, daſs daselbst wirklich kein Nordlicht vorhanden war. Am 17. Februar um 8 Uhr Abends wurde im Norden von Gosport von *Burney* ein glänzendes Nordlicht beobachtet, das zu jeder Seite des magnetischen Meridians 20° annahm, und bis 10 Uhr sichtbar war; um diese Stunde verdeckte es starker Schneefall. Am 27. Aug. wurde zu Perth in Schottland ein Nordlicht beobachtet, das einen Augenblick lang fast den ganzen Himmel bedeckte. Am 28sten desselben Monats beobachtete man zu Roxburghshire ein Nordlicht. Am 8. September sah man um 8 $^1/_2$ U. Abends zu Saint Cloud bei heiterem mondhellen Himmel ein Nordlicht. An diesem Tage war auch die Magnetnadel ungemein stark beunruhiget. Schon um Mittag bemerkte man eine merkliche Störung der täglichen Variation der Declinationsnadel, und ihr Nordpol hatte eine um 13 M. westlichere Richtung als gewöhnlich; um 1 U. 19 M. erschien die Abweichung um 19 M. gröſser als an den vorhergehenden Tagen, und die Nadel war den ganzen Tag hindurch in Unruhe; um 9 $^1/_4$ U. Abends bemerkte man, daſs sie um 8 M. nach Ost gegangen sey, während sie den ganzen Tag über nach Westen abge-

lenkt wurde. Auch die Neigungsnadel wurde afficirt, und zeigte gröfsere Störungen, als auf Rechnung von Beobachtungsfehlern gesetzt werden können. Am 25. September erblickte *Arago* nach 9 U. Abends zwischen NNW. und NO. leuchtende Wolken, die abwechselnd erschienen und verschwanden, einmal einen zusammenhängenden Lichtbogen bildeten, dessen Scheitel nahe im magnetischen Meridiane zu liegen schien. Zu Havre, Ostende, Arau, Zürch, zu Gosport und Kendal in England, in Schweden und Dännemark bemerkte man dieselbe Erscheinung. In England übertraf nach *Forster* das Nordlicht an Helligkeit den hellsten Mondschein.

Am 6. October an mehreren Orten in England, ungeachtet die Nacht mondhell war, ein Nordlicht, zu Manchester erschien es glänzend. Am 17. October sah *Burney* zu Gosport ein schwaches Nordlicht; am 18ten und 19. November nahm man in Roxburghshire Nordlichter wahr, das am 18ten erschien nach *Burney* nur 5° über den Horizont.

5. Gegen den Einflufs der Nordlichter auf die Magnetnadel.

(Edinb. Journ. of Science. N. XVI. p. 189.)

Im vorhergehenden Aufsatze scheinen folgende Sätze bewiesen zu seyn:

1. Dafs ein Nordlicht, es mag wo immer sichtbar seyn, die Magnetnadel in Bewegung setzt.
2. Dafs diese Einwirkung auf die Magnetnadel nicht unterbleibt, wenn das Nordlicht auch, wegen zu dichten Wolken nicht sichtbar ist.
3. Dafs dadurch in Orten, wo man von dem Statt habenden Nordlichte keine Spur bemerkt, dieselbe Affection der Magnetnadel eintritt.

Ungeachtet der starken Gründe, welche das Vorher-

gehende für die Richtigkeit dieser Behauptungen liefert, ungeachtet sie von einem Manne herrühren, der nicht zu voreilig Hypothesen aufstellt, sondern so lange mit seiner Ansicht zurückhält, bis sie einen Grad der Wahrscheinlichkeit erlangt hat, der zunächst an Gewifsheit grenzt: so wird doch im genannten Journale in einem von *Brewster* herrührenden Aufsatze die Richtigkeit obiger Behauptung bestritten, und gezeigt, dafs es Nordlichter gab, welche die Magnetnadel nicht afficirten, und dafs umgekehrt Affectionen der Magnetnadel bemerkt wurden, ohne dafs irgendwo ein Nordlicht gesehen werden konnte.

Da es mir in streitigen Puncten eben so interessant als wichtig zu seyn scheint, beide Parteien anzuhören, besonders, wenn an ihrer Spitze Männer von solcher Auszeichnung stehen, wie es hier der Fall ist, so lasse ich hier das folgen, was gegen *Arago's* Behauptungen eingewendet wird:

»Man kann es nicht läugnen, dafs man oft eine Unruhe an der Magnetnadel während eines Nordlichtes bemerkt hat; doch kann man darum noch nicht mit *Arago* sagen, dafs solche Beobachtungen einen hinreichenden Grund zu der Behauptung abgeben, im Nordlichte liege die Ursache jener Unruhe. Es können zwei Ereignisse sich stets begleiten, und doch nicht mit einander in dem Verhältnisse stehen, wie Ursache zur Wirkung. Die Agitation der Magnetnadel und das Nordlicht können die sich begleitenden Wirkungen einer allgemeineren Ursache seyn, und diese kann eine dieser Wirkungen ohne die andere, oder beide oder keine derselben hervorbringen. Das war auch die Meinung *Canton's*, der das Nordlicht als Folge der Electricität der erhitzten Luft ansieht, und die Störung der Magnetnadel nicht dem Nordlichte, sondern dem Einflusse der erhitzten Luft

auf den grofsen Erdmagnet zuschreibt. Er hat diesen Einflufs dadurch erläutert, dafs er eine Magnetnadel dem Einflusse erhitzter Magnete aussetzte. *Canton* meint auch, seine Ansicht werde durch das Factum begünstiget, dafs die Bewohner der Nordländer die Nordlichter besonders stark finden, wenn nach strenger Kälte plötzlich Thauwetter einfällt. Diese Meinung ist auch durch die Beobachtung *Wian's* begünstiget, der behauptet, dafs auf ein Nordlicht beständig starke Süd- oder Südwestwinde (die wärmsten Winde in jenen Gegenden) mit Thauwetter und schwachem Regen folgen. 23 auf einander folgende Beobachtungen haben dieses bestätiget. Der kühle Wind beginnt stets 24 — 30 Stunden nach dem Erscheinen eines Nordlichtes. *J. Farquharson* in Aberdeenshire, der mehrere Jahre die Nordlichter beobachtete, behauptet auch, dafs sie den West- oder Südwestwinden vorhergehen. Diese Ansicht bekommt ein besonderes Gewicht, wenn man die Beobachtungen *Beaufoy's* näher untersucht. Es ist daher die Meinung competenter Richter, dafs das Nordlicht die Wirkung einer Ursache ist, die zugleich die Magnetnadel afficirt, und dafs diese beiden Phänomene mit einander eintreten können, ohne dafs eines die Ursache des anderen ist.

Wir leben in einer Zeit, wo die Variationen einer Magnetnadel der Gegenstand regelmäfsiger Beobachtungen werden. *Beaufoy*, ein in den Annalen der Wissenschaften Englands verehrter Name, hat zu Haksey, in der Nähe von London, eine regelmäfsige Reihe von Beobachtungen, nicht blofs der Magnetnadel, sondern des gesammten Zustandes der Atmosphäre begonnen; er beobachtet mit einem sehr genauen Instrumente täglich drei Mal die Magnetnadel, vom März 1813 angefangen, mit Annahme des Jahres 1816, bis zum Jahr 1821, und die zahlreichen Affectionen der Magnetnadel, die er be-

merkt hat, werden fleifsig mit dem Zustande der Witterung verglichen.

Da alle diese Beobachtungen bekannt sind, so hat man die Mittel an der Hand, den Zusammenhang zwischen den Unregelmäfsigkeiten im Gange der Magnetnadel und den electrischen und magnetischen Erscheinungen in der Atmosphäre zu untersuchen. Man kann diese Unregelmäfsigkeiten zu Hackney und Thurso mit einander vergleichen in zwei Stationen, deren Breitenunterschied 7° beträgt, und wo man eine viel gröfsere Anzahl von Nordlichtern beobachten kann, als zwischen Paris und Leith, wo dieselbe Breitendifferenz Statt findet. Wenn *Arago* diese Beobachtungen, die in den englischen und schottischen Magazinen und Zeitungen enthalten sind, untersuchen wird, so wird er zu dem allgemeinen Resultate gelangen: dafs eine grofse Anzahl von Agitationen der Magnetnadel von Nordlichtern begleitet ist, dafs eine andere Anzahl derselben ganz ohne Einwirkung auf die Magnetnadel bleibt, und endlich dafs eine grofse Anzahl unregelmäfsiger Bewegungen der Magnetnadel, die *Beaufoy* angibt, mit keinem Nordlichte zusammenhängen, aber stets von Winden, die von dem südlichen Horizont her kommen, begleitet sind, oder auf sie folgen.

Im k. Observatorium zu Paris befindet sich eine empfindliche Magnetnadel, deren Variationen mehrere Jahre hindurch sorgfältig beobachtet worden sind; doch sind diese Beobachtungen nicht bekannt gemacht worden, und doch ist *Arago* Herausgeber eines monatlich erscheinenden Journals, und läfst darin alle die regelmäfsig angestellten meteorologischen Beobachtungen abdrucken, nur die viel wichtigeren magnetischen, auf die er seine Ansicht stützt, und nach denen er Nordlichter voraussagt, werden der Welt vorenthalten. Er beobachtet zu

gewissen Zeiten einen unregelmäſsigen Gang der Magnetnadel, und verkündet dann, es dürfte irgend wo im Norden ein Nordlicht Statt gefunden haben; zu einer andern Zeit lieset er in den englischen Journalen die Nachricht von einem Nordlicht, und findet dann, beim Rückblick auf seine magnetischen Beobachtungen, daſs die Magnetnädel von ihrer gewöhnlichen Richtung abgelenket sey.« — —

Nun wird *Arago's* Weise zu raisoniren näher untersucht, und zwar für den Fall, wo er von einem in Schottland Statt gefundenen Nordlicht Nachricht erhielt, und wo er aus seinen Beobachtungen schlieſst, es müsse irgendwo eines gesehen worden seyn; wo vorzüglich der Punct hervorgehoben wird, daſs die Beunruhigung der Magnetnadel und das Nordlicht nicht *gleichzeitig* Statt fanden. Am 11. Sept. ward zu Leith um 10 U. Abends ein Nordlicht gesehen, aber an diesem Tage wurde keine Affection der Magnetnadel zu Paris wahrgenommen.

Hierauf wurden Fälle angeführt, wo die Magnetnadel und Nordlichter zugleich an demselben Horizont von Männern beobachtet wurden, die von keiner hypothetischen Ansicht befangen waren, die besten Instrumente besaſsen, die sich in dem eigentlichen Vaterlande der Nordlichter befanden, und die eigens ihre Aufmerksamkeit auf den hier besprochenen Gegenstand richteten.

Während der verschiedenen Reisen des Capitän *Parry* in die Polargegenden wurde die Magnetnadel und das Nordlicht sorgfältig beobachtet; aber es ist sonderbar, daſs dabei weder die Magnetnadel noch das Electrometer merklich afficirt wurde, wiewohl man sie auf das Genaueste beachtete, um diese Einwirkung auſser Zweifel zu setzen. Auf *Parry's* dritter Reise sah man ein sehr glänzendes Nordlicht, dessen Strahlen zwischen den Beobachter und dem Festlande hinschossen, das

nur 3000 Yard entfernt war, und doch bemerkte man keine störende Wirkung desselben. Unsere Variationsnadel, sagt *Parry*, die sehr leicht auf die empfindlichste Weise aufgehängt war, und sehr leicht abgelenkt werden konnte, wurde nicht einen Augenblick merklich von einem Nordlicht afficirt; man konnte diese Einwirkung nicht leicht übersehen, indem die Magnetnadel einige Monate hindurch alle Stunden beobachtet wurde, ja, wenn man es für nöthig erachtete, sogar in noch kürzeren Zwischenzeiten.

Die Beobachtungen, worauf *Parry* seinen Ausspruch gründet, sind die zahlreichsten, und man kann wohl sagen die genauesten, so je bekannt gemacht wurden *). Folgende Tabelle erleichtert die Übersicht:

1825.	Anzahl der sichtbaren Nordlichter.	Mittelwerth der tägl. Variation.
Jänner	14	1°, 37′ ½.
Februar	14	1°, 38′.
März	2	2°, 14′ ½.
April	0	2°, 52′, 44″.
Mai	0	3°, 44′, 39″.

Es scheint hieraus, als wäre die Variation durch Nordlichter mehr gehemmt als vergröſsert worden. — —

Es ist wahr, daſs *Kupffer* in Kasan, ein sehr geschickter Beobachter, die Störung im Stande einer Magnetnadel zur Zeit eines Nordlichtes beobachtet hat, welches in einer Breite Statt fand, die gröſser war, als seine eigene, und diese Thatsache hat man triumphirend

*) Diese Beobachtungen sind in Bd. III. S. 82 dieser Zeitschrift mitgetheilt.

als Bestätigung von *Arago's* Ansicht angesehen *). Man kann die Wahrheit dieser Beobachtungen wohl zugeben, aber wenn tausend Beobachter in tausend verschiedenen Meridianen eine ähnliche Übereinstimmung bemerken, so beweiset dieses doch nur, daſs einige Nordlichter mit Agitationen der Magnetnadel zusammentreffen, ein Satz, der von dem *Arago's* ganz verschieden ist. Man kann demnach die verschiedenen über den hier besprochenen Punct vorhandenen Thatsachen unter zwei verschiedene Gesichtspuncte bringen:

1. Wenn es bewiesen ist, daſs es Nordlichter gibt, die keinen Einfluſs auf die Magnetnadel ausüben, daſs Störungen im Gange der Magnetnadel bemerkt werden, ohne ein Nordlicht zu sehen, und daſs diese beiden Phänomene manchmal zugleich eintreten: so muſs man sie als zufällig coexistirende Wirkungen einer allgemeineren Ursache ansehen. Wäre diese Coexistenz auch beständig, so wäre noch nicht bewiesen, daſs eines dieser Phänomene die Ursache des anderen ist, und es wäre wieder so wahrscheinlich wie vorhin, daſs beide einen allgemeineren Grund haben. Worin dieser Grund liegt, wissen wir nicht, aber ausgezeichnete Gelehrte haben die Meinung aufgestellt, daſs dieses leuchtende Meteor und die Entwicklung der magnetischen Thätigkeit ihren Ursprung in dem gestörten electrischen Gleichgewichte der Atmosphäre haben.

2. Die Beobachtungen *Parry's* und *Foster's* scheinen diesen Gegenstand noch schwieriger gemacht zu haben. Denn der Unterschied der täglichen Variation in den Monaten, wo Nordlichter sichtbar waren, und wo man keine

---

*) *Kupffer's* Beobachtungen findet man in Bd. III. S. 325 dieser Zeitschrift.

dergleichen bemerkte, ist zu grofs, als dafs man ihn für zufällig halten könnte. Sollen künftige Beobachtungen dieses noch mehr bestätigen, so würde daraus folgen, dafs in den Polargegenden und zur Zeit, wo viele Nordlichter erscheinen, die Excursionen der Magnetnadel kleiner werden, während sie in unseren Breitegraden dadurch vergröfsert werden. —

C. Electricität.

1. Über die Natur der electrischen Ströme. Von *L. Nobili.*

(*Bibl. univ. Février* 1828, *pag.* 118.)

Nobili sucht zu beweisen, dafs es keinen electrischen Strom ohne Temperaturdifferenz gibt. Er classificirt zum Behufe des Beweises dieses Satzes die bekannten electrischen Ströme, und theilt sie in Ströme ohne chemische Wirkung, und in Ströme mit chemischer Wirkung ein. Die ersteren sind die eigentlich thermoelectrischen, welche wieder in einem einzigen Metalle, in mehreren Metallen, in feuchten Leitern, und in beiden zugleich Statt finden können. Die zwei ersteren sind die zuerst von *Seebek* und *Yelin* beobachteten thermo-electrischen Ströme. Über die Ströme in feuchten Leitern sagt *Nobili*: Wenn man die Endestellen zweier Thoncylinder mit einander in Berührung bringt, nachdem man einen derselben erwärmt hat, so zeigt sich ein electrischer Strom, der vom erwärmten Ende zum kälteren geht, sobald man mittelst eines Multiplicators die Kette schliefst. Dieser Strom entsteht rein in den verschieden erwärmten Stellen des Thones, und der Draht des Multiplicators nebst dem anderen Zugehör thut blofs die Dienste eines Leiters; ein präparirter Frosch zeigt

diesen Strom auch ohne Multiplicator. Die Richtung desselben wird nicht geändert, wenn man das Thonstück in salzige oder saure Lösungen einweicht. Um einen electrischen Strom der letzten Art zu erzeugen, befestige man an jedes Ende des Multiplicatordrahtes eine Platinplatte, und stelle sie in einer gewissen Entfernung von einander in ein leeres Gefäfs, giefse dann an der Seite der einen Platte kochendes, an der Seite der anderen kaltes Wasser in das Gefäfs, und beobachte dabei die Magnetnadel des Multiplicators. Man bemerket das Daseyn eines Stromes, der von der Seite des warmen Wassers zum kalten übergeht. Denselben Erfolg erhält man, wenn man eine Tasse mit kaltem Wasser anfüllt, und die zwei Platinplättchen darein taucht, deren eines vorher in siedendes Wasser gesenkt war. In beiden Fällen ist der Strom nicht anhaltend, und läfst an den Platinplatten keine Spur zurück, sie sind wie vorhin ganz homogen, und es scheint gar keine chemische Wirkung einzutreten.

Die electrischen Ströme mit chemischer Wirkung sind hydro-electrische der ersten, und hydro-electrische der zweiten Classe, je nachdem bei ihnen metallische Leiter ins Spiel kommen oder nicht. Bei den ersteren, ohne chemische Wirkung, lag die Temperaturdifferenz offen am Tage, bei den letzteren mufs sie erst nachgewiesen werden. *Nobili* nimmt als bewiesen an, dafs in jedem hydro-electrischen Apparate nur dann ein electrischer Strom eintritt, wenn die Flüssigkeit wenigstens auf einen der zwei metallischen Leiter chemisch wirkt, und dafs die Intensität der electrischen Wirkung in dem Mafse zunimmt, in welchem ein Metall mehr angegriffen wird als das andere; ferner dafs der electrische Strom in den meisten Fällen von dem mehr ange-

griffenen Metalle zum minder angegriffenen geht, wie übrigens auch ihre Natur beschaffen seyn mag. Man kann nun annehmen, dafs die Electricität immer durch die chemische Wirkung entwickelt wird, oder dafs diese Wirkung zur Erzeugung einer Temperaturdifferenz dient, die dann, wie in den vorhergehenden Fällen, erst den electrischen Strom erregt. Man weifs wohl, dafs der electrische Strom von dem mehr angegriffenen Metalle ausgeht, und dieses ist wahrscheinlich auch das wärmere, so dafs auch von dieser Seite sich der Ursprung der hydroelectrischen Ströme an die thermo-electrischen anschliefst; aber es entsteht noch immer die Frage: ob die Temperaturerhöhung in dem am meisten angegriffenen Metalle so bedeutend sey, dafs man in ihr die Quelle der Electricitätserregung zu suchen berechtiget ist? Diese Frage suchte *Nobili* zu beantworten. Er nahm eine Zink- und eine Kupferplatte, die eigens so eingerichtet waren, dafs jede in einer dazu bestimmten Höhlung mitten in ihrer Masse ein Thermometer aufnehmen konnte, setzte beide mit den Drähten eines Multiplicators in Verbindung, füllte die Höhlungen für die Thermometerkugeln mit Quecksilber vollends aus, und befestigte hierauf beide Platten in verticaler Stellung auf dem Boden eines Gefäfses, in das er mit Säure versetztes Wasser gofs. Die Temperatur dieses Wassers wurde von einem dritten Thermometer angegeben. Unter diesen Umständen erhielt er folgende Temperaturangaben:

Zeit der Beobachtung	Thermometerstand			Grade des Multiplicators.
	a im Zink.	b im Kupfer.	c im Wasser.	
nach 0 M.	11°	11°	11°	69°
» 2 »	15° 1/3	11° 1/2	13°	63°
» 4 »	18° 1/2	13°	17°	61° 1/2
» 6 »	20° 3/4	15°	19°	61°
» 8 »	22° 1/2	16° 1/2	21°	61°
» 10 »	23° 1/2	18°	22°	61°
» 12 »	24° 1/2	19°	23° 1/2	61°
» 14 »	24° 4/5	20°	24° 1/5	61°
» 16 »	25°	20°	25°	61°
» 18 »	25°	20°	25°	61°
» 20 »	24° 1/2	20°	25°	60°
» 22 »	24°	20°	24° 1/2	60°

Demnach ist die Temperatur des Zinkes immer höher als die des Kupfers, die Temperatur der Flüssigkeit ist anfangs geringer als die des Zinkes, doch werden beide gegen das Ende einander gleich.

Der bleibende Temperaturunterschied (von 5°) zwischen Kupfer und Zink ist wohl nicht im Stande, eine electro-dynamische Wirkung von großer Stärke zu erzeugen, doch ist diese Differenz nicht die wahre, weil beständig vom Zink, als der eigentlichen Wärmequelle, die Wärme in die Flüssigkeit, in die Luft etc. abfließt; ihre Menge muß außerordentlich seyn.

Die hydro-electrischen Ströme entstehen bei der Berührung feuchter Leiter. Die auffallendsten dieser Art bringen alkalinische und saure Substanzen hervor, bei denen auch eine starke chemische Wirkung eintritt; doch gibt es auch Fälle, wo ein starker Strom der Art ohne chemische Wirkung Statt hat, wie bei der Berüh-

rung der Schwefelsäure und des Salpeters. Wo eine doppelte Zersetzung vor sich geht, tritt entweder gar kein Strom ein, oder ein sehr geringer. Im Ganzen ist also hier die Electricitätserregung nicht der chemischen Wirkung proportionirt. Um die Natur dieser Ströme noch genauer kennen zu lernen, muſs man auch auf die Richtung derselben Rücksicht nehmen. Bei der Berührung eines Alkali und einer Säure gibt *Nobili's* Multiplicator oft eine Ablenkung von 50°, wenn das Alkali fest ist, hingegen eine von 5° — 10°, wenn dieses flüssig ist, und oft ist im letzteren Falle die Richtung der Ablenkung der im ersten Falle eintretenden entgegengesetzt. Die Electricität, die ein Kalkstück mit Salpetersäure erzeugt, geht vom Kalk zur Säure, bei Kalkwasser statt des Kalkstücks hingegen von der Säure zum Kalkwasser.

Alle diese Verwirrung hat ein Ende, wenn man auf die Temperaturdifferenz Rücksicht nimmt, und voraussetzt; der electrische Strom gehe immer vom wärmeren Körper zum kälteren. Daraus wird es begreiflich, warum man mit festem Kalk und einer Säure einen stärkeren Strom bekommt, als mit Kalkwasser; denn im ersteren Falle ist die chemische Wirkung so lebhaft wie im zweiten, aber fester Kalk erwärmt sich mehr als eine Kalklösung, darum ist bei zwei flüssigen Körpern stets die electrische Wirkung ungeachtet ihres starken chemischen Aneinandergreifens so schwach, weil sich die Temperaturdifferenz nicht erhält. Da feste Körper stets die Wärme besser behalten, als flüssige, so sind sie wärmer, und man könnte auch sagen, der electrische Strom geht immer vom festen Körper in den flüssigen. Bei flüssigen Körpern kann man *a priori* nicht bestimmen, welcher der wärmere seyn wird, und muſs daher auch darauf verzichten, die Richtung des electrischen Stromes in ihnen vorherzusagen.

Demnach, behauptet *Nobili*, gibt es keine Electricitätserregung ohne Wärme, und alle Electricität leitet sich von der Wärme ab. Die Berührungselectricität in einem *Volta*'schen Elemente entsteht durch Druck. Die Electricität äufsert sich auf eine zweifache Weise: es ist entweder ihr Gleichgewicht nur an der Oberfläche gestört, und dann treten die Phänomene der Spannung hervor, oder sie ist im ganzen Körper in Bewegung. *Nobili* glaubt auch in seinen Behauptungen einen neuen Grund für die Meinung Derjenigen zu finden, dafs die Electricität nur eine modificirte Wärme sey.

2. Methode, thermo-hydroelectrische Ströme zu erhalten. Von *L. Nobili.*

(*Bibl. univ. Mars* 1828, *p.* 174.)

Man tauche die Platinenden eines Galvanometers in zwei Tassen *A* und *B*, die eine Salzauflösung von Kochsalz oder Salpeter enthalten, füge diesen zur gröfseren Sicherheit zwei andere Tassen *A'* und *B'* mit gleichem Inhalte bei, die erstere an der Seite von *A*, die andere an der Seite von *B*. Diese Tasse *A'* communicire mit *A*, *B'* mit *B* mittelst Amianth oder in die Salzlösung getauchter Baumwolle. Hierauf nehme man Töpferthon, bilde daraus verschiedene kleine Cylinder von 2 — 3 Z. Länge und 3 — 4 L. im Durchmesser, und wähle zwei derselben zum Versuche aus. Von jedem umwickelt man ein Ende mit Baumwolle, die man mit obiger Salzlösung getränkt hat, und ziehe das andere Ende des einen in eine Spitze aus. Diese Spitze wird in einer Flamme bis zum beginnenden Rothglühen erhitzt. Berührt man nun mit ihr das freie kalt gebliebene Ende des anderen Cylinders, und taucht zugleich die Baumwolle, welche mit den anderen zwei Extremitäten in Verbindung steht, in die Tassen *A* und *B*, so zeigt die Nadel des Multiplica-

tors eine Ablenkung von 5° — 10°. Der Strom geht vom warmen Ende zum kalten. Wenn man die heifse Spitze in den weichen Thon des anderen Cylinders eindrückt, und so die Berührungsoberfläche vermehrt, ist die Ablenkung am stärksten. Hebt man die Berührung der zwei Cylinder auf, und stellt sie nach einiger Zeit wieder her, so bemerkt man einen Strom, der in dem Verhältnisse schwächer ist, als die Temperatur gesunken. Man bemerkt dieses Phänomen selbst am getrockneten Thon, den man wieder befeuchtet hat, und überhaupt an allen Thonarten. Mit Kalk, Baryt etc. zeigte sich kein Effect, *Nobili* schreibt dieses ihrer schlechten Leitungsfähigkeit zu. Der Thon bekommt diese durch das eingesaugte und hartnäckig zurückgehaltene Wasser, und ist daher zur Erzeugung solcher Phänomene am meisten geeignet.

3. Electrische Eigenschaften des Turmalin. Von *Becquerel*.

(Ann. de Chim. etc. Tome 37, p. 5.)

Bekanntlich sehen Mehrere die Anziehung der kleinsten Theile der Körper gegen einander als das Resultat einer electrischen Polarität dieser Theile an, und denken sich die Atome mit denselben Eigenschaften begabt, die einem gehörig erwärmten Turmalin zukommen. *Becquerel* hat zum Behufe einer näheren Prüfung dieser Ansicht die electrischen Eigenschaften des Turmalin untersucht, und dabei mehrere interessante Thatsachen gefunden. Das Mémoire, welches er hierüber der Academie der Wissenschaften am 14. Jänner 1828 mittheilte, enthält nach einer nicht ganz vollständigen historischen Darstellung des bereits schon in diesem Fache Geleisteten, die Resultate der neuen Untersuchung, wie folgt:

Diese Untersuchungen bezogen sich 1) auf die Eigenschaften eines an allen Theilen gleich stark erwärm-

ten oder erkalteten Turmalins, 2) auf die eines solchen, wovon ein Theil mehr als der andere erwärmt wurde.

Es wurde ein Turmalin in einer papierenen Scheide an einem einfachen Seidenfaden aufgehängt, der in ein gläsernes Gefäfs reichte, welches in einem eisernen, mit Quecksilber gefüllten Behältnisse stand, dessen Temperatur mittelst einer Weingeistlampe erhöht wurde. In dem Maſse, als sich der innere Raum jenes Gefäſses erwärmte, stieg auch die Temperatur des Turmalins; und da ihm die Weise, wie er aufgehängt war, eine groſse Beweglichkeit gestattete, so lieſsen sich daran die geringsten Spuren von Electricität wahrnehmen. Ein nicht weit vom Turmalin angebrachtes Thermometer zeigte seine Temperatur an. Mittelst dieses Apparates erhielt *Becquerel* folgende Resultate: Bei 30° C. bemerkt man die ersten Spuren einer electrischen Polarität beim Annähern eines schwach electrisirten Körpers, und diese Polarität bleibt dem Turmalin bis 150° und darüber, vorausgesetzt, daſs die Temperatur fortwährend steigt; ist sie aber nur einen Augenblick stationär, so verschwindet die Polarität alsogleich, so daſs man fernerhin keine Spur von Electricität wahrnimmt, so lange sich die Temperatur nicht ändert; sobald sie aber abnimmt, erscheint die Polarität mit entgegengesetzten Zeichen, der vorhin negative Pol wird positiv, und umgekehrt. Diese Wirkungen treten ein, bei welcher Temperatur man immer dem ferneren Steigen derselben Einhalt thun mag. Die Zeit des Überganges von einer Polarität in die entgegengesetzte ist sehr kurz.

Man könnte demnach glauben, die Intensität der Electricität jedes Poles stehe mit der Erwärmungs- oder Erkältungsgeschwindigkeit im Verhältnisse, aber es ist nicht so. Um dieses zu sehen, müſste man die electrische Spannung in bestimmten Zeitabschnitten messen.

Man gelangt dahin, wenn man in dem Gefäfse, worin sich der Turmalin befindet, nahe an jedem seiner Pole einen verticalen Eisenstab anbringt, woven jeder mit einem Pole einer trockenen electrischen Säule communicirt, deren electrische Spannung man während einer Stunde als constant ansehen kann, besonders wenn man darauf bedacht ist, sie dem Einflusse der Wärme zu entziehen. Sobald der Turmalin electrisch geworden ist, stellt er sich zwischen die zwei Stäbe so, dafs die entgegengesetzten Pole einander zugekehrt sind, und wenn man ihn aus dieser Lage bringt, gelangt er durch eine Reihe von Oscillationen wieder dahin, und die Anzahl derselben in einer gegebenen Zeit kann als Mafsstab der electrischen Spannung desselben angesehen werden. Die folgende Tabelle enthält mehrere Resultate:

Temperatur des Turmalin.	Anzahl der Oscillationen während einer bestimmten Zeit *).
100°	6
90°	10
80°	13
70°	15
60°	15
50°	15
40°	14
30°	13
20°	7

*) *Becquerel* bezeichnet diese Zeit mit 30, ohne nähere Bezeichnung dieser Gröfse. Wahrscheinlich sind es 30 Secunden.

Die Temperatur wurde auf 115° gesteigert. Bei 105° fing der Turmalin an, wiewohl er schon früher electrisch war, sich den zwei Eisenstäben gegenüber zu stellen, die mit den Polen der trockenen Säule communicirten, bei 100° wurden die Oscillationen erst meſsbar. Die vorhergehenden Resultate zeigen, daſs von 115°—100°, wo die Erkältung am stärksten ist, die electrische Spannung sehr langsam wächst, aber von 100°—70° erfolgt diese Zunahme schnell; von 70°—40° ist die Spannung stationär, von 40°—20° nimmt sie nahe in demselben Verhältnisse ab, in welchem sie von 100°—70° zugenommen hatte. Bei 15° verschwindet die Polarität gänzlich, wiewohl sie bei 30° begonnen hatte. Dieselben Resultate bemerkte man an mehreren Turmalinen. Daraus geht nun hervor, daſs die electrische Spannung der Erkältungsgeschwindigkeit nicht proportionirt ist.

Es ist nicht so leicht, die Stärke der Electricität eines Turmalins während der Erhöhung der Temperatur zu messen, wie während der Abnahme derselben; denn wiewohl die electrische Polarität an und für sich sehr stark ist, so reicht sie doch nicht hin, um die Unterschiede derselben, die bei der Zunahme der Temperatur eintreten, zu bestimmen, wenn man sich der Methode der Oscillationen bedient; darum muſs man sie unmittelbar bestimmen. Dabei sieht man, daſs es zwischen der Art der Electricitätsentwickelung während der Zunahme der Temperatur, und der, welche bei der Abnahme derselben eintritt, einen groſsen Unterschied gibt, und doch ändert sich in beiden Fällen die Temperatur von jedem Augenblick zum nächstfolgenden.

Die genauesten Versuche scheinen zu zeigen, daſs der Turmalin, während er electrisch wird, weder Electricität abgibt, noch von der Umgebung aufnimmt, so

dafs die Electricität blofs durch Zersetzung des electrischen Fluidums jedes einzelnen Elementes hervorgebracht wird. Um zu beweisen, dafs von Seite des Turmalins keine Electricität abgegeben wird, setzt man auf den Deckel eines guten *Volta*'schen Condensators eine Kupferplatte von erhöhter Temperatur, und läfst sie von einem Ende des Minerals berühren. Hebt man nach einiger Zeit den Deckel auf, so findet man kein Zeichen der Electricität.

Nun kommt die Reihe an die Versuche, welche angestellt wurden, während ein Theil des Turmalins mehr erwärmt war als der andere. Um die da eintretenden electrischen Wirkungen zergliedern zu können, mufs man sich vorläufig versichert haben, ob die Temperatur im Ab- oder Zunehmen sey, weil die Resultate in jedem dieser zwei Fälle anders ausfallen. Dahin gelangt man, indem man jedes Ende des Turmalins in eine kleine Glasröhre einschliefst, deren Ränder man zum Glühen bringt, damit sie sich fest an den Turmalin anlegen; dann macht man ihn in der Mitte mittelst eines Platindrahtes an einer Glasröhre an, und erwärmt eine der Extremitäten, z. B. die, welche bei der Erkältung, nachdem die Temperatur allenthalben gleich geworden ist, den positiven Pol hat, und die *P* heifsen mag. Diese wird sich auf Kosten der Röhre erwärmen, mit ihr einerlei Temperatur annehmen, und auch gleichzeitig mit ihr abkühlen. So lange die Temperatur am anderen Ende, das *N* heissen mag, nicht zu steigen anfängt, zeigt sich das ganze *P* negativ-electrisch, der Rest bleibt unelectrisch. Da besitzt nun der Turmalin nur eine Electricität. Davon überzeugt man sich, wenn man successiv allen Puncten des Turmalins die Probescheibe des *Coulomb*'schen Electroscops bis auf eine sehr kleine Entfernung nähert, die abwechselnd mit negativer und positiver Electricität ge-

laden ist. In diesem Falle gleicht ihr Zustand dem einer *Volta*'schen Säule, deren positiver Pol mit der Erde in leitender Verbindung steht, denn die negative Electricität wird da gegen den entgegengesetzten Pol immer schwächer. Diese Wirkung erfolgt nur, wenn die Temperatur im Abnehmen ist, und das entgegengesetzte Ende noch nicht hinreichend erwärmt ist, um auch electrisch zu werden. In der Säule erhält man jedes Mal eine einzige Electricität, wenn man einen der Pole mit der Erde verbindet; im Turmalin ist es aber nicht so, indem er weder Electricität abgibt noch annimmt. Dieses Factum steht mit unseren bis jetzt erlangten Kenntnissen über die Entwicklung der Electricität im Widerspruche, indem sonst immer beide Electricitäten zugleich auftreten. Es mufs demnach hier eine derselben gebunden (*dissimulée*) oder von der Luft aufgenommen worden seyn; darüber gaben aber die genauesten Untersuchungen keinen Aufschlufs.

Bisher würde vorausgesetzt, dafs *N* noch nicht die zur Entwicklung der Electricität nöthige Temperatur angenommen habe; nimmt diese aber zu, so tritt ein Zeitpunct ein, wo diese Seite positive Electricität hat, wie man sie gehabt hätte, wenn die Temperatur am ganzen Turmalin gleichförmig zugenommen hätte. Sobald die Temperatur von *P* stationär ist, hat sein electrischer Zustand ein Ende, geht aber, sobald sie abnimmt, in den entgegengesetzten über. Zu gleicher Zeit befindet sich die Seite *N* nach Verhältnifs ihrer Temperatur entweder im natürlichen Zustande, oder ist electro-positiv oder negativ. *Becquerel* schliefst aus diesen Thatsachen, dafs jede Seite eines Turmalins, den man ungleich erwärmt, für sich einen eigenen, vom anderen unabhängigen electrischen Zustand annimmt, so dafs, wenn z. B. die Temperatur von *P* im Wachsen, dann stationär, und

endlich im Abnehmen ist, es den negativen, den natürlichen und den positiven Zustand annimmt. *N* hat unter denselben Umständen, d. h. wenn seine Temperatur wächst, stationär wird oder abnimmt, den entgegengesetzten Zustand. Demnach ist der electrische Zustand jeder Seite derselbe, als wenn das ganze Mineral die dieser Seite entsprechende Temperatur hätte.

Nach diesen Thatsachen kann man die chemischen Wirkungen nicht daraus erklären, dafs man den Atomen electrische Eigenschaften zuschreibt, wie sie die Wärme im Turmalin entwickelt; denn da die electrische Polarität immer bei der Erhöhung oder Erniedrigung der Temperatur eintritt, so würden sich die chemischen Verbindungen von selbst auflösen, sobald die Temperatur stationär geworden. Nimmt man auch eine permanente Polarität der Atome an, so sieht man doch noch nicht ein, wie die electrischen Modificationen, welche die Erhöhung der Temperatur erzeugt, ähnlich denen am Turmalin, die Erscheinung der chemischen Verwandtschaft hervorbringen können.

Es wird hier keineswegs erklärt, wie die Atome electrisch werden, oder ob sie eine beständige Electricität besitzen; die Absicht dieser Untersuchung ging nur dahin, die electrischen Eigenschaften des Turmalin zu studieren, und zu zeigen, dafs eine electro-chemische Theorie, welche die Atome wie kleine Turmaline betrachtet, keinen festen Stand habe.

4. Über die Wirkung der Mineralsäuren auf Kupfer. Von Dr. *Davy*.

(Phil. mag. Jan. 1828, p. 49.)

Davy hat am 22. November 1827 in der *Royal Society* eine Abhandlung über die Wirkung der Mineralsäuren auf Kupfer vorgelesen, welche unter verschiedenen

Umständen Statt finden. Das genannte Journal gibt den Inhalt dieser Vorlesung folgender Maſsen an: Wird in verdünnte Schwefelsäure eine polirte Kupferstange getaucht, und die atmosphärische Luft abgehalten, so findet sich davon selbst nach drei Monaten nur eine sehr geringe Quantität aufgelöset, und die Stange ist leicht mit schwarzem Kupferoxyd überzogen. Ein ähnliches Resultat erhält man mit verdünnter Salzsäure; aber verdünnte Salpetersäure löset eine gröſsere Menge Metall auf, und man findet die Kupferstange mit einer Rinde von schwarzem Oxyd überzogen. Sind die Gefäſse, worin man diese Versuche anstellt, bloſs mit einer Glasplatte bedeckt, und dadurch zwar die Verdünstung verzögert, aber doch der Zutritt der Luft nicht verwehrt, so findet man nach acht Monaten die Schwefelsäure mit Kupfer gesättiget, und die Kupferstange mit einer dünnen Kruste von schwarzem Kupferoxyd bedeckt. Die Salpetersäure setzt also eine bedeutende Menge Kupferprotoxyd mit ein wenig krystallisirtem salpetrigsaurem Salze und einer sehr geringen Quantität von metallinischem Kupfer auf die Metallstange ab. In Salzsäure findet ein ähnlicher Absatz Statt, aber das salzsaure Salz ist in groſser Menge gebildet und so krystallisirt, wie dieses Mineral in Peru gefunden wird.

Der Verfasser nimmt an, diese complicirten Resultate, welche die Gegenwart der atmosphärischen Luft hervorbringt, lassen sich auf die electro-chemische Wirkung zurückführen, welche durch Reaction der gebildeten Combinationen auf einander entsteht.

D. Wärme.

1. Über das Messen hoher Temperaturen. Von *Prinsep*.

(*Phil. mag. Feb.* 1828, *pag.* 129.)

Am 13. December verflossenen Jahres hat *Prinsep* durch *Roget* der königl. Gesellschaft zu London einen Aufsatz über das Messen hoher Temperaturen mitgetheilt, dessen Inhalt in der oben angezeigten Quelle folgender Maſsen angegeben wird: Nachdem der Verfasser mehrere Verfahrungsarten seiner Vorgänger angeführt hatte, deren Zweck war, hohe Temperaturen zu messen, beschreibt er sein eigenes Verfahren, um zu diesem Ziele zu gelangen. Dabei wird eines sehr interessanten Factums Erwähnung gethan. *Prinsep* hatte eine Art Compensationsstange construirt, die aus zwei Metallstreifen bestand, deren einer aus Silber, der andere aus Gold gemacht war; beide Metalle waren ursprünglich ganz rein und ohne Zwischenmittel mit einander verbunden. Nach wenigen Jahren, während welcher Zeit der Apparat immer einer sehr hohen Temperatur ausgesetzt war, verwandelte sich die Oberfläche des Goldes in eine Silberlegirung, die bis zu einer bedeutenden Tiefe ins Gold hineinreichte, und die Empfindlichkeit des Instrumentes, die Temperaturänderungen anzuzeigen, zerstörte.

Nach mehreren Versuchen gab der Verfasser dem Verfahren den Vorzug, nach welchem man hohe Temperaturen aus dem Schmelzen reiner Metalle abnimmt. Die Schmelzpuncte des Silbers, Goldes und Platins liegen so weit von einander, daſs sie einen sehr bedeutenden Temperaturunterschied umfassen, und wenn man zwischen diesen drei fixen Puncten Zwischenpuncte verlangt, so erhält man sie durch Legirungen dieser drei

Metalle mit einander in verschiedener Proportion. Hat man einmal eine Reihe solcher Legirungen bereitet, so kann man die Hitze eines Ofens durch die Legirung benennen, die unter allen, welche darin schmelzen, am leichtesten in Fluſs geräth. Ein Pyrometer, nach diesem Prinzip eingerichtet, hat, abgesehen von der Präcision seiner Anzeigen, den Vortheil, daſs man es immer und überall übereinstimmend verfertigen kann; die Kleinheit desselben ist ein neuer Vorzug, denn man braucht dazu nichts, als ein kleines Gefäſs, das in abgesonderten Zellen die nöthige Anzahl von pyrometrischen Legirungen, jede von der Gröſse eines Stecknadelkopfes, enthält. Ist eine davon bei einem Versuche geschmolzen, so darf man sie nur unter den Hammer bringen, um es von Neuem brauchen zu können.

Zur genauen Registrirung der Resultate bedient sich der Verfasser der einfachen Decimalbezeichnung, die zugleich die Natur des Metallgemisches und den entsprechenden Temperaturgrad angibt. Der Abstand zwischen dem Schmelzpuncte des Silbers und Goldes ist nicht groſs, darum wird er nur in zehn Grade getheilt, deren jeden man erhält, wenn man dem Silber nach und nach immer 10 Procent Gold zusetzt, so daſs der Schmelzpunct des reinen Silbers mit Null, der des reinen Goldes mit 10 bezeichnet ist. Vom Schmelzpuncte des Goldes bis zu dem des Platins zählt der Verfasser 100 Grade, und bestimmt die Zwischengrade, indem er dem Golde successiv 1 Procent Platin zusetzt.

2. Über die beim Verbrennen erzeugte Hitze. Von *Depretz*.

(Annal. de Chim. et de Phys. Tome 37, p. 180.)

Depretz hat der Academie der Wissenschaften zu Paris am 16. October 1827 ein Mémoire über die Hitze

vorgelesen, welche beim Verbrennen der Kohle, des Hydrogen, Phosphors und mehrerer Metalle erzeugt wird, von welchem in dem genannten Journale folgendes in einem kurzen Auszuge gesagt wird: Der Calorimeter, der zu dieser Untersuchung gebraucht wurde, läſst sich zur Ausmittelung der Wärme brauchen, die beim Verbrennen von was immer für einem Körper sich entwickelt, selbst bei dem des Schieſspulvers. Er ist dem Calorimeter von *Rumford* weit vorzuziehen, welcher die Wärmemenge nicht genau angab, und *Rumford* selbst konnte nie über das Verbrennen der Kohle Versuche machen. Auch ist hier zum ersten Male die Wärmemenge untersucht, welche beim Verbrennen der Metalle frei wird. Nach diesen Versuchen entwickelt mit 1 Gr. Oxygen

Wasserstoff	.	2578°,
Kohle	. . .	2967°,
Eisen	. . .	5325°.

Phosphor, Zink und Zinn entwickeln fast dieselbe Wärmemenge, wie Eisen. Sobald die Versuche so oft wiederholt seyn werden, daſs man an der Genauigkeit der Resultate nicht wird zweifeln dürfen, werden sie der Quantität nach bekannt gemacht werden.

Hydrogen entwickelt für dieselbe Menge Sauerstoff die geringste Wärmemenge, die Metalle die meiste.

Es ist merkwürdig, daſs Kohle, welche das Volumen des Sauerstoffgases nicht ändert, eine Wärmemenge entwickelt, die $^3/_5$ von der beträgt, welche Eisen und die Metalle überhaupt frei machen.

3. Über das Verbrennen unter verschiedenem Drucke. Von *Depretz*.

(Ebendaselbst, p. 182.)

Depretz las der Academie am 23. Oct. 1827 ein anderes Mémoire über den bezeichneten Gegenstand vor, aus dem hervorgeht, daſs die Wärmemenge, die ein Körper entwickelt, der das Volumen des Sauerstoffgases nicht ändert, dieselbe bleibt, die Dichte dieses Gases mag wie immer beschaffen seyn. Dieses Resultat erhielt man zwar nur mit Kohlenstoff, aber es ist sehr wahrscheinlich, daſs der Schwefel und andere Körper, die das Volumen des zündenden Gases nicht ändern, dasselbe Resultat geben. *Depretz* meint auch, daſs die Wärmemenge, die ein Körper beim Verbrennen entwickelt, der alles Oxygen in einen festen Zustand bringt, desto kleiner ist, je gröſser der darauf lastende Druck ist, und daſs die Differenz die bei der Reduction des Volumen des Sauerstoffgases verloren gegangene Wärme vorstellt. Man hat daran ein Mittel, die Wärmemenge zu erkennen. Bei den anderen Versuchen, bei denen Hydrogen, Kohlenstoffoxyd und Kohlensäure eine Rolle spielten, wird man sehen, ob alle Gase dieselbe Wärmemenge fahren lassen oder nicht, wenn ihr Volumen auf gleiche Weise geändert wird.

Eine wichtige Wahrheit, die sich aus den Versuchen mit Kohlenstoff bei verschiedenem Druck ergibt, ist, daſs das Oxygen und die Kohlensäure gleich viel Wärme enthalten bei dem Druck, dem sie bei der Untersuchung ausgesetzt waren. Geben Versuche mit Schwefel bei verschiedenen Pressionen dieselbe Wärmemenge, so kann man daraus schlieſsen, daſs auch die schwefelige Säure und das Sauerstoffgas eine gleich groſse Wärmemenge enthalten; und da diese drei Gase,

das Sauerstoffgas, das Kohlensäuregas und das schwefeligsaure Gas an ihren Eigenschaften sehr stark von einander abweichen, so wird man diesen Schlufs auf alle Gase ausdehnen können.

E. Versuche über die Absorption der Dünste durch tropfbare Flüssigkeiten. Von *Graham.*

(Journ. of Scien. N. XVI. p. 326.*)*

Graham stellte folgende Versuche an: Es wurde in ein tiefes Cylinderglas so viel Wasser gegossen, dafs es den Boden desselben auf $^1/_2$ Z. bedeckte. In diesem Gefäfse ward einen Zoll über der Wasserfläche eine 3 Z. weite Porzellanschale angebracht, die 500 Gran einer gesättigten Kochsalzlösung von der Temperatur 57° F. enthielt. Die Mündung des ersteren Gefäfses wurde mit einer Glasplatte mittelst Fett luftdicht verschlossen. Man hatte dabei die Absicht, die Lösung in einer Atmosphäre zu erhalten, die nahe mit Wasserdünsten gesättiget war. Der Vergleichung wegen wurde ein anderes Gefäfs von derselben Art, wie das vorhergehende, eingerichtet, mit dem einzigen Unterschiede, dafs die Porzellantasse statt der Salzlösung nur 500 Gran reinen Wassers enthielt. Beide Gefäfse wurden an einen ruhigen Platz gestellt, der keiner grofsen Temperaturänderung unterworfen war, und ein Stück trockenes Kochsalz frei, in der Nähe, der Luft ausgesetzt. Nach sechs Tagen wurde alles untersucht, und gefunden, dafs das der Luft ausgesetzte Salz nicht die mindeste Spur eines Zerfliefsens zeigte. Das Wasser in dem zweiten Gefäfse hatte sich um 3 Gr. vermindert, aber die Salzlösung um 63 Gr. zugenommen. Diese Lösung konnte nicht Dünste von geringerer Temperatur, als die des Wassers war, verdichten und absorbiren, weil es unwahrscheinlich ist, dafs während der Dauer des Versuches eine Ungleich-

heit der Temperatur Statt gefunden hat; man müßste vielmehr aus diesem Versuche schließen, daß das angewandte Kochsalz, wiewohl es selbst nicht zerfließt und keine Dünste absorbiren kann, diese Eigenschaft in einem ziemlich hohen Grade im aufgelösten Zustande besitze; indem es in sechs Tagen nahe die Hälfte seines eigenen Gewichtes absorbirt hat; denn die Salzmasse betrug 143 Gr., und die Gewichtzunahme 63 Gr.

Bei zwei folgenden Versuchen wurden dieselben Quantitäten, ein Mal eine gesättigte Salmiak-, das andere Mal eine Bittersalzauflösung in Gefäße gebracht, die zugleich etwas Wasser enthielten. Die Temperatur war beim Schließen der Gefäße 58°, und blieb sich während des Versuches völlig gleich. In vier Tagen hatte das reine Wasser 2.5 Gr. verloren, aber die Salmiaklösung um 34 Gr., die Kochsalzlösung um 37 Gr., und die Bittersalzlösung um 8 Gr. zugenommen. Die Gewichtszunahme der Bittersalzlösung war am geringsten, wiewohl sie das meiste Salz enthielt.

Bei dem weiteren Verfolge dieses Gegenstandes wurde statt der zwei getrennten Gefäße eine zinnerne Büchse angewendet, worin man zugleich mehrere Behältnisse mit Auflösungen anbringen konnte. Diese Behälter ruhten auf einem Drahtsiebe einen Zoll über dem Boden der Büchse, der $^1/_2$ Z. tief mit Wasser bedeckt war. Die Büchse war mit einem Deckel versehen, um sie luftdicht schließen zu können. Dabei zeigte es sich, daß Gefäße von Wedgewood Porzellan 1 — 12 Gr. Wasser von der Auflösung zu absorbiren im Stande waren. Darum vermied man solche anzuwenden, und brauchte dafür Halbkugeln oder Kapseln von Glas, die 3 Z. weit, und sonst einander möglichst gleich waren. Hierauf wurden Auflösungen von 1 Th. Kochsalz, 4 Th. Wasser, und eben so viel wasserfreies kohlensaures Kali in einem

gleichen Quantum Wasser bereitet. Das kohlensaure Kali wurde durch Glühen des überkohlensauren Kalis bei der Rothglühhitze, bis der Überschuſs an Säure und das darin enthaltene Wasser völlig ausgetrieben waren, bereitet. Drei Glaskapsel wurden in einer Zinnbüchse auf der Drahtunterlage so neben einander angebracht, daſs sie einander nicht berührten, das eine enthielt 500 Gr. Wasser, das andere 500 Gr. der Kochsalzlösung, das dritte 500 Gr. von der Auflösung des kohlensauren Kali; sie waren nicht ganz zur Hälfte angefüllt; man machte die Beobachtung bei einer gleichförmigen Temperatur innerhalb der Büchse, und schloſs sie dann luftdicht mittelst Fett. Nach sechs Tagen hatte das Wasser 23 Gr. verloren, die Kochsalzlösung um 39 Gr., und die Kalilösung um 6,5 Gr. zugenommen. Hier war es klar, daſs die Kochsalzauflösung nicht bloſs vom unteren Wasser, sondern auch von dem darneben stehenden, und sehr wahrscheinlich auch von der Kaliauflösung Dünste in sich gezogen habe. Demnach scheint die Auflösung des Kochsalzes eine entschieden stärkere absorbirende Kraft zu besitzen, als eine Auflösung des zerflieſslichen kohlensauren Kali.

In einer Zinnbüchse von 18 Z. Länge, 9 Z. Breite und 4 Z. Tiefe wurden bei unten angebrachtem Wasser zehn Kapsel mit verschiedenen Salzauflösungen zu gleicher Zeit angebracht. Um dem Einfluſs der Flüssigkeiten auf einander vorzubeugen, wurden sie durch Schirme von Pappe von einander getrennt, so daſs jede Kapsel in einer eigenen Zelle zu seyn schien, und doch alle mit dem unteren Wasser communiciren konnten. Die Resultate der Versuche enthält folgende Tafel, in welcher die erste Rubrik die Zusammensetzung der Auflösung, wovon 700 Gr. angewendet wurden, enthält, ausser wo sie für die Temperatur der Luft, die zwischen

55° und 42° schwankte, gesättiget war; die zweite Rubrik gibt die Gewichtszunahme in sechs Tagen; die dritte die neue Gewichtszunahme, als der Versuch noch vierzehn Tage lang fortgesetzt wurde; die vierte endlich enthält den Siedpunct der Auflösung.

I.	II.	III.	IV.
1. Kochsalz	35 Gr.	66 Gr.	224° F.
2. Bittersalz	7 »	16 »	214.5
3. Glaubersalz	0 »	2 »	213
4. Kohlensaure Soda . .	2 »	7 »	214
5. Salpeter	2 »	8 »	214
6. Salmiak	29 »	39 »	221
7. 1 Th. kohlens. Pottasche, 2 Th. Wasser	22 »	45 »	221
8. 1 Th. salzsaurer Kalk, 2 Th. Wasser . . .	53 »	105 »	230.5
9. 1 Th. salzsaurer Kalk, 5 Th. Wasser . . .	17 »	33 »	216.5
10. Wasser	—5 »	—3 »	212

Hieraus sieht man, dafs nicht blofs die Auflösungen der zerfliefsenden Salze, sondern selbst die derjenigen, welche in der Luft unzerfliefslich, ja selbst zu efflorescieren im Stande sind, Dünste aus der beinahe damit gesättigten Luft absorbiren.

Einige der Resultate dieser Versuche sind besonders merkwürdig. Es ergibt sich daraus, dafs eine gesättigte Kochsalzauflösung, die weniger als ein Drittel ihres eigenen Gewichtes Kochsalz enthält, das nicht zerfliefslich ist, viel mehr Dünste absorbirt, als eine Auflösung des zerfliefslichen kohlensauren Kali, die nur das Doppelte des Salzes an Wasser enthält. Ferner geht hervor, dafs alle Salzauflösungen Dünste einsaugen und von sich geben, je nachdem es der Zustand der Atmosphäre fordert, in der sie sich befinden. Die absorbi-

24 *

rende Kraft ist desto gröfser, je höher der Siedpunct der Auflösung steht. Eine Kochsalzlösung absorbirt am meisten Dünste, und ihr Siedpunct liegt am höchsten.

Die folgende Tafel gibt die Gewichte an, die Salzauflösungen, z. B. Kochsalz, gewinnen, wenn sie von verschiedenen Concentrationsgraden sind, und fünf Tage lang eingeschlossen bleiben. Von jeder wurden 500 Gr. genommen.

Flüssigkeit.	Zunahme in 5 Tagen.	Siedpunct.
1. Gesättigte Kochsalzlösung	33 Gr.	224° F.
2. 2 Th. Kochsalz, 1 Th. Wasser	23 »	220
3. 2 » » 2 » »	17 »	217,5
4. 2 » » 4 » »	10 »	216
5. Seewasser	3 »	213

Ein Gefäfs mit reinem Wasser verlor in derselben Zeit 4 Gr. Der Versuch mit Seewasser wurde einige Male wiederholt, und stets gefunden, dafs es ein starkes Absorptionsvermögen für Dünste besitze.

Hierauf wurden einige Salzauflösungen und saure Flüssigkeiten bereitet, deren jede bei 224° F. kochte, und 700 Gr. von jeder, durch fünf Tage in einem Gefäfse eingeschlossen, erhalten. Die folgende Tabelle benennt die Flüssigkeit, und gibt die Gewichtszunahme an, welche sie während dieser Zeit erlangte. Als diese Zunahme bekannt war, wurde jede Flüssigkeit aus dem gemeinschaftlichen Behälter genommen, und der freien Luft ausgesetzt, um zu erfahren, wie viel sie in 24 Stunden durch Verdünstung verliert. Die so gefundenen Werthe enthält die dritte Spalte der folgenden Tafel:

Flüssigkeit.	Zunahme in 5 Tagen.	Verlust in 24 Stund.
1. Kochsalzlösung	+ 32 Gr.	8.5
2. Salzs. Kalklösung	34 »	8.0
3. Kohlens. Kali	39 »	8.6
4. Weinsteinsäure	31 »	8.4
5. Schwefelsäure (sp. G. 1,221)	34 »	8.1
6. Salzsäure (sp. G. 1.125)	113 »	— 2.1
7. » (sp. G. 1.080)	61 »	2.3
8. Salpetersäure (sp. G. 1.206)	59 »	2.9

Reines Wasser verlor in derselben Zeit 13.9 Gr. Die Lufttemperatur stand nicht über 45°. Die Salzauflösungen, die Weinstein- und Schwefelsäure verlieren als gewinnen, nahe gleich viel, wenigstens ist die Differenz so gering, dafs sie leicht von einem geringen Unterschiede in der Form der Gefäfse und von anderen Nebenumständen abhängen kann; aber die absorbirende Kraft der Salzsäure in den zwei Concentrationsgraden und der Salpetersäure ist sehr verschieden, wiewohl sie auch bei derselben Temperatur sieden. Die stärkere Salzsäure hat in der freien Luft gar eine Gewichtszunahme erlitten, statt etwas durch Ausdünstung zu verlieren; auch die schwächere Salzsäure und die Salpetersäure haben durch Verdünstung in einem geringern Verhältnisse verloren, als sie durch Einsaugen gewonnen haben. Es scheint daher das Einsaugungsvermögen dem Evaporationsvermögen verkehrt proportionirt zu seyn. Dieses zeigte sich recht deutlich, als verschiedene Salzauflösungen von verschiedenem Einsaugungsvermögen der Luft ausgesetzt wurden, wo immer diejenige am meisten durch Verdünsten verlor, welche am wenigsten

einsaugte, und umgekehrt. Salzsäure saugt, wie man aus der Tabelle ersieht, aus der Luft, so wie Schwefel- und Salpetersäure, Wasser ein. *Graham* hat oft bemerkt, daſs Salzsäure vom spec. Gewichte 1.190 bis 1.100 durch Einsaugen des atmosphärischen Wassers stark am Gewichte zunimmt, wenn die Temperatur nicht über 55° steht. Ist diese Säure so stark, daſs sie salzsaure Dämpfe ausstoſst, so saugt sie so lange Wasserdünste ein, bis ihr spec. Gewicht 1.0960 beträgt. Wird aber unter diesem Grad verdünnte Salzsäure einer trockenen Luft ausgesetzt, so verliert sie nichts von ihrem Gase, wird aber durch Emission von Wasserdünsten stärker, bis ihr spec. Gewicht 1.0960 erreicht hat. Bei diesem Grade der Stärke liegt der Siedpunct der Flüssigkeit am höchsten, wie *Dalton* beobachtet hatte, und sie besteht dann aus einem Atom Säure, und aus 16 Atomen Wasser, wie *Thomson* bemerkt. Um das Absorptionsvermögen der Salzsäure in einer nicht gar trockenen Atmosphäre auszumitteln, wurde ein eigener Versuch im Monate Jänner unternommen. Drei kleine Porzellangefäſse, deren jedes 200 Gr. Salzsäure faſste, wurden mit Papier bedeckt in ein Zimmer gebracht, welches nicht beheitzt war. Die Flüssigkeit im ersten Gefäſse hatte ein spec. Gewicht von 1.185, die zweite bestand aus gleichen Theilen Wasser und Säure, das dritte Gefäſs enthielt reines Wasser. Man wuſste mit Gewiſsheit, daſs die Salzsäure keine Schwefelsäure enthalte. So oft 24 Stunden verflossen waren, wurde jedes Gefäſs gewogen, und folgende Gewichte gefunden:

Gewicht in		
Nro. I.	Nro. II.	Nro. III.
200.	200.	200.
209.	204.	194.
219.	216.	187.
227.	224.	160.
235.	220.	133.
242.	223.	105.
247.	221.	93.
245.	210.	70.
244.	200.	50.

Das Vermögen der tropfbaren Flüssigkeiten von ungleicher Zusammensetzung, ihre Dünste gegenseitig zu absorbiren, ist demnach sehr verbreitet. Man kann stets mit Sicherheit annehmen, daſs von zwei Flüssigkeiten, die sich in allen Verhältnissen mit einander vermischen lassen, die am wenigsten flüchtige die Dünste der flüchtigeren zu absorbiren im Stande ist.

Alkohol und Wasser sind zwei Flüssigkeiten, die sich in jedem Verhältnisse mit einander mischen, und wovon Wasser die weniger flüssige ist; und wirklich absorbirt Wasser den Alkoholdunst bei der Temperatur der Atmosphäre mit groſser Begierde.

Folgender Versuch sollte zeigen, in welchem Verhältnisse die absorbirende Kraft des Wassers auf Alkohol zu der der Schwefelsäure auf Alkohol und Wasser steht. Es wurde ein Gefäſs aus Wedgewood, das 1 1/2 Z. im Durchmesser hatte, und 200 Gr. Wasser enthielt, über Schwefelsäure in einem cylindrischen Gefäſse eingeschlossen. Nach 12 Stunden wurde es geöffnet, und man fand, daſs das Wasser 11 Gran verloren habe.

Hierauf wurde die Säure umgerührt, und statt des Wassers 200 Gr. Alkohol ins Gefäſs gegeben, und die-

ses wieder wie vorhin verschlossen. Nach 12 Stunden fand man den Verlust an Alkohol gleich 50 Gr., und die Schwefelsäure erhielt einen Stich ins Rothe. Hierauf wurde die Schwefelsäure weggenommen, und statt derselben reines Wasser angewendet, die Alkoholmenge wieder auf 200 Gr. gebracht, und alles gut verschlossen. Nach zwölf Stunden betrug der Verlust an Alkohol 45 Gr., und das Wasser schmeckte stark nach Alkohol. Dunst von Schwefeläther wurde vom Alkohol sehr begierig aufgenommen, aber viel weniger vom Wasser. Alkoholdünste werden auch vom Castoröhl absorbirt, besonders wenn man vorläufig etwas Alkohol damit vermischt hat, doch geschieht dieses nur in einem geringen Grade. 200 Gr. dieses Öhles, die zehn Tage lang über Alkohol aufbewahrt wurden, gewannen an Gewicht 73 Gr. Quecksilberbichlorid zerfliefst mit Alkoholdunst, doch nur langsam mit festen Krystallen. 20 Gr. eines solchen nicht gepulverten Krystalls, die in einer Capsel über Alkohol sechs Tage lang aufgehängt blieben, nahmen um 9 Gr. zu, und ein Theil ward vom eingesaugten Alkohol aufgelöset. Auch in Alkohol gelöset, zeigt dieses Salz die absorbirende Kraft in einer Alkoholatmosphäre.

Es wäre interessant zu erfahren, ob Alkohol eben so Wasserdunst auflöset, wie das Wasser Alkoholdunst aufnimmt; aber es ist schwer diesen Punct ins Reine zu bringen, da die absorbirte Wassermenge sehr gering seyn mag. Doch kann man aus einem indirecten Versuche schliefsen, dafs der Alkohol keine solche absorbirende Kraft besitzt. Es wurde ein Glaubersalzkrystall über einer kleinen Portion sorgfältig bereiteten absoluten Alkohols mittelst eines Drahtes aufgehängt, und dieser an dem Korkpfropf des Gefäfses befestiget. In sechs Monaten zeigte er nicht die mindeste Veränderung. Der

säſse der Alkohol die Kraft, Wasserdunst zu absorbiren und seine Atmosphäre auszutrocknen, so wäre der Krystall gewiſs in Staub zerfallen.

Besonders merkwürdig sind die Phänomene, welche eintreten, wenn Kampfer in einer geringen Entfernung von Alkohol angebracht wird. Es wurden mehrere kleine Stücke in einem Beutel in einem Glasgefäſse, das etwas Alkohol enthielt, aufgehängt; nach wenigen Stunden fing der Kampfer an zu zerflieſsen, und war in 24 Stunden ganz in Flüssigkeit verwandelt. Dasselbe erfolgte mit 40 Gr. Kampfer, die in einem kleinen Gefäſse über Alkohol in fünf Tagen ganz in 165 Gr. einer geistigen Kampferlösung verwandelt waren. Doch gerieth auch ein wenig Kampfer in den Alkohol, und ertheilte ihm seinen Geruch und Geschmack, doch war dieses Quantum so gering, daſs der Alkohol, als er mit Wasser gemischt wurde, nur wenig opalisirte. Die Temperatur der Atmosphäre stand bei diesen Versuchen über 55°.

Das kohlensäuerliche Ammoniak ist bekanntlich sehr flüchtig und im Wasser löslich. Wird es in einem eigenen Gefäſse neben einem anderen mit Wasser eingeschlossen, so geht es ins Wasser über. 30 Gr. trockenen kohlens. Ammoniaks wurden in Pulverform über einer bedeutenden Menge kalten Wassers in einem Glasgefäſse aufgehängt, und das Ganze eingeschlossen. Nach fünf Tagen enthält das Gefäſs statt der 30 Gr. Salz 12 Gr. einer Auflösung desselben, der gröſsere Theil des Salzes war aber ins Wasser übergegangen, und ihm seinen Geschmack und die übrigen Eigenschaften mitgetheilt. Das Verhalten dieses Salzes in einer mit Wasserdunst gesättigten Atmosphäre ist demnach von dem anderer Salze ganz verschieden, indem es statt Wasser anzuziehen oder unverändert zu bleiben, selbst von demselben angezogen und aufgelöset wird.

F. Optik.

1. Besondere Anomalie des Sehens. Von *Godmann.*

(Bibl. univ. Avril 1828, p. 319.)

In der angezeigten Quelle ist eine äuſserst seltene Anomalie des Sehens aus der *Nouvelle Bibliothéque Médicale* enthalten, die in Folgendem besteht: Ein Vater gab seinem siebenjährigen Sohne Unterricht im Zeichnen, und war erstaunt zu sehen, daſs dieser alle Gegenstände, welche er darstellen wollte, verkehrt zeichnete. Sollte er eine Kerze sammt ihrem Leuchter zeichnen, so kehrte er immer dessen Basis gegen aufwärts, und die Flamme abwärts; bildete er einen Tisch oder einen Stuhl ab, so standen die Füſse desselben in die Höhe. Der Vater, verdrieſslich wegen diesem Eigensinne seines Sohnes, drohte und bestrafte ihn. Als der Knabe über diesen Gegenstand gefragt wurde, betheuerte er, die Objecte so zu zeichnen, wie er dieselben sehe. So oft man ihm einen Gegenstand verkehrt zum Abzeichnen vorlegte, bildete er ihn in seiner natürlichen Lage ab, und bewies dadurch, daſs die Empfindung, die er durch das Auge erlangte, vollkommen mit der Umkehrung des Bildes auf der Netzhaut übereinstimme. Dieser Zustand des Sehens dauerte, bis er acht Jahre erlangt hatte; nach dieser Zeit sah er die Gegenstände in ihrer natürlichen Lage.

Wiewohl dieser Fall sehr sonderbar ist, so findet er doch seines Gleichen. Ein ausgezeichneter Advocat sah einige Zeit lang alle Objecte verkehrt, die Häuser schienen ihm auf ihren Dächern zu ruhen, und die Menschen auf den Köpfen zu gehen. Selbst Dr. *Wollaston* zog sich durch geistige und körperliche Anstrengungen

das Übel zu, dafs er nur immer die Hälfte von den Gegenständen sah, die er bemerkte, auch die Namen, welche er las, erschienen ihm so. *Crawford* erzählt die Geschichte einer Frau, die an der *linken* Seite vom Schlage berührt war, und die von dieser Zeit an nur die *rechte* Hälfte der Objecte sah, wiewohl sie den Gebrauch der gelähmten Seite wieder erlangte.

2. Mikroskopische Linsen von Saphir.

(Quarterly Journ. N. IV. p. 459.)

Bekanntlich hat man im verflossenen Jahre in England angefangen, mikroskopische Linsen aus Diamant zu schleifen, und ihnen eine besondere Wirkung zugeschrieben, weil sie wegen des grofsen Brechungsvermögens des Diamantes bei einem kleinen Farbenzerstreuungsvermögen selbst mit einer mäfsigen Krümmung schon eine sehr kurze Brennweite und eine geringe, sowohl sphärische als chromatische Abweichung, mithin ein grofses und deutliches Bild geben. Nun wurden auch Linsen aus Saphir vorgeschlagen, und *Pritchard* soll schon einige der Art verfertiget haben. Da nach *Brewster's* Versuchen der Saphir ein gröfseres Brechungsvermögen hat als irgend eine andere Substanz mit einfacher Brechung (der Saphir selbst hat doppelte Brechung, *B.*), den Diamant ausgenommen, während dessen Farbenzerstreuung nur 0.026 beträgt, die des Wassers = 0.035. Wird ein Saphir aus derselben Schale geschliffen wie eine Glaslinse von $^1/_{60}$ Z. Brennweite, so erhält man eine Linse, deren Brennweite $^1/_{100}$ Z. beträgt, es ist demnach die lineare Vergröfserung derselben beinahe doppelt so grofs als die einer eben so convexen Glaslinse. Die blaue Farbe des Saphir erkennt man in dünnen Linsen kaum.

3. Dauer des Eindruckes verschiedener Lichtstrahlen im Auge.

(Ebendaselbst, p. 457.)

Die Dauer des Eindruckes verschiedener Lichtstrahlen im Auge wird nach *Plateau* von *Liege* durch folgende Zahlen bestimmt:

Flamme	0.242	Secunden.
Glühende Kohle . .	0.229	»
Weiſse Strahlen . . .	0.182	»
Blaue » . . .	0.186	»
Gelbe » . . .	0.173	»
Rothe » . . .	0.184	»

4. *B. Prevost* Ansicht über die Weiſse, nebst Bemerkungen von den Herausgebern der *Annales de Chimie etc.*

(Annal. de Chim. Tome 37, p. 105.)

Folgende Ansicht des berühmten *Benedict Prevost* über die weiſse Farbe hat *Peter Prevost* aus den Manuscripten des erstern ausgezogen: Die weiſse Farbe ist nur eine relative Empfindung, und diejenige, welche das vorherrschende Licht entstehen macht. Die Gründe für diese Behauptung sind:

1. Dasselbe Object kann in demselben Lichte weiſs, blau oder gelb erscheinen, je nachdem die Beleuchtung beschaffen ist. Sowohl das Tageslicht als das einer Kerze erscheint weiſs, wenn jedes derselben für sich erscheint. Neben einander erscheint das Tageslicht blau, das Kerzenlicht gelb, und ein Object zeigt sich weiſs, es mag von dem einen oder dem anderen, oder von beiden zugleich beleuchtet seyn.

2. Eine Kerzenflamme von so blendender Weiſse, daſs sie allein die dichteste Finsterniſs zu zerstreuen im

Stande ist, erscheint im vollen Tageslichte nur als ein dunkler rauchgelber Fleck.

3. Ein Johanneswürmchen erscheint Nachts, von einer geringen Entfernung angesehen, glänzend weiſs. Sein Licht überwiegt da dasjenige, welches andere Objecte ins Auge senden; wird aber dieses vom Lichte der Umgebung übertroffen, so erscheint die phosphorescirende Stelle des Insectes grünlichblau.

Reflectirt ein weiſser Körper des Nachts Mondlicht, so erscheint er weiſs wie bei Tage. Wird dieser Körper vom Kerzenlicht beleuchtet, jedoch so, daſs ein dazwischen befindliches Hinderniſs dieses Licht hindert, auf einige Theile jenes Körpers zu fallen, die dafür vom Mondlicht beleuchtet werden, so erscheint letzterer Theil sehr hell grünlichblau.

Afficiren einen mehrere Lichter auf ein Mal, so erzeugt das schwächere die Empfindung der schwarzen Farbe; der Schatten, als Gegensatz der Sonnenhelle, gibt einen Beleg dazu ab. Alle sehr dunklen Farben erscheinen bei schwacher Beleuchtung schwarz, selbst das Scharlachroth.

Aber nicht allein das Weiſs soll eine bloſs relative Farbe seyn. Wir haben im Vorhergehenden gesehen, daſs der Schatten, der auf einem weiſsen Körper entsteht, welcher zugleich vom schwachen Tageslichte und einer Kerze beleuchtet wird, gelb oder blau erscheint, je nachdem dieser Schatten vom Kerzen- oder Tageslichte erhellt wird. Aber derselbe weiſse Körper kann, ohne vom Tageslichte getroffen zu werden, durch zwei andere Lichtarten, nämlich durch ein Kerzenlicht und durch das Licht eines anderen brennenden Körpers beleuchtet werden. In diesem Falle wird der Schatten, welcher, durch Abhaltung des zweiten Lichtes gebildet und von der Kerzenflamme allein beleuchtet

wird, blau, während der andere gelb sich darstellt, so dafs dasselbe Licht im Vergleich mit dem Tageslicht gelb, für sich allein weifs, und mit einem anderen verglichen, blau zu seyn scheint.

Über dieses bemerken die Herausgeber der *Annales de Chimie etc.* folgendes:

Im dritten Bande der *Annales de Chimie* vom Jahre 1789 befindet sich ein Mémoire von *Monge*, das sich auf denselben Gegenstand bezieht, mit dem sich hier *Prevost* beschäftiget. Nach *Monge* hat an dem Urtheile über die Farben der Körper der Geist einen gewissen Antheil, indem es nicht durch die Natur der Lichtstrahlen allein, die ein Körper reflectirt, bestimmt wird; denn der Eindruck, den derselbe Strahl macht, erzeugt nach Verschiedenheit der Umstände bald die Empfindung der rothen, bald die der weifsen Farbe. Der Versuch, der ihn auf diese Ansicht brachte, ist folgender: Wenn man eine Reihe von verschiedenen farbigen Gegenständen durch ein rothes Glas ansieht, das nur eine einzige Strahlengattung durchläfst, so erscheinen die weifsen und rothen Körper von derselben Farbe; aber diese Farbe ist nicht die rothe, wie man natürlicher Weise voraussetzen zu können glauben sollte, alle diese Körper erscheinen weifs. Diese Täuschung ist desto auffallender, je stärker die Gegenstände, welche man durch das gefärbte Glas ansieht, beleuchtet sind, je gröfser ihre Anzahl ist, und je mehrere sich darunter befinden, von denen man weifs, dafs sie ihrer Natur nach weifs erscheinen. Von diesem Phänomen gibt *Monge* folgende Erklärung: Fafst man die Gegenstände ins Auge, die uns umgeben, so bekömmt man von ihrer Oberfläche nicht blofs Strahlen von der Farbe, wie sie uns erscheinen, sondern auch Strahlen von weifsem Lichte. Diese letzteren bestimmen unser Urtheil über die Vertiefungen und Her-

vorragungen, und überhaupt über den Grad der Schiefe einiger Stellen der Oberfläche der Körper; sie bilden die Puncte der stärksten Beleuchtung und die Lichtlinien, welche die Mahler durch einen weifsen Tupf oder eine weifse Linie bezeichnen. Sieht man einfärbige Körper durch ein rothes Glas an, so gelangt nur der rothe Antheil des weifsen Lichtes, welches ihre Oberfläche reflectirt, ins Auge. Es sind demnach diese Strahlen die einzigen, die durch ihre grofse Intensität unser Urtheil über die Schiefe verschiedener Stellen der Oberfläche bestimmen. Sie leisten also hier dieselben Dienste, die wir gewohnt sind vom weifsen Lichte zu empfangen, und da dieses von allen Objecten, die wir übersehen, auf eine gleichförmige Weise geschieht, so werden wir, so zu sagen, von der Menge der Zeugen überwältiget und genöthiget, diese Strahlen als weifses Licht anzuerkennen; eine natürliche unausweichliche Folge dessen ist es, dafs alle anderen rothen Strahlen, von derselben Natur wie die vorhergehenden, als weifses Licht angenommen werden müssen, und wir schliefsen, dafs sowohl die von Natur weifsen als auch die von Natur rothen Körper, deren Bilder zugleich auf der Netzhaut von rothen Strahlen gebildet werden, weifs seyen.

Monge findet in dem Umstande eine Bestätigung seiner Theorie, dafs die hier besprochene Täuschung weder dann eintritt, wenn die Anzahl der Objecte, die man durch das gefärbte Glas übersieht, nur gering ist, oder dann, wenn dieses Glas am Ende eines Rohres angebracht wird, noch wenn die Gegenstände schwach beleuchtet sind. Man sieht dann, sagt er, die Körper roth, weil sich darunter keiner befindet, auf dessen Form sich unser Urtheil erstrecken soll, und wir daher auch keinen Grund haben, die rothen Strahlen für weifse zu halten. Wir urtheilen in diesem Falle nur über die

Natur der Strahlen im Auge, indem wir den Eindruck, den sie im Auge hervorbringen, mit demjenigen vergleichen, den wir einen Augenblick zuvor mit freiem Auge erlangten.

Die Herausgeber des genannten Journals sagen, daſs sie diese Erklärung nur darum anführen, weil zwischen dem von *Prévost* und dem von *Monge* betrachteten Phänomene eine groſse Ähnlichkeit Statt findet; sie glauben, daſs man dieser Ansicht unüberwindliche Schwierigkeiten entgegenstellen könnte. Dieser Ähnlichkeit wegen wird auch noch ein Versuch von *Meusnier* angeführt, der auch in *Monge's* Mémoire vorkommt, und in folgendem besteht: Wenn das Sonnenlicht durch ein 2—3 Linien weites Loch in ein Zimmer kommt, das sich in einem Vorhang von rothem Taffet befindet, so ist das Bild, welches dieses Licht auf einem entgegengehaltenen Blatt weiſsen Papiers macht, nicht weiſs, wiewohl weiſse Strahlen allein dasselbe bilden, sondern schön grün; befindet sich aber das Loch in einem grünen Vorhang statt in einem rothen, so ist das Bild roth.

ZEITSCHRIFT
FÜR
PHYSIK UND MATHEMATIK.

I.

Über die gleichbeleuchteten Linien der Oberflächen, nach einem italienischen Mémoire des *Antonio Bordoni*;

von
Gustav Adolph Greisinger,
Hauptmanne im k. k. Ingenieurs - Corps.

§. 1. Die Stärke der Beleuchtung, welche durch gleichlaufend einfallende Lichtstrahlen auf der Oberfläche der Körper hervorgebracht wird, hängt von der Gröfse des Einfallswinkels ab; das ist: von der Gröfse des Winkels, welchen der einfallende Lichtstrahl mit der tangirenden Ebene der Oberfläche bildet.

Gleichbeleuchtet sind also alle Puncte einer Oberfläche, an denen die berührenden Ebenen gleiche Winkel mit einer der Lichtstrahlrichtung gleichlaufend gezogenen Geraden machen. Die Vereinigungen aller jener Puncte bilden auf der Oberfläche die gleichbeleuchteten Linien.

Um dieser Abhandlung, über die Bestimmung der gleichbeleuchteten Linien auf gegebenen Oberflächen, jene Allgemeinheit zu verschaffen, ohne welche Klarheit nie denkbar ist; werden wir zuvörderst die allgemeine Gleichung dieser Linien entwickeln, sie sodann auf die Kugeloberfläche, und auf die durch Umdrehung eines verticalen Halbkreises um eine ebenfalls verticale

Achse entstandene Fläche (den Pfuhl) anwenden, und endlich zu den Flächen übergehen, die überhaupt durch Umdrehung um eine verticale Achse entstanden sind. Einige Bemerkungen über die gleichbeleuchteten Linien jener Oberflächen durch Umdrehung um eine horizontale, oder gegen das darstellende Coordinatensystem schiefe Achse, bilden den Schlufs dieser Abhandlung.

Die Grundlage ihres analytischen Theils bilden jene bekannten allgemeinen Formeln der analytischen Geometrie im Raume, deren Ableitung man in den Werken eines *Lacroix*, *Biot*, *Hachette* und anderer nachschlagen kann.

§. 2. Die drei coordinirten Ebenen, auf die wir uns die Puncte der Linien und Flächen übertragen vorstellen, sind so angenommen, dafs die eine horizontal, die zweite vertical und dem Leser gegenüber, die dritte endlich ebenfalls vertical, und auf die beiden ersten senkrecht ist. Die erste dieser Ebenen heifse Ebene der Grundrisse, die zweite jene der Aufrisse, die dritte endlich Ebene der Seitenansichten.

Die drei Coordinirten eines jeden Punctes der Oberfläche werden wir mit z, x, y bezeichnen, und zwar mit z den verticalen Abstand desselben von der Ebene der Grundrisse, mit x den horizontalen Abstand von der Ebene der Seitenansichten (nach der rechten Hand hin), mit y endlich jenen von der Ebene der Aufrisse, von dem Leser hinweggerechnet.

Die entsprechenden Coordinaten irgend eines Punctes der gegebenen Richtung des Lichtstrahls seyen r, p, q.

Diefs vorausgesetzt, sey die Gleichung der gegebenen Oberfläche $F(x, y, z) = 0$, und die Gleichungen des Aufrisses und der Seitenansicht der durch den Ursprung der coordinirten Ebenen geführten Lichtstrahl-

richtung $p + ar = 0$ und $q + br = 0$, in denen a und b die Cotangenten der Winkel sind; welche der Aufriſs und die Seitenansicht dieser Richtung, Fig. 16, mit der Achse der x und der y auf der linken Seite bilden, so daſs, wenn mn den Aufriſs oder die Seitenansicht der Richtung des Lichtstrahls vorstellt, Cotangente som beziehungsweise $= a$ oder $= b$ wird.

In jedem Puncte der Oberfläche wird der einfallende Lichtstrahl mit der Normale dieses Punctes einen Winkel bilden, der das Complement von jenem ist, den er mit der tangirenden Ebene macht. Ist daher der Einfallewinkel der zu suchenden gleichbeleuchteten Linie gegeben, so handelt es sich nur darum, einen Ausdruck für eine trigonometrische Function des Winkels zu finden, den die Lichtstrahlrichtung an irgend einem Puncte der Oberfläche mit der Normale eben dieses Punctes bildet, und diesen dann der entsprechenden Cofunction des Einfallswinkels x gleich zu setzen, um aus der so entstandenen Gleichung eine neue Beziehung der Coordinaten x, y, z der Puncte der gesuchten Linie herzuleiten.

Es seyen nun durch irgend einen Punct der Oberfläche, die uns durch die Gleichung $F(x, y, z) = 0$ gegeben ist, zwei gleichlaufende Ebenen mit jenen der Aufrisse und der Seitenansichten geführt, welche die Oberfläche in zwei Krummen, die tangirende Ebene aber in den Tangenten zu diesen Krummen schneiden; endlich sey die Normale zu dem angenommenen Puncte gezogen.

Sowohl der Aufriſs als die Seitenansicht der beiden Tangenten und der Normale werden zu den Aufrissen und den Seitenansichten der beiden Krummen, deren Gleichungen $F(x, y, z) = 0$ für ein beständig angenommenes y, und $F(x, y, z) = 0$ für ein beständiges x

sind, Tangenten und Normale seyn. Der Aufriſs der Normale und ihre Seitenansicht bilden daher mit der Achse der x und der y (auf der linken Seite) Winkel, deren Cotangenten wir erhalten, wenn wir den aus der Gleichung $F(x, y, z) = 0$ geschöpften Werth von z einmal in Beziehung auf x, das andere Mal in Beziehung auf y differenziren, und im ersten Falle mit dx, im letzten mit dy dividiren. Das heiſst, sie sind beziehungsweise $\frac{dz}{dx}$ und $\frac{dz}{dy}$.

Die Gleichungen der Normale irgend eines Punctes der Oberfläche, dessen Coordinaten x, y, z sind, werden also

$$p - x + \frac{dz}{dx}(r - z) = 0 \text{ und } q - y + \frac{dz}{dy}(r - z) = 0,$$

und der Cosinus des Winkels, den sie mit der Lichtstrahlrichtung bildet:

$$= \frac{1 + a\frac{dz}{dx} + b\frac{dz}{dy}}{\sqrt{1 + a^2 + b^2}\sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2}}.$$

Das gleichzeitige Bestehen der Gleichung

$$\frac{1 + a\frac{dz}{dx} + b\frac{dz}{dy}}{\sqrt{1 + a^2 + b^2}\sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2}} = \sin. \pi$$

mit jener der Oberfläche $F(x, y, z) = 0$, charakterisirt demnach vollkommen die Natur der unter einem gegebenen Winkel π beleuchteten Linien.

§. 3. Wenn wir die Gleichung $F(x, y, z) = 0$ (indem wir y als beständig, also z als Function von x allein ansehen) in Bezug auf x differenziren, so wird

$$\frac{d.F(x, y, z)}{dx} + \frac{d.F(x, y, z)}{dz}\cdot\frac{dz}{dx} = 0$$

$$\text{und} \quad \frac{dz}{dx} = -\frac{\dfrac{d \,.\, F(x, y, z)}{dx}}{\dfrac{d \,.\, F(x, y, z)}{dz}};$$

und eben so wird, wenn wir x als beständig, z also als Function von y allein betrachten, und in Beziehung auf y differenziren:

$$\frac{d \,.\, F(x, y, z)}{dy} + \frac{d \,.\, F(x, y, z)}{dz} \cdot \frac{dz}{dy} = 0$$

$$\text{und} \quad \frac{dz}{dy} = -\frac{\dfrac{d \,.\, F(x, y, z)}{dy}}{\dfrac{d \,.\, F(x, y, z)}{dz}}.$$

Die Bedingungsgleichungen gleichbeleuchteter Linien lassen sich also auch so schreiben:

$$F(x, y, z) = 0 \quad \text{und}$$

$$\left[\frac{d \,.\, F(x,y,z)}{dz} - a\,\frac{d.F(x,y,z)}{dx} - b\,\frac{d.F(x,y,z)}{dy}\right]^2$$
$$-(1+a^2+b^2)\left[\left(\frac{d.F(x,y,z)}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d.F(x,y,z)}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d.F(x,y,z)}{dz}\right)^2\right] \sin.^2 \pi = 0.$$

Wir werden uns bald dieser, bald jener im §. 2. angeführten Gleichung bedienen.

§. 4. Wenn die Lichtstrahlen die in der Zeichenkunst gebräuchliche Richtung haben, so wird $a = b = 1$, und die beiden Bedingungsgleichungen werden

$$F(x, y, z) = 0 \quad \text{und}$$

$$\left[\frac{d \,.\, F(x, y, z)}{dz} - \frac{d \,.\, F(x, y, z)}{dx} - \frac{d \,.\, F(x, y, z)}{dy}\right]^2$$
$$-3\left[\left(\frac{d \,.\, F(x, y, z)}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d.F(x, y, z)}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d \,.\, F(x, y, z)}{dz}\right)^2\right] \sin.^2 \pi = 0.$$

Ist aber $\pi = 90^0$, mithin $\sin. \pi = 1$ angenommen, so

erhalten wir für jene Puncte, in denen die Lichtstrahlen der Richtung der Normale folgen, aus §. 2.:

$$\left[1 + a\frac{dz}{dx} + b\frac{dz}{dy}\right]^2$$
$$- (1 + a^2 + b^2)\left[1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right] = 0,$$

welcher Gleichung die Werthe $a = \frac{dz}{dx}$ und $b = \frac{dz}{dy}$ entsprechen, wie diefs vorauszusehen war.

Wäre hingegen $x = 0$, so verwandeln sich die Bedingungsgleichungen der gleichbeleuchteten Linien in jene des eignen Schattens der Oberfläche. Diese letztern sind auch, wie bekannt:

$$F(x, y, z) = 0 \text{ und}$$
$$1 + a\frac{dz}{dx} + b\frac{dz}{dy} = 0,$$
$$\text{oder } F(x, y, z) = 0 \text{ und}$$
$$\frac{d.F(x, y, z)}{dz} - a\frac{d.F(x, y, z)}{dx} - b\frac{d.F(x, y, z)}{dy} = 0.$$

§. 5. Gehen wir nunmehr zu den gleichbeleuchteten Linien der Kugeloberfläche über. Für diese wird

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - m^2 = 0,$$

wenn wir den Ursprung der Coordinaten im Mittelpuncte derselben voraussetzen, und m ihren Halbmesser bedeutet.

Ferner wird

$$\frac{d.F(x,y,z)}{dx} = 2x, \quad \frac{d.F(x,y,z)}{dy} = 2y, \quad \frac{d.F(x,y,z)}{dz} = 2z.$$

Wir erhalten also als Bedingungsgleichungen

$$x^2 + y^2 + z^2 - m^2 = 0 \text{ und}$$
$$(z - ax - by)^2 - (1 + a^2 + b^2)(x^2 + y^2 + z^2)\,\sin.^2 x = 0,$$

oder, $(\sqrt{1 + a^2 + b^2})\,\sin. x$ Kürze halber $= s$ gesetzt:

$$(z - ax - by)^2 - s^2(x^2 + y^2 + z^2) = 0;$$

und da $x^2 + y^2 + z^2 = m^2$ ist:

$$(z - ax - by)^2 = s^2 m^2, \text{ und endlich}$$

$$z - ax - by \mp ms = 0.$$

Diese letztere Gleichung ist vom ersten Grade, gehört daher zu einer Ebene; ihr Durchschnitt mit der Kugeloberfläche bestimmt die gleichbeleuchteten Linien, die mithin Kreise sind. Vergleichen wir die Gleichung des Lichtstrahls $p + ar = 0$ und $q + br = 0$ mit jener der Ebene, deren Gleichung

$$z - ax - by \mp ms = 0$$

ist, so finden wir, dafs letztere auf erstere senkrecht ist. In der That, wenn die Gleichung einer geraden Linie $x + ar = 0$ und $y + br = 0$, jene der Ebene aber $Ax + By + Cz + D = 0$ sind, so durchschneiden sie sich senkrecht, wenn $A = -aC$ und $B = -bC$ ist, welche Bedingungen in dem vorliegenden Falle erfüllt sind. Die gleichbeleuchteten Linien einer Kugeloberfläche sind also Kreise, die ihren Mittelpunct in der durch den Mittelpunct der Kugel gezogenen Lichtstrahlrichtung haben.

Die Gleichung $z - ax - by \mp ms = 0$, oder die beiden $z - ax - by - ms = 0$ und $z - ax - by + ms = 0$, zeigen uns ferner, dafs jedem Werthe des Winkels π zwei Ebenen entsprechen, von denen die erste die Achse der z auf der bejahenden, die zweite aber auf der verneinenden Seite schneidet, da für x und $y = 0$, z im ersten Falle $= + ms$, im zweiten $= - ms$ wird. Der Abstand dieser Ebenen vom Mittelpuncte der Kugel ist, wenn wir die eben angeführte allgemeine Gleichung gelten lassen, $\frac{D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$, also für unsern Fall

$$= \frac{\pm ms}{\sqrt{1 + a^2 + b^2}} = \pm \frac{m \cdot \sqrt{1 + a^2 + b^2} \cdot \sin. \pi}{\sqrt{1 + a^2 + b^2}} = \pm m \sin. \pi.$$

Der einfallende Lichtstrahl bildet also auch an den Puncten der Durchschnitte dieser beiden Ebenen mit der Kugeloberfläche, mit den tangirenden Ebenen zu derselben, auf der nämlichen Seite, Winkel, die mit einander 180° machen. Lassen wir daher die Lichtstrahlen, von der bejahenden Seite der z gegen die verneinende gerichtet, gehen, so entspricht die Gleichung $z - ax - by - ms$ der gleichbeleuchteten Linie, während die Gleichung $z - ax - by + ms$ dann gilt, wenn der Lichtstrahl in gerade entgegengesetzter Richtung angenommen wird.

Beide Voraussetzungen vereinigen sich in den Bedingungsgleichungen

$$x^2 + y^2 + z^2 - m^2 = 0 \quad \text{und}$$
$$z - ax - by - ms = 0,$$

vorausgesetzt, dafs s sowohl bejahend als verneinend genommen werden kann.

§. 6. Unter Voraussetzung der gebräuchlichen Lichtstrahlrichtung wird $a = b = 1$ und $s = \sqrt{3} \sin. \pi$; die gleichbeleuchteten Linien der Kugel sind dann durch die Gleichungen

$$x^2 + y^2 + z^2 - m^2 = 0 \text{ und } z - x - y - m\sqrt{3} \sin. \pi = 0$$

dargestellt. Setzen wir hingegen $\pi = 0$, so verwandeln sich jene Gleichungen in die des eigenen Schattens der Kugel $x^2 + y^2 + z^2 - m^2 = 0$ und $z - ax - by = 0$.

§. 7. Wir werden uns vorzüglich nur mit dem Aufrisse und Grundrisse der gleichbeleuchteten Linien der Kugel unter der gebräuchlichen Lichtstrahlrichtung beschäftigen. Wir erhalten den Aufrifs derselben, wenn wir aus den beiden Gleichungen $x^2 + y^2 + z^2 - m^2 = 0$ und $z - x - y - m\sqrt{3} \sin. \pi = 0$, y eliminiren.

So finden wir für denselben

$$z^2 - xz + x^2 - (z - x)\, m\sqrt{3} \sin. \pi - \frac{m^2}{2}(1 - 3 \sin.^2 \pi) = 0.$$

Diese Gleichung ist offenbar jene einer Ellipse, wie diess leicht vorauszusehen war. Ihre nähern Eigenschaften können aus dieser Gleichung leicht entwickelt werden. Zuvörderst wollen wir dieser aber eine einfachere Gestalt geben, indem wir das System der Coordinaten x und z in ein anderes der t und u übertragen, deren Richtungen mit jener der Achsen x, z Winkel von 45 Graden bilden. Durch diese Uebertragung wird augenscheinlich $x = \frac{t - u}{\sqrt{2}}$ und $z = \frac{t + u}{\sqrt{2}}$.

Diese Werthe, in obige Gleichung gesetzt, geben:

$$t^2 + 3u^2 - 2m\sqrt{6}\sin.\pi - m^2(1 - 3\sin.^2\pi) = 0 \text{ oder}$$

$$t^2 + (u\sqrt{3} - m\sqrt{2}\sin.\pi)^2 - m^2\cos.^2\pi = 0,$$

aus welcher Gleichung wir mit mehr Leichtigkeit alle Eigenschaften der durch sie dargestellten Ellipsen entwickeln werden.

§. 8. Betrachten wir zuerst den Fall, wo $\pi = 0$, so erhalten wir für den Aufriss des eignen Schattens der Kugel $t^2 + 3u^2 - m^2 = 0$ die Gleichung einer Ellipse in Bezug auf die Hauptachsen. Die eine halbe Achse finden wir, indem wir $u = 0$ setzen, $= \pm m$, die andere aber für $t = 0$ gleich $\pm \frac{m}{\sqrt{3}}$. Diese Ellipse hat also ihre grössere Achse in jener der t, und gleich dem Durchmesser der Kugel, ihre kleinere aber in jener der u; das dreifache Quadrat dieser letztern endlich ist dem Quadrate des Halbmessers der Kugel gleich. Die geometrische Construction jener kleinern Achse, und durch sie auch die des Aufrisses des eignen Schattens der Kugel, unterliegt nunmehr keiner Schwierigkeit.

Fig. 17. Stellt nämlich der Kreis $ABED$ den Aufriss der Kugel, und Ox die Achse der x vor, in welcher sich die Ebenen der Aufrisse und Grundrisse schneiden, die Linien uOE und tOC die beiden Achsen der u und

t, und man macht die Sehne BG dem Halbmesser BO des Kreises gleich, zieht endlich die Linien CG, so schneiden diese auf der Linie uOE in HH die kleinere Achse der gesuchten Ellipse ab, deren gröſsere Achse der Durchmesser BC selbst ist.

In der That geben die ähnlichen Dreiecke COH und BCG

$$BG : BC = HO : CH (2HO),$$

und das rechtwinklige Dreieck CHO

$$\overline{CH}^2 - \overline{HO}^2 = \overline{CO}^2, \text{ oder}$$
$$3HO^2 = m^2 \text{ und } 3HH^2 = 4m^2.$$

§. 9. Nehmen wir $x = 90^0$, so finden wir für den Aufriſs der nach der Richtung der Normale, mithin am stärksten beleuchteten Linie der Kugel

$$t^2 + (u\sqrt{3} - m\sqrt{2})^2 = 0,$$

aus welcher nachfolgende Werthe sich ergeben:

$$t = 0 \text{ und } u\sqrt{3} = m\sqrt{2},$$

die offenbar einem Puncte entsprechen, welcher in der Achse der u, und von dem Mittelpuncte des Kreises $ABED$ aufwärts um $m\sqrt{\frac{2}{3}}$ entfernt liegt.

Für die entgegengesetzte Richtung der Lichtstrahlen ergibt sich der Aufriſs des *leuchtenden* Punctes auf der entgegengesetzten Seite des Mittelpunctes der Kugel, von diesem ebenfalls um $m\sqrt{\frac{2}{3}}$ entfernt.

Wirklich hätte die Gleichung

$$t^2 + (u\sqrt{3} - m\sqrt{2})^2 = 0$$

die Gestalt $t^2 + (u\sqrt{3} \mp \sqrt{2})^2 = 0$ angenommen, wenn wir bei der Elimination von y aus den Gleichungen

$$x^2 + y^2 + z^2 - m^2 = 0 \text{ und } z - x - y - m\sqrt{3}\sin. x = 0$$

darauf Rücksicht genommen hätten, daſs $\sqrt{3}\sin. x = s$ sowohl verneinend als bejahend seyn kann.

Zur Bestimmung dieser beiden leuchtenden Puncte der Kugel dient folgende Construction.

Fig. 17. Sind die Puncte HH nach der vorhin angeführten Art bestimmt, so nehme man $HF = OB =$ dem Halbmesser der Kugel. Der aus dem Mittelpuncte O mit dem Halbmesser OF beschriebene Kreis schneidet dann auf der Achse AE der u die gesuchten beiden Puncte II ab. Man sieht leicht, dafs OI zugleich die Excentricität des Aufrisses des eignen Schattens der Kugel ist, den wir in §. 8. bestimmten.

§. 10. Gehen wir nun zu den Aufrissen jener gleichbeleuchteten Linien der Kugel über, an deren Puncten der Einfallswinkel weder $= 0$ noch $= 90°$ ist.

Aus der Gleichung

$$t^2 + (u\sqrt{3} - m\sqrt{2}\,\sin.\pi)^2 - m^2\cos.^2\pi = 0,$$

welche für senkrechte Coordinaten gilt, die ihren Ursprung im Mittelpuncte der Kugel haben, erhellt, dafs die durch sie dargestellten Ellipsen ihre Mittelpuncte in der Geraden AE, eine Achse in eben dieser Geraden, die andere auf diese senkrecht haben.

Nennen wir die Hälfte dieser letztern Achse A, die Hälfte der andern B, die Entfernung des Mittelpunctes einer der Ellipsen von jenem der Kugel a, jene endlich der beiden Durchschnitte der Ellipse mit der Achse B von dem Mittelpuncte der Kugel b' und b''.

Zuvörderst gibt die Gleichung

$$t^2 + (u\sqrt{3} - m\sqrt{2}\,\sin.\pi)^2 - m^2\cos.^2\pi = 0$$

für den gröfsten Werth von t, $u\sqrt{3} - m\sqrt{2}\,\sin.\pi = 0$, folglich wird $a = m\,\sin.\pi\sqrt{\tfrac{2}{3}}$, und der entsprechende Werth von $t = A = \pm\, m\cos.\pi$. Die Werthe b' und b'' gibt uns die Gleichung

$$t^2 + (u\sqrt{3} - m\sqrt{2}\,\sin.\pi)^2 - m^2\cos.^2\pi = 0,$$

wenn wir darin $t = 0$ setzen. b' wird also gleich

$$\frac{m}{\sqrt{3}}\,(\sqrt{2}\,\sin.\,x + \cos.\,x) \quad \text{und}$$

$$b'' = \frac{m}{\sqrt{3}}\,(\sqrt{2}\,\sin.\,x - \cos.\,x).$$

Die kleinere Achse der Ellipse ist aber offenbar $b' - b''$, folglich ist

$$2B = \frac{2m\,.\,\cos.\,x}{\sqrt{3}} \quad \text{und} \quad B = \frac{m\,.\,\cos.\,x}{\sqrt{3}},$$

und es verhält sich in jeder dieser Ellipsen:

$$A : B = m\cos.\,x : \frac{m}{\sqrt{3}}\cos.\,x = \sqrt{3} : 1.$$

Die Aufrisse der unter was immer für einem Winkel gleichbeleuchteten Linien der Kugel sind demnach unter sich ähnliche Ellipsen.

Betrachten wir die Werthe von $a = m.\sin.\,x.\sqrt{\tfrac{2}{3}}$, $A = m\cos.\,x$ und $B = m\cos.\,x\sqrt{\tfrac{1}{3}}$, so lehren sie uns, dafs diese Ellipsen immer gröfser werden, je mehr ihre Mittelpuncte sich jenem der Kugel nähern, und dafs die gröfste unter ihnen der im §. 8. bestimmte eigene Schatten, die kleinste hingegen der im §. 9. angeführte leuchtende Punct der Kugel im Aufrisse ist.

§. 11. Die Construction der in Rede stehenden Ellipsen wird durch den Umstand sehr erleichtert, dafs der geometrische Ort ihrer Brennpuncte einem höchst einfachen Gesetze unterliegt. In der That, wenn wir E die Excentricität der Ellipsen nennen, wodurch

$$E^2 = A^2 - B^2 = m^2\cos.^2 x - \frac{m^2}{3}\cos.^2 x = \frac{2m^2}{3}\cos.^2 x$$

$$\text{und} \quad E = m\cos.\,x\sqrt{\tfrac{2}{3}}$$

wird, so dient diese Gleichung im Vereine mit der früher gefundenen $a = m\sin.\,x\sqrt{\tfrac{2}{3}}$, die Gröfsen $\sin.\,x$ und $\cos.\,x$ zu eliminiren. Es folgt dann aus dieser letztern Gleichung

$$a^2 = \tfrac{2}{3}m^2\sin.^2 x \quad \text{oder}$$

$$a^2 = \frac{2}{3} m^2 - \frac{2}{3} m^2 \cos.^2 \pi, \text{ und}$$

$$a^2 + E^2 = \frac{2}{3} m^2.$$

Die Brennpuncte der Aufrisse aller unter der gewöhnlichen Lichtstrahlrichtung gleich beleuchteten Linien der Kugel liegen daher in dem Umfange eines Kreises, der mit dem Aufrisse der Kugel concentrisch ist, und durch jenen ihres leuchtenden Punctes geht.

Theilen wir den Werth von a durch jenen von E, so erhalten wir

$$\frac{a}{E} = \frac{m \sin. \pi \sqrt{\frac{2}{3}}}{m \cos. \pi \sqrt{\frac{2}{3}}} = \text{tang.}\, \pi.$$

Allein $\frac{a}{E}$ ist auch zugleich die Tangente des Winkels, den die Achse der t mit den nach den Brennpuncten der Ellipsen gezogenen Linien bildet. Dieser Winkel ist also dem der Ellipse entsprechenden Einfallswinkel der Lichtstrahlen gleich.

§. 12. Fig. 18. Mit Hülfe der eben entwickelten Eigenschaften wird es nun leicht, die Aufrisse der gleichbeleuchteten Linien der Kugel für jeden gegebenen Einfallswinkel π zu construiren.

Machen wir nämlich den Winkel WOF gleich dem gegebenen π, ziehen die MHG senkrecht auf AE, die FG von dem Durchschnitte der OF mit dem Aufrisse $AWEC$ der Kugel senkrecht auf die MHG, und machen endlich $HQ = MG$, so wird M der Mittelpunct, H ein Brennpunct, MG die eine, und MQ die andere halbe Achse der gesuchten Ellipse.

§. 13. Wenn wir die Gleichung des Aufrisses der gleichbeleuchteten Linien der Kugel für die gewöhnliche Lichtstrahlrichtung

$$t^2 + 3u^2 - m^2 - 2cum\sqrt{6} + 3c^2 m^2 = 0,$$

in welcher die willkührliche Beständige c statt des Sinus des Einfallswinkels π gesetzt ist, in Bezug auf t und u

dieser Ellipse der halben kleinen Achse des im §. 8. angeführten eignen Schattens der Kugel gleich ist; der zweite, dafs der Mittelpunct S dieser Ellipse von dem Berührungspuncte A um ein Drittheil des Halbmessers AO entfernt ist; der dritte, dafs die Excentricität derselben dem Drittheile der Sehne des Viertelkreises AW gleicht; der vierte endlich, dafs die Entfernung $o\nu$ des Durchschnittes ν der Ellipse mit dem Durchmesser AE von dem Mittelpuncte der Kugel der halben kleinen Achse jener Ellipse gleicht, welche der Aufrifs des eignen Schattens der *hohlen* Halbkugel $AWEC$ bei der gewöhnlichen Lichtstrahlrichtung ist.

§. 16. Da wir in den §. 10. und 14. $a = m \sin. \pi \sqrt{\frac{2}{3}}$ und $u' = m \sqrt{\frac{3}{2}} \sin. \pi$ gefunden haben, so wird

$a : u' = m \sin. \pi \sqrt{\frac{2}{3}} : m \sin. \pi \sqrt{\frac{3}{2}} = 2 : 3$ oder $2u' = 3a$; und es unterliegt nunmehr keiner Schwierigkeit, eine dieser Gröfse durch die andere zu construiren. Wäre z. B. a (die Entfernung des Mittelpunctes der Ellipse von jenem der Kugel) gegeben, und u', die den beiden Berührungspuncten mit dem Kreis $AWEC$ entsprechende Abscisse zu bestimmen; so gibt die Hälfte von OM, von M gegen A getragen, in L den gesuchten Werth von u', und die von L auf AO gezogene Senkrechte NB bestimmt in ihren Durchschnitten N, B mit dem Kreise $AWEC$ die beiden Berührungspuncte mit eben diesem Kreise.

§. 17. Wäre hingegen u' gegeben, oder mit andern Worten die Puncte B, N, in denen der Aufrifs der gleichbeleuchteten Linie den Kreis $AWEC$ berühren soll, so findet man den Mittelpunct der Ellipse, ihre beiden Achsen, und die Excentricität derselben durch folgende einfache Construction.

Man ziehe BL senkrecht auf den Durchmesser AE, mache LM gleich einem Drittel von LO, so wird M der

gesuchte Mittelpunct. Man ziehe ferner MHG ebenfalls senkrecht auf AE, so geben die Durchschnitte dieser Geraden mit dem aus dem Mittelpuncte O durch die Aufrisse der beiden leuchtenden Puncte I, I geführten Kreise die Brennpuncte, und MH die Excentricität der gesuchten Ellipse. Endlich ziehe man OHF, und aus dem Puncte F, FG senkrecht auf die Verlängerung von MH, und schneide aus H mit dem Halbmesser GM die Gerade OE in Q, so wird MG die halbe erste, MQ aber die halbe zweite Achse derselben Ellipse.

Überhaupt dienen die früher für a, A, B, E, b', b'', u' und t' gefundenen Werthe dazu, aus einem derselben alle andern zu bestimmen, wenn man ihnen noch die aus den Werthen von A, B und E folgende Gleichung $\sqrt{A^2+B^2} = E\sqrt{2}$ beigesellt, in Folge welcher die Sehne der Viertelellipse der Diagonale eines Quadrates gleicht, dessen Seite die Excentricität der Ellipse ist.

§. 18. Unter den unzähligen Ellipsen, welche die Aufrisse der gleichbeleuchteten Linien der Kugel vorstellen, gibt es zwei, welche die Achsen Ox und Oz der in dieser Abhandlung früher erwähnten Coordinaten x und z tangirend berühren. Um sie zu bestimmen, kehren wir zu der Gleichung dieser Ellipsen für jenes Coordinatensystem zurück. Sie ist §. 7.:

$$z^2 - xz + x^2 - (z-x)\, m\sqrt{3}\, \sin.\varkappa - \frac{m^2}{2}(1 - 3\sin.^2\varkappa) = 0.$$

Jede der unzähligen durch diese Gleichung dargestellten Ellipsen schneidet die Achse der x im Allgemeinen in zwei Puncten, deren Abscissen x wir finden, wenn wir in obiger Gleichung $z = 0$ setzen. So wird

$$x^2 + mx\sqrt{3}\, \sin.\varkappa - \frac{m^2}{2}(1 - 3\sin.^2\varkappa) = 0,$$

$$x^2 = - mx\sqrt{3}\, \sin.\varkappa + \frac{m^2}{2}(1 - 3\sin.^2\varkappa),$$

$$x = -\frac{m}{2}\sqrt{3}\,\sin.\varkappa \pm \sqrt{\frac{3m^2}{4}\sin.^2\varkappa + \frac{m^2}{2}(1 - 3\,\sin.^2\varkappa)},$$

und endlich

$$x = -\frac{m}{2}\sqrt{3}\,\sin.\varkappa \pm \frac{m}{2}\sqrt{(2 - 3\,\sin.^2\varkappa)}.$$

Soll daher eine dieser Ellipsen die Achse der x nur in einem Puncte berühren, so müssen diese beiden Werthe in einen zusammenschmelzen, oder

$$\frac{m}{2}\sqrt{(2 - 3\,\sin.^2\varkappa)} = 0$$

seyn. Mithin wird

$$2 - 3\,\sin.^2\varkappa = 0 \quad \text{und} \quad \sin.\varkappa = \pm\sqrt{\tfrac{2}{3}}$$

seyn müssen.

Allein denselben Werth von $\sin.\varkappa$ fanden wir früher, §. 14., für jene Ellipse, welche den Kreis $AWEC$ in dem einzigen Puncte A berührt; eben diese Ellipse hat daher die Achse der x und der z zu Tangenten.

Setzen wir den gefundenen Werth von $\sin.\varkappa = \pm\sqrt{\tfrac{2}{3}}$ in einen der beiden Werthe von x, so finden wir für diese $\frac{m}{\sqrt{2}}$. Der Punct, wo die in Rede stehende Ellipse die Achse der x berührt, liegt daher in dem Durchschnitte der aus A auf jene Achse geführten Senkrechten mit derselben.

Es bedarf wohl kaum einer Erörterung, daſs eben diese Ellipse auch die Achse der z in dem Puncte berührt, den die aus A auf sie geführte Senkrechte bestimmt.

Vergleichen wir den vorhin gefundenen Werth von

$$x = -\frac{m\sqrt{3}}{2}\sin.\varkappa \pm \frac{m}{2}\sqrt{(2 - 3\,\sin.^2\varkappa)}$$

mit jenen von t' und u' (§. 14.), den Coordinaten der Puncte, in denen die Ellipse den Kreis $AWEC$ berührt,

$$t' = \pm\, m\sqrt{(1 - \tfrac{3}{2}\,\sin.^2\varkappa)} \quad \text{und} \quad u' = m\,\sin.\varkappa\sqrt{\tfrac{3}{2}},$$

so ergibt sich die Beziehung $x = \frac{t' - u'}{\sqrt{2}}$; in der That haben wir auch mit Hülfe dieser letztern Gleichung das Coordinatensystem der x und z in jenes der t, u übertragen.

Setzen wir in der Gleichung

$$x^2 + m x \sqrt{3} \sin. \pi - \frac{m^2}{2} (1 - 3 \sin.^2 \pi)$$

$x = -m$, so erhalten wir für jene Ellipse, welche den Durchmesser DY in dem Endpuncte D berührt:

$$m^2 - m^2 \sqrt{3} \sin. \pi - \frac{m^2}{2} (1 - 3 \sin.^2 \pi) = 0$$

$$\text{und} \quad \sin. \pi = \sqrt{\tfrac{1}{3}}.$$

Ohne die Werthe von A, B, a, b', b'', E, t', u', welche dem Werthe $\sin. \pi = \sqrt{\frac{1}{3}}$ entsprechen, alle aufzusuchen, wollen wir uns mit denen von b'' und E begnügen. Der erstere findet sich gleich Null, der zweite $= \frac{2}{3} m$. Jene Ellipse geht also durch den Mittelpunct O des Aufrisses der Kugel, und ihre Excentricität ist der kleinern Achse des im §. 15. erwähnten eignen Schattens im Innern der hohlen Halbkugel $AWEC$ gleich.

§. 19. Suchen wir nunmehr jene Puncte der durch die Gleichung

$$z^2 - xz + x^2 - (z - x) m \sqrt{3} \sin. \pi - \frac{m^2}{2} (1 - 3 \sin.^2 \pi) = 0$$

oder

$$x^2 - (z - m \sqrt{3} \sin. \pi) x + z^2 - m z \sqrt{3} \sin. \pi$$
$$- \frac{m^2}{2} (1 - 3 \sin.^2 \pi) = 0$$

dargestellten Ellipsen, in denen die Werthe von z und x gröſste oder kleinste werden.

Für die gröſsten sowohl als für die kleinsten Werthe von z müssen die beiden aus der angeführten Gleichung entspringenden Werthe von

$$x = \frac{(z - m\sqrt{3}\,\sin.\pi)}{2}$$

$$\pm\sqrt{\left(\frac{z - m\sqrt{3}\,\sin.\pi}{2}\right)^2 - z^2 + mz\sqrt{3}\,\sin.\pi + \frac{m^2}{2}(1 - 3\,\sin.^2\pi)}$$

in einen verschmelzen, also mufs der unter dem Wurzelzeichen befindliche Ausdruck verschwinden.

Wir erhalten so für die gröfsten oder kleinsten Werthe von z:

$$\tfrac{1}{4}(z - m\sqrt{3}\,\sin.\pi)^2 = z^2 - mz\sqrt{3}\,\sin.\pi - \frac{m^2}{2}(1 - 3\,\sin.^2\pi)$$

$$\text{und}\quad z = \frac{m}{\sqrt{6}}(\sqrt{2}\,\sin.\pi \pm 2\,\cos.\pi),$$

und für den entsprechenden Werth von x:

$$= \frac{z - m\sqrt{3}\,\sin.\pi}{2} = \frac{m}{\sqrt{6}}(-\sqrt{2}\,\sin.\pi \pm \cos.\pi).$$

Der geometrische Ort aller Puncte, welchen die gröfsten und kleinsten Werthe von z entsprechen, findet sich nun, wenn man mittelst der für x oder z gefundenen Werthe, sin. π aus der Gleichung der Ellipsen eliminirt. So gibt der Werth von $x = \frac{z - m\sqrt{3}\,\sin.\omega}{2}$:

$$\sin.\pi = \frac{z - 2x}{m\sqrt{3}};$$

und dieser, in die Gleichung

$$x^2 - (z - m)\sqrt{3}\,\sin.\pi\,.\,x + z^2 - mz\sqrt{3}\,\sin.\pi - \frac{m^2}{2}(1 - 3\,\sin.^2\pi) = 0$$

gesetzt, gibt $z^2 + 2x^2 - m^2 = 0.$

Der geometrische Ort der gröfsten und kleinsten Werthe der Ordinaten z in den Aufrissen der gleichbeleuchteten Linien der Kugel ist demnach eine Ellipse, deren Mittelpunct jener des Kreises *HWEC*, deren gröfsere Achse der verticale Durchmesser eben dieses Kreises, die kleinere aber jener Theil des horizontalen

Durchmessers Dy ist, den die aus A und E auf ihn gezogenen Senkrechten abschneiden.

Wiederholen wir dasselbe Verfahren in Rücksicht auf die gröſsten und kleinsten Werthe der Abscissen x, so finden wir

$$x = \frac{m}{\sqrt{6}}(\sqrt{2}\sin.\pi \pm 2\cos.\pi) \quad \text{und}$$

$$z = \frac{m}{\sqrt{6}}(-\sqrt{2}\sin.\pi \pm \cos.\pi),$$

und für ihren geometrischen Ort $x^2 + 2z^2 - m^2 = 0$ die Gleichung einer Ellipse, die mit der vorigen concentrisch und ihr vollkommen gleich, aber so umgestürzt ist, daſs ihre zweite Achse auf die erste jener zu liegen kommt.

§. 20. Die Aufgabe, die wir so eben lösten, nämlich den geometrischen Ort aller Puncte der verschiedenen Aufrisse gleichbeleuchteter Linien der Kugel, welche gröſsten oder kleinsten Werthen der Coordinaten x oder z entsprechen, zu finden, läſst sich auch so geben: den geometrischen Ort aller jener Puncte zu bestimmen, in denen diese Ellipsen durch horizontale oder verticale Tangenten berührt werden. Sie ist also nur ein besonderer Fall einer viel allgemeinern, nämlich die Krumme anzugeben, welche die Vereinigung aller jener Puncte bildet, in welcher diese Ellipsen durch Tangenten berührt werden, welche derselben gegebenen Richtung folgen.

Die Gleichung der Ellipsen für die Achsen t und u ist

$$t^2 + 3u^2 - m^2 - 2um\sqrt{6}\sin.\pi + 3m^2\sin.^2\pi = 0.$$

An jenen Puncten derselben, wo die Tangenten einer gegebenen Richtung folgen (welche mit der Achse der t einen Winkel bildet, dessen Tangente wir $= k$ setzen), muſs nothwendig $-\frac{du}{dt} = k$ seyn. Allein die

obige Gleichung gibt, wenn wir sie in Bezug auf t und u differenziren:

$$2tdt + 6udu - 2dum\sqrt{6}\,\sin.x = 0 \quad \text{oder}$$

$$t + \frac{3udu}{dt} - \frac{du}{dt} \cdot m\sqrt{6}\,\sin.x = 0,$$

aus welcher

$$-\frac{du}{dt} = \frac{t}{3u - m\sqrt{6}\,\sin.x} = k \text{ und } \sin.x = \frac{3ku - t}{km\sqrt{6}},$$

$$\text{endlich} \quad \sin.^2 x = \frac{(3ku - t)^2}{6k^2m^2} \quad \text{folgt.}$$

Wenn wir mit Hülfe dieser Werthe $\sin.x$ und $\sin.^2 x$ aus der Gleichung

$$t^2 + 3u^2 - 2um\sqrt{6}\,\sin.x + 3m^2\sin.^2 x = 0$$

eliminiren, so erhalten wir für den gesuchten geometrischen Ort

$$t^2 + 3u^2 - m^2 - \frac{2u(3ku - t)}{k} + \frac{(3ku - t)^2}{2k^2} = 0$$

die Gleichung einer Ellipse, deren nähere Eigenschaften wir untersuchen wollen. Setzen wir zuvörderst $t = 0$, so finden wir für die Entfernung der Durchschnitte derselben, mit der Achse der u, vom Mittelpunct O

$$3u^2 - m^2 - \frac{6kuu}{k} + \frac{(3ku)^2}{2k^2} = 0 \quad \text{und} \quad u = \pm m\sqrt{\tfrac{2}{3}}$$

Die gesuchte Ellipse geht also immer durch die Aufrisse der beiden leuchtenden Puncte I, I, welche auch die gegebene Richtung der Tangenten seyn mag.

Zu dem Kreise $AWEC$ sind zwei Tangenten möglich, welche der gegebenen Richtung folgen, und den Kreis in zwei Puncten V, V berühren. Allein diese beiden Puncte sind zugleich Berührungspuncte des Kreises mit zweien der unendlich vielen Ellipsen, welche die Aufrisse der gleichbeleuchteten Linien bilden (jene mitgerechnet, welche der entgegengesetzten Lichtstrahlrichtung folgen). Unsere Ellipse muſs also nothwendig

durch diese beiden Puncte gehen. Ihr Mittelpunct mufs eben daher in O, dem Mittelpuncte des Kreises $AWEC$, liegen, da dieser in dem Durchschnitte der sich halbirenden Sehnen II und VV der Ellipse liegt. AV endlich wird die halbe grofse Achse derselben.

Für diese wird nämlich

$$d(t^2 + u^2) = 0, \quad 2t\,dt + 2u\,du = 0, \quad \text{oder}$$

$$\frac{du}{dt} = -\frac{t}{u} \quad \text{und} \quad -\frac{du}{dt} = \frac{t}{u} = k,$$

welcher Bedingung nur die Coordinaten der Puncte V entsprechen.

§. 21. Eine interessante Beziehung ergibt sich auch, wenn wir die Puncte suchen, welche der Aufrifs des eignen Schattens der hohlen Halbkugel $AWEC$ unter der gewöhnlichen Lichtstrahlrichtung mit den gleichbeleuchteten Linien derselben Kugel gemein hat. Die Gleichung des erwähnten Schattens ist

$$qu^2 + t^2 - m^2 = 0,$$

und jene des Aufrisses der gleichbeleuchteten Linien

$$3u^2 + t^2 - 2um\sqrt{6}\,\sin.\pi - m^2(1 - 3\,\sin.^2\pi) = 0.$$

Indem wir die erste dieser Gleichungen von der letztern abziehen, und den Unterschied durch 6 theilen, erhalten wir

$$u^2 + \frac{2mu\,\sin.\pi}{\sqrt{6}} - \frac{m^2}{2}\sin.^2\pi = 0,$$

aus welcher $u = \dfrac{-m\,\sin.\pi \pm 2m\,\sin.\pi}{\sqrt{6}}$, und

$$u = -m\,\sin.\pi\sqrt{\tfrac{3}{2}} \quad \text{oder} \quad u = \frac{m}{\sqrt{6}}\sin.\pi$$

folgt. Der erste dieser beiden Werthe gibt

$$t = \pm\, m\sqrt{(1 - \tfrac{27}{2}\,\sin.^2\pi)},$$

und der zweite

$$t = \pm\, m\sqrt{(1 - \tfrac{5}{2}\,\sin.^2\pi)}.$$

Es ist auffallend, dafs der zweite dieser letztern Werthe dem in §. 14. für den Berührungspunct der Ellipse mit dem Kreis *AWEC* gefundenen Werthe von t' gleicht, und dafs der ihm entsprechende Werth von

$$u = \frac{m}{\sqrt{6}} \sin. \pi = \frac{m}{3} \sin. \pi \sqrt{\tfrac{3}{2}}$$

ein Drittheil von dem dort gefundenen $u' = m \sin. \pi \sqrt{\frac{3}{2}}$ der andern Coordinate eben jenes Berührungspunctes ist; und da wir früher (im §. 10) $a = m \sin. \pi \sqrt{\frac{2}{3}}$ fanden, mithin $\frac{1}{3} u' = \frac{1}{2} a$ ist, sich die merkwürdige Beziehung ergibt, dafs, wenn wir die den eigenen Schatten der hohlen Halbkugel im Aufrisse darstellende halbe Ellipse durch Verzeichnung ihrer andern auf der bejahenden Seite der u liegenden Hälfte ergänzen, der Durchschnitt dieser letztern mit jeder der verschiedenen durch die im Anfange dieses Paragraphs angeführte Gleichung dargestellten Ellipsen von der Achse der t genau um die Hälfte des Abstandes der Mittelpuncte jener Ellipsen von eben dieser Achse entfernt ist, während seine Entfernung von der Achse der u jener der beiden Berührungspuncte mit dem Kreise *AWEC* von eben dieser letztern Achse gleicht.

Manche merkwürdige Eigenschaft liefse sich wohl noch aus der Gleichung des Aufrisses der gleichbeleuchteten Linien der Kugel herleiten; wir wollen jedoch ihre Aufsuchung mit der Bemerkung schliefsen, dafs die im §. 10. gefundenen Werthe von a und A gleich

$$m \sin. \pi \sqrt{\tfrac{2}{3}} \quad \text{und} \quad \pm\, m \cos. \pi,$$

die Gleichung $3a^2 + 2A^2 = m^2$ geben, und dafs folglich die Endpuncte der gröfsern Achsen dieser Aufrisse ebenfalls in einem elliptischen Umfange liegen, dessen Achsen der Richtung der Coordinaten t und u folgen.

§. 22. Gehen wir nun zu den Grundrissen der gleich-

beleuchteten Linien der Kugel über. Diese Linien selbst sind, wie wir früher sahen, durch das gleichzeitige Bestehen der beiden Gleichungen

$x^2+y^2+z^2-m^2=0$ und $z-x-y-m\sqrt{3}\sin.\pi=0$

dargestellt; ihr Grundriſs folglich durch jene Gleichung, welche wir durch Eliminirung der z erhalten, das ist durch

$$y^2+xy+x^2+(x+y)m\sqrt{3}\sin.\pi-\frac{m^2}{2}(1-3\sin.^2\pi)=0.$$

Übertragen wir auch die Coordinaten x und y in jene t und u (die mit ihren Winkeln 45 Grade bilden, den Ursprung aber gemein haben), wodurch $x=\frac{t-u}{\sqrt{2}}$ und $y=\frac{t+u}{\sqrt{2}}$ wird (Fig. 19), so erhalten wir für die Achsen ct und ue:

$$3t^2+u^2+2tm\sqrt{6}\sin.\pi-m^2(1-3\sin.^2\pi)=0$$

oder $u^2+(t\sqrt{3}+m\sqrt{2}\sin.\pi)^2-m^2\cos.^2\pi=0.$

Diese beiden Gleichungen bieten uns die Mittel, alle Eigenschaften der gesuchten Grundrisse zu entwickeln; allein bei der groſsen Ähnlichkeit, welche diese Gleichung mit jener der Aufrisse hat, würde dieſs nur eine Wiederholung seyn. Wir wollen uns daher begnügen, die vorzüglichsten Resultate dieser Untersuchung kurz anzuzeigen.

Es stelle der Kreis ucx, dessen Mittelpunct o ist, den Grundriſs der Kugel, die Geraden ox und oy die Achsen der x und y, jene ot, ou die der t und u vor. Man mache nunmehr $ug=uo$, und ziehe ehg, so wird oh die halbe kleinere, und ou die halbe gröſsere Achse des Grundrisses der gröſsten gleichbeleuchteten Linie (das ist des eignen Schattens der Kugel). Wird ferner hf ebenfalls gleich uo gemacht, und aus o mit dem Halbmesser of der Kreis ifi beschrieben, so ist sein Umfang

der geometrische Ort aller Brennpuncte der gesuchten Grundrisse, i, i aber sind die Grundrisse der beiden leuchtenden Puncte. Endlich gibt cs, einem Drittheile von co gleich gemacht, die halbe kleine, und die auf co aus s gezogene Senkrechte sp, gleich oh genommen, die halbe grofse Achse jener Ellipse, welche der Kreis ucx in einem einzigen Puncte c berührt, und zugleich die Achse der x und y tangirt. Alle kleinern Ellipsen fallen innerhalb diese, alle gröfsern haben mit dem Kreis ucx zwei Berührungspuncte gemein. Ihre Construction stimmt mit jener ihrer Aufrisse vollkommen überein.

§. 23. Bevor wir die Untersuchung der Grundrisse der gleichbeleuchteten Linien schliefsen, mag eine aus der Gleichung derselben fliefsende, sehr einfache Construction der beiden aus dem Mittelpuncte o der Kugel zu einer derselben gezogenen Tangenten hier Platz finden.

Fig. 20. Stellt AEC den Grundrifs der Kugel, und $BDKI$ jenen einer unter dem Einfallswinkel π gleichbeleuchteter Linien derselben vor, deren Gleichung

$$3t^2 + u^2 + 2tm\sqrt{6}\,\sin.\pi - m^2(1 - 3\,\sin.^2\pi) = 0,$$

OL und OK die beiden zu ihr aus O gezogenen Tangenten.

In den Berührungspuncten K, L mufs nothwendig $\frac{u}{t} = \frac{du}{dt}$ seyn, da dieser letztere Ausdruck die Tangente des Winkels LON vorstellt.

Die Gleichung der Ellipse BLK gibt differenzirt:

$$6t\,dt + 2u\,du + 2m\,dt\sqrt{6}\,\sin.\pi = 0 \quad \text{oder}$$

$$6t + \frac{2u\,du}{dt} + 2m\sqrt{6}\,\sin.\pi = 0;$$

und weil $\frac{du}{dt} = \frac{u}{t}$ ist:

$$3t^2 + u^2 + mt\sqrt{6}\,\sin.\pi = 0.$$

Für die Berührungspuncte L und K entsprechen also die

Coordinaten t und u der beiden Gleichungen

$$3t^2 + u^2 + 2tm\sqrt{6}\sin.\pi - \frac{m^2}{2}(1 - 3\sin.^2\pi) = 0$$

$$\text{und}\quad 3t^2 + u^2 + mt\sqrt{6}\sin.\pi = 0,$$

aus denen

$$t = \frac{m(1-3\sin.^2\pi)}{\sqrt{6}.\sin.\pi} \quad\text{und}\quad u = \frac{m\ .\ \text{cotang.}\pi}{\sqrt{\frac{1}{2}(3\sin.^2\pi - 1)}}$$

folgt.

Ist nun M der Mittelpunct der Ellipse BLK, MF die eine, und MP die andere halbe Achse, und man beschreibt aus M mit dem Halbmesser MP einen Viertelkreis MPG, halbirt MO in R, und schneidet aus R mit dem Halbmesser RM jenen Viertelkreis in r, so gibt die aus r auf OC gezogene Senkrechte rN die Abscisse $ON = t$ der gesuchten Berührungspuncte. In der That ist die halbe kleine Achse

$$MP = \frac{m}{\sqrt{3}}\cos.\pi \text{ und } RM = \frac{OM}{2} = \frac{a}{2}\ \S.\ 10. = \frac{m}{2}\sin.\pi\sqrt{\tfrac{2}{3}},$$

und aus den rechtwinkligen Dreiecken MrN und NrR

$$RN = \frac{Rr^2 + MR^2 - Mr^2}{2MR} = \frac{2RM^2 - Mr^2}{2RM} \quad\text{und}$$

$$ON = \frac{2RM^2 - Mr^2}{2RM} + RM$$

$$= \frac{4RM^2 - Mr^2}{2RM} = \frac{\frac{2m^2\sin.^2\pi}{3} - \frac{m^2\cos.^2\pi}{3}}{m\sin.\pi\sqrt{\frac{2}{3}}}$$

$$= \frac{3m^2\sin.^2\pi - m^2}{3m\sin.\pi\sqrt{\frac{2}{3}}} = \frac{m(3\sin.^2\pi - 1)}{\sin.\pi\sqrt{6}},$$

welcher Ausdruck von jenem $t = \frac{m(1-3\sin.^2\pi)}{\sin.\pi\sqrt{6}}$ nur in der Bezeichnung verschieden ist; wirklich liegt auch $ON = t$ auf der verneinenden Seite der Abscissen t. Um aber die Ordinate $u = NL$ zu verzeichnen, bedürfen wir des etwas verwickelten Ausdrucks

$$u = \frac{\cot.\pi}{\sqrt{\frac{1}{2}(3\sin.^2\pi - 1)}}$$

nicht; denn vereinigen wir r mit G, und verlängern rG bis an die Linie CO in T, so schneidet FT auf der verlängerten Senkrechten Nr in L den gesuchten Berührungspunct ab. Augenscheinlich wird durch diese Construction

$$GM : FM = 2N : LN,$$

und in diesem Verhältnisse müssen überhaupt jede zwei derselben Abscisse t entsprechende u der Ellipse und des auf der halben Achse $MP = MG$ als Halbmesser beschriebenen Kreises stehen.

Wären hingegen zu einer der Ellipsen, welche den Grund- oder Aufriſs einer der gleichbeleuchteten Linien der Kugel bilden, die Tangenten nach einer gegebenen Richtung zu ziehen, so dient hiezu die folgende, überhaupt auf jede gegebene Ellipse anwendbare Verzeichnung.

Fig. 21. Man ziehe aus M die Senkrechte MS auf die gegebene Richtung der Tangente, aus G die Senkrechte MV auf MG bis in den Punct V der MS, und aus F die gleichlaufende FQ mit GV, und dieser letztern gleich; vereinige M mit Q, und führe aus dem Durchschnitte R der MQ mit dem aus M mit dem Halbmesser $MP = MG$ beschriebenen Kreise die Senkrechte auf MQ, welche die verlängerte MP in T schneidet, so gibt die aus T auf MS gezogene Senkrechte TL die verlangte Tangente zur Ellipse FLP. Wirklich gibt diese Construction für den Berührungspunct L die Abscisse $t = \frac{b \text{ tang. } Q}{\sqrt{a^2 + b^2 \text{ tang }^2 Q}}$, wenn b die halbe kleine Achse MP, a die halbe groſse MF, und Q den Winkel vorstellt, welche die gegebene Tangentenrichtung mit der Achse $MP = b$ macht; und man kann sich leicht über-

zeugen, dafs dieser Werth von t der verlangten Bedingung entspricht.

§. 24. Für die wirkliche Verzeichnung der Aufrisse und Grundrisse der gleichbeleuchteten Linien der Kugel, Fig. 18, bleibt noch zu bemerken, dafs bei den erstern nur jene Ellipse ATV und die innerhalb derselben liegenden ganz, von den übrigen aber, bis zu der eignen Schattengränze der Kugel, nur die Theile wie $BGQN$ etc. zu zeichnen sind, welche von den Berührungspuncten BN begränzt werden, und ihre erhabene Seite gegen den Punct E gewendet haben, Fig. 19, während bei den Grundrissen die entsprechenden Ellipsen chm, und die innerhalb derselben liegenden ganz, von den übrigen aber nur die gegen den Punct t gewendeten Theile wie bnr darzustellen sind.

§. 25. Beschäftigen wir uns nunmehr mit der Bestimmung der gleichbeleuchteten Linien im *Pfuhle*, das ist in einer Oberfläche, die durch Umdrehung eines Halbkreises ABE, Fig. 22, um eine verticale Achse CD, die von dem verticalen Durchmesser AE des Kreises um eine Entfernung $ED = n$ absteht, erzeugt wurde. Nennen wir den Halbmesser des erzeugenden Kreises $ABEm$, so wird die Gleichung dieser Oberfläche augenscheinlich $(\sqrt{x^2 + y^2} - n)^2 + z^2 - m^2 = 0$, wenn wir den Ursprung der Coordinaten in dem Durchschnitte der aus dem Mittelpuncte des erzeugenden Kreises gezogenen Horizontalen mit der verticalen Umdrehungsachse, und die Achse der z in dieser letztern voraussetzen.

Diese Gleichung läfst sich bequemer auch so darstellen:

$$\sqrt{x^2 + y^2} - n - \sqrt{m^2 - z^2} = 0.$$

Nunmehr wird nach §. 4.:

$$F(x, y, z) = 0 = \sqrt{x^2 + y^2} - n - \sqrt{m^2 - z^2},$$

$$\frac{d \,.\, F(x,y,z)}{dx} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \frac{d \,.\, F(x,y,z)}{dy} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

$$\frac{d \,.\, F(x,y,z)}{dz} = \frac{z}{\sqrt{m^2-z^2}},$$

$$\frac{d \,.\, F(x,y,z)}{dx} + \frac{d \,.\, F(x,y,z)}{dy} = \frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

$$\left(\frac{d \,.\, F(x,y,z)}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d \,.\, F(x,y,z)}{dy}\right)^2 = 1;$$

die dort angeführte Bedingungsgleichung wird also:

$$\left[\frac{z}{\sqrt{m^2-z^2}} - \frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right]^2 - \left(\frac{1+z^2}{m^2-z^2}\right) 3 \sin.^2 \pi = 0$$

oder

$$\frac{z}{\sqrt{m^2-z^2}} - \frac{1+\frac{y}{x}}{\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}} - \frac{3\,m^2}{m^2-z^2} \sin.^2 \pi = 0,$$

und das gleichzeitige Bestehen dieser Gleichung mit jener

$$\sqrt{x^2+y^2} - n - \sqrt{m^2-z^2} = 0$$

charakterisirt die Natur der gleichbeleuchteten Linien im Pfuhle.

Die Gleichungen der Aufrisse und Grundrisse dieser Linien lassen sich nun leicht durch beziehungsweise Eliminirung von y oder z ausmitteln; allein dieſs würde uns auf ziemlich verwickelte Ausdrücke führen, während eine nähere Betrachtung der Bedingungsgleichungen uns ein einfaches Verfahren an die Hand gibt, aus den Grund- und Aufrissen der gleichbeleuchteten Linien einer mit dem Pfuhle concentrischen Kugel, deren Durchmesser CD jenem des erzeugenden Kreises gleicht, auch die Grundrisse und Aufrisse der gleichbeleuchteten Linien des Pfuhls abzuleiten.

Die Bedingungsgleichungen gleichbeleuchteter Linien dieser Kugel entspringen offenbar aus jenen des

Pfuhls, wenn wir darin $n = o$ setzen. Sie sind demnach

$$\sqrt{x^2 + y^2} - \sqrt{m^2 - z^2} = o \quad \text{und}$$

$$\frac{z}{\sqrt{m^2 - z^2}} - \frac{1 + \frac{y}{x}}{\sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}} - \frac{3\,m^2}{m^2 - z^2} = o,$$

von welcher die zweite mit der entsprechenden für den Pfuhl identisch ist. Da diese letztere nur z und den Quotienten $\frac{y}{x}$ als veränderliche Gröſsen enthält, so bleibt in ihr z ungeändert, wenn y und x in gleichem geometrischen Verhältnisse wachsen. Allein nur die Puncte der von der Achse CD ausgehenden horizontalen Linien haben die Eigenschaft, daſs für alle ihre Puncte $\frac{y}{x}$ beständig ist, folglich gibt jede aus der Achse CD zu irgend einem Puncte einer gleichbeleuchteten Linie der Kugel CbD gezogene Horizontale in ihrem Durchschnitte mit der Oberfläche des Pfuhls einen Punct der unter dem nämlichen Winkel beleuchteten Linie desselben.

Aus den beiden Gleichungen

$$\sqrt{x^2 + y^2} - \sqrt{m^2 - z^2} = o \quad \text{und}$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} - \sqrt{m^2 - z^2} - x = o$$

folgt ferner, daſs der Abstand $\sqrt{x^2 + y^2}$ eines jeden Punctes des Pfuhls von der Umdrehungsachse

$$= n + \sqrt{m^2 - z^2},$$

jener eines Punctes der Kugel CbD aber nur $\sqrt{m^2 - z^2}$ ist. Jeder Punct einer gleichbeleuchteten Linie der Kugel CbD liegt also mit einem Puncte der unter demselben Winkel beleuchteten Linie des Pfuhls in derselben Horizontalen, aus der Umdrehungsachse entspringenden Geraden, seine Entfernung von ihm ist beständig, und

dem Abstande des verticalen Durchmessers des erzeugenden Kreises von der Umdrehungsachse gleich.

Mit andern Worten: jede gleichbeleuchtete Linie der Kugel CbD, und die entsprechende des Pfuhls, liegen in einer Oberfläche, welche durch eine Gerade erzeugt wurde, die immer senkrecht auf die Umdrehungsachse CD längst einer dieser beiden Linien hingleitet, und diese letztern schneiden auf der erzeugenden Geraden Stücke ab, welche dem Abstande der Umdrehungsachse des Pfuhls von seinem erzeugenden Kreise gleichen.

§. 26. Da die Grundrisse horizontaler Linien diesen Linien gleichen, so wird jede aus dem Mittelpuncte des Grundrisses der Kugel CbD gezogene Gerade einem Puncte des Grundrisses der entsprechenden gleichbeleuchteten Linie des Pfuhls begegnen, welche von dem vorigen um dieselbe Gröſse n entfernt ist.

Da ferner jede nach irgend einem Verhältnisse getheilte Linie in ihrem Aufrisse (und überhaupt in jeder Projection) nach demselben Verhältnisse getheilt erscheint, so wird die von irgend einem Puncte einer gleichbeleuchteten Linie des Pfuhls auf die Achse CD gezogene Senkrechte sich zu jenem Theile derselben, der auf ihr durch die entsprechende gleichbeleuchtete Linie der Kugel und die Achse CD abgeschnitten wird, wie der Aufriſs der erstern dieser Linien zu jenem der letztern sich verhalten.

Stellen wir uns nämlich den Pfuhl und die erwähnte Kugel durch eine horizontale Ebene geschnitten vor, die zweien auf diesen Oberflächen liegenden gleichbeleuchteten Linien in zwei Puncten begegnet. Offenbar schneidet diese die Kugel und den Pfuhl in zwei concentrischen Kreisen.

Der Halbmesser des erstern ist die von dem Puncte

des Pfuhls auf die Achse CD gezogene Senkrechte, der Halbmesser des letztern jener Theil dieser Geraden, welcher durch die Kugel und die Umdrehungsachse CD auf ihr abgeschnitten wird.

Fig. 23. Der erste dieser Kreise sey durch amb, der andere durch AMB dargestellt; n, N seyen jene beiden Puncte, in denen sie von den gleichbeleuchteten Linien des Pfuhls und der Kugel begegnet werden, so daſs nO jene Senkrechte auf die Achse vorstellt, von der wir vorhin sprachen; Om endlich sey der Durchschnitt der Ebene der beiden Kreise mit jener der Aufrisse.

Ziehen wir np, NP senkrecht auf Om, so sind die Puncte P, p die Aufrisse jener N, n. Da die Geraden On und ON die Entfernungen der Puncte n, N von der Umdrehungsachse CD sind, so sind Op und OP die Aufrisse eben dieser Entfernungen; allein die Dreiecke Onp und ONP sind ähnlich, und geben die Proportion

$$On : ON = Op : OP \quad \text{oder}$$
$$Om : OM = Op : OP.$$

§. 27. Diese beiden merkwürdigen Beziehungen zwischen den Grundrissen und Aufrissen der gleichbeleuchteten Linien des Pfuhls und der gedachten Kugel bieten uns die Mittel zu der nachfolgenden einfachen Verzeichnung der erstern.

Fig. 22. Es stelle zuvörderst $DBCW$ den Aufriſs des Pfuhls vor, welcher aus den zwei erzeugenden Halbkreisen und einem Rechtecke zusammengesetzt ist, dessen verticale Seiten dem Durchmesser des erzeugenden Kreises, die horizontalen aber dem Abstande desselben von der Umdrehungsachse gleich sind.

Der Kreis $abcs$ sey der Aufriſs jener Kugel, die wir uns concentrisch mit dem Pfuhl, und von gleichem

Durchmesser mit seinem erzeugenden Kreise dachten. Man ziehe den verticalen Durchmesser *CD*, und die beiden *ac*, *bs*, so dafs die Winkel *aOC* und *bOC* 45° haben, und beschreibe die Ellipsen *prq*, *afg*, *mkn* etc. und Aufrisse der gleichbeleuchteten Linien der Kugel *CbDs*; eben so bestimme man den Aufrifs *bes* des eignen Schattens dieser Kugel, so wie jenen *i* des leuchtenden Punctes derselben. Nunmehr mache man *hl* gleich der vierten Proportionirten zu *h*7, *kl* und *hi*, so wird *l* der Aufrifs des leuchtenden Punctes des Pfuhls. Macht man ferner *lP* und *lQ* gleich der vierten Proportionirten zu *l*8, *lp*, *lL*, und zu *l*8, *lq*, *lL*, so sind die Puncte *P*, *Q* zwei Puncte der Aufrisse jener Linie des Pfuhls, welche mit dem Kreise der Kugel *Cbs* gleichbeleuchtet ist, dessen Aufrifs die Ellipse *prq* darstellt. Durch eben dieses Verfahren lassen sich alle Puncte der Aufrisse der gleichbeleuchteten Linien der Kugel in jenen des Pfuhls übertragen.

Die Puncte *R*, *V* etc., das ist jene Puncte der gesuchten Aufrisse, welche am nächsten oder am weitesten von der Horizontalen *BW* abstehen, entsprechen den in derselben horizontalen Linie mit ihnen liegenden Puncten *r*, *v* der Aufrisse der gleichbeleuchteten Linie der Kugel; diese letztern können nach §. 19. unabhängig von der übrigen Verzeichnung der Ellipsen bestimmt, und nach der vorhin gezeigten Methode in den Aufrifs des Pfuhls übertragen werden. Das nämliche gilt von den im §. 18. bestimmten Puncten, wie *m*, *s*, *b*, *n*, in denen die verschiedenen Ellipsen den Kreis *Casb* berühren, denen die Puncte *MSBN* im Pfuhle entsprechen.

Es ist hier nicht überflüssig, zu bemerken, dafs man bei dieser Verzeichnung eine jener Ordnungen befolgen mufs, deren man sich in ähnlichen Fällen zur Vermeidung der Verwirrung zu bedienen pflegt.

§. 28. Noch einfacher ist die Verzeichnung der Grundrisse der gleichbeleuchteten Linien des Pfuhls.

Fig. 24. Der Kreis *ABCD* stelle den Grundrifs des Pfuhls, der Kreis *XY* seine Grundfläche, *abcd* aber den Grundrifs jener Kugel vor, die wir concentrisch mit dem Pfuhle uns dachten.

Ziehen wir den Durchmesser *BD* gleichlaufend mit dem Grundrisse der Lichtstrahlrichtung, und *AC* senkrecht auf diese. Nach denen im Laufe dieser Abhandlung gegebenen Methoden seyen die halbe Ellipse *ace* (Grundrifs des eignen Schattens der Kugel), die elliptischen Bögen *fgh*, *lws* etc., und die ganzen Ellipsen *dnvt*, *pz* etc. etc., endlich der Grundrifs *i* des leuchtenden Punctes der Kugel verzeichnet. Alle Puncte 1, 2, 5, 6 dieser Ellipsen, so wie der leuchtende Punct *i* selbst, werden nun in den Grundrifs des Pfuhls in 3, 4, 7, 8, *I* übertragen, wenn man aus dem Mittelpuncte *O* die Geraden *O*1, *O*2, *O*5, *O*6, *Oi* etc. zieht, und auf ihnen Verlängerungen $\overline{13}$, $\overline{24}$, $\overline{37}$, $\overline{68}$, $\overline{iI}$ gleich *Ox* macht. Auch hier kann man durch die früher gezeigten Verfahren jene Puncte *a*, *f*, *l*, *s*, *h*, *c*, in denen die Grundrisse der gleichbeleuchteten Linien der Kugel den Kreis *adcb* berühren, so wie ihre Berührungspuncte 9, 10 etc. mit den beiden aus dem Mittelpuncte *O* zu ihnen gezogenen Tangenten, besonders bestimmen, und in *A*, *F*, *L*, *S*, *H*, *C*, 11, 12 übertragen.

Wären die gleichbeleuchteten Linien des Pfuhls auf andere, als die von uns angenommenen Ebenen zu entwerfen, oder wäre die Achse des Pfuhls bei unserm Coordinatensysteme nicht vertical, so bieten, wie man leicht sieht, die vorhin erwähnten Beziehungen zwischen den gleichbeleuchteten Linien des Pfuhls und der Hülfskugel gleichwohl die nöthigen Mittel zu ihrer Verzeichnung.

§. 29. Sind die Aufrisse und Grundrisse der gleichbeleuchteten Linien einer Oberfläche zu bestimmen, welche durch Umdrehung einer gegebenen Krummen um eine verticale Achse entstanden ist, deren Gleichung folglich durch $\sqrt{x^2+y^2}-fz=0$ oder $x^2+y^2-\varphi z=0$ dargestellt werden kann (wenn fz und φz was immer für Functionen von z bedeuten); so erhalten wir, als gleichzeitig mit dieser bestehende Bedingungsgleichung, nach §. 3.

$$\left(\frac{d.\varphi z}{dz}+2ax+2by\right)^2$$
$$-(1+a^2+b^2)\sin.^2\pi\left(\left(\frac{d.\varphi z}{dz}\right)^2+4x^2+4y^2\right)=0,$$

und die Elimination der z oder y aus diesen beiden Gleichungen gibt uns beziehungsweise jene des gesuchten Grund- oder Aufrisses.

So wie die Natur der erzeugenden Krummen durch die Beschaffenheit der φz gegeben ist, wird diese Elimination möglich, und bietet alle Mittel, die Eigenschaften der Grund- und Aufrisse der gleichbeleuchteten Linien auszuspähen. Unstreitig würde dann jede einzelne Oberfläche zu Resultaten führen, nicht minder wichtig als die von uns an der Kugeloberfläche und dem Pfuhl entdeckten. Für die Anwendung aber kann dieses Verfahren nicht zweckmäfsig seyn, wohl aber der Bearbeitung eines Lehrbuchs practischer Methoden zur Verzeichnung der gleichbeleuchteten Linien zur Grundlage dienen. Diese liegt jedoch aufser den Grenzen dieser Abhandlung.

Dagegen werden wir in dem folgenden Paragraphe eine allgemeine rein geometrische Methode abhandeln, um die unter einem gegebenen Winkel beleuchteten Linien der durch Umdrehung einer Linie von einfacher

Krümmung um eine verticale Achse entstandenen Oberflächen sowohl im Grund- als Aufrisse zu verzeichnen.

§. 30. Unstreitig ist unser Zweck erreicht, wenn wir den Punct eines jeden beliebigen Meridians der gegebenen Oberfläche zu bestimmen wissen, an welchem die Lichtstrahlrichtung mit der die Oberfläche tangirenden Ebene den angenommenen Einfallswinkel bildet.

Diese tangirende Ebene wird durch zwei auf einander senkrechte Gerade bestimmt, deren eine Tangente zu dem Meridiane an dem zu suchenden Puncte, die andere aber durch eben diesen Punct auf die Ebene des Meridians senkrecht geführt ist.

Durch die Richtung der erstern dieser beiden Geraden für einen gegebenen Meridian wird also der gesuchte Punct bestimmt, und ergibt sich durch eine mit ihr gleichlaufend gezogene Tangente zu der erzeugenden Krummen in demselben Meridiane. Es handelt sich also nur darum, den Winkel zu finden, den die zu einem beliebigen Meridiane gezogene Tangente mit der Umdrehungsachse machen muſs, wenn die durch sie und eine darauf senkrechte und horizontale Gerade geführte Ebene mit der gegebenen Lichtstrahlrichtung den verlangten Einfallswinkel bilden soll.

Fig. 25. Stellen wir uns durch den Berührungspunct S der gesuchten Tangente mit irgend einem Meridiane BSC, der mit der Ebene der Aufrisse den Winkel xOC macht, eine horizontale Ebene geführt vor, deren Durchschnitt mit jener des Meridians FE sey. Aus einem beliebigen Puncte E der FE sey DE gleichlaufend mit dem Grundrisse der Lichtstrahlrichtung, und aus F die Senkrechte auf EF gezogen. Ferner sey der Winkel EDG jenem gleich gemacht, den die Lichtstrahlrichtung mit der horizontalen Ebene macht, und EG senkrecht auf DE, EH aber senkrecht auf EF, und gleich

EG; der Winkel GDL endlich dem gegebenen Einfallswinkel gleich gemacht, zu DG und FH als Durchmesser zwei Kreise DGL und FHE geführt, und die Sehne HM jener GL gleich genommen.

Lassen wir nun den Kreis FHE um seine Sehne FE sich so bewegen, daſs er aus der horizontalen in die verticale Lage kommt, wodurch der Punct H vertical ober E in H', der Punct M vertical unterhalb der Linie EF in M' zu liegen kommt.

Da $EG = EH$, und die rechtwinkligen Dreiecke DEG und DEH' überdieſs die Kathede DE gemein haben, so ist $DH' = DG$, der Winkel GDE jenem EDH' gleich, und DH' die wirkliche Lichtstrahlrichtung.

Da DF horizontal und senkrecht auf FE ist, so ist sie es auch auf die Ebene FEH' oder $FM'H'$; die Ebene DFM' ist folglich ebenfalls senkrecht auf jene $FM'H'$; und da nach unserer Construction die $H'M'$ auf FM', den Durchschnitt der beiden Ebenen DFM' und $FH'M'$, senkrecht ist, so ist sie es auch auf die Ebene DFM', und $H'M'D$ ein rechter Winkel. Allein $H'M' = HM$ wurde $= H$ gemacht, also haben die rechtwinkligen Dreiecke GDL und $H'DM'$: $HD = GD$, $H'M' = GL$, decken sich also, und daher ist der Winkel $H'DM'$ jenem Einfallswinkel GDL gleich. Nun ist aber $H'DM'$ der Winkel, welchen die Lichtstrahlrichtung HD mit der durch den Berührungspunct T auf die Ebene des Meridians gezogenen Senkrechten FE bildet, und FM' in der Ebene des Meridians gelegen. Wird also FM' zugleich auch Tangente zu dem Meridiane, so sind alle unsere Forderungen erfüllt.

Zieht man daher eine Tangente PQ zu einem Meridiane der gegebenen Oberfläche, welche mit der horizontalen Achse den aus unserer Construction sich ergebenden Winkel $M'FE = MFE$, oder mit der Umdre-

hungsachse Oz sein Complement DFM bildet, so ergibt sich dadurch seine Höhe z ober der Ebene der Grundrisse, und seine Entfernung von der Umdrehungsachse Oz. Sein Grundriſs wird auf der Geraden OC bestimmt, indem man $OR = KI$ macht; sein Aufriſs endlich auf der Geraden KI, indem man aus R die Senkrechte RF auf KI zieht.

Indem wir dieses Verfahren für mehrere Meridiane der Oberfläche, mit Beibehaltung desselben Einfallswinkels, wiederholen, ergeben sich nach und nach die Puncte der unter diesem Winkel gleichbeleuchteten Linie.

Es versteht sich von selbst, daſs, wenn zu demselben Meridiane mehrere Tangenten unter derselben Richtung möglich sind, auch jedem der dadurch entstehenden Berührungspuncte eine besondere gleichbeleuchtete Linie entspricht. Manche Bemerkungen, durch welche die wirkliche Verzeichnung der gesuchten Linien nicht selten abgekürzt wird, liegen theils in dem angegebenen Verfahren selbst, theils dringen sie sich dem denkenden Zeichner von selbst auf.

§. 31. Es erübrigt uns noch, von dem Grund- und Aufrisse der gleichbeleuchteten Linien jener Oberflächen zu sprechen, welche durch Umdrehung einer Krummen von einfacher Krümmung um eine horizontale oder schiefe Achse entstanden sind. Im ersten Falle kann die Verzeichnung derselben, wenn die Umdrehungsachse noch überdieſs mit der Richtung der x oder der y gleich läuft, nach dem, was wir bisher gesagt haben, keiner Schwierigkeit unterliegen, wenn man, was dort vertical war, hier horizontal und umgekehrt nimmt.

Schwieriger hingegen ist diese Verzeichnung, wenn die Umdrehungsachse schief gegen die Achsen des Coordinatensystems steht. Zwar könnte man hier die Grund-

und Aufrisse der gleichbeleuchteten Linien, nach dem angeführten Verfahren, vorläufig in einem senkrechten Coordinatensysteme verzeichnen, dessen z mit der Umdrehungsachse übereinkommen, und dann die Puncte dieser Projectionen nach den bekannten Regeln in die zur Verzeichnung bestimmten Projectionsebenen übertragen.

Allein diefs Verfahren würde zu weitschweifig werden. Einfacher geht man zu Werke, wenn man sich durch die Umdrehungsachse mehrere Meridiane vorstellt, auf jeden derselben eine Senkrechte zieht, durch diese Ebenen führt, welche mit der Lichtstrahlrichtung den verlangten Einfallswinkel bilden, und endlich nach den bekannten Methoden tangirende Ebenen gleichlaufend mit diesen zu der Oberfläche führt, deren Berührungspuncte der unter dem angenommenen Einfallswinkel beleuchteten Linie der Oberfläche angehören.

Diese Construction unterliegt für den nur etwas geübten darstellenden Geometer keinem Anstande; doch wollen wir in dem Folgenden den schwierigsten Theil derselben, das ist die Verzeichnung jener Ebene, welche durch eine gegebene Gerade geht, und mit der Lichtstrahlrichtung einen verlangten Winkel macht, anführen.

Fig. 26. Es begegne die Gerade, durch welche die Ebene zu führen ist, jener der Grundrisse in A unter dem Winkel AGH, und ihr Grundrifs sey AG; der Grundrifs der Lichtstrahlrichtung sey in AB, und BAC der Winkel, den sie mit der Ebene der Grundrisse macht; CAE jener, unter welchem die zu bestimmende Ebene die in AB projectirte Gerade schneiden soll.

Ziehen wir aus einem beliebigen Puncte G der AG auf AB die Senkrechte, aus B die Senkrechte auf AC, und aus H jene AL und AN auf AB und AG, und machen $AN = AL$, so wird durch diese Construction der Durchschnittspunct H der Geraden AH mit GN sich so

ergeben, dafs er in der durch BL auf AC geführten senkrechten Ebene zu liegen kommt, wenn wir uns die Dreiecke ANG und ABL vertical aufgestellt vorstellen: Denken wir uns nun AC als die Achse eines rechten Kegels, dessen Spitze in A liegt, und dessen Grundfläche ein in der auf AC durch C geführten senkrechten Ebene liegender Kreis vom Halbmesser CE ist, so bilden augenscheinlich die beiden durch die Gerade AH zu diesem Kegel geführten tangirenden Ebenen mit der Achse desselben, das ist mit der Geradeu AC, den verlangten Winkel. Diese beiden Ebenen sind daher zu construiren.

Offenbar müssen sie durch die beiden Berührungspuncte der aus H zu der Grundfläche des Kegels gezogenen Tangenten gehen; die Lage dieser beiden Puncte bestimmt daher, im Vereine mit der Geraden AH, unsere gesuchten Ebenen. Lassen wir nun die Grundfläche des Kegels, und mit ihr die beiden Tangenten, wie die Gerade GB sich bewegen, bis sie in die Ebene der Grundrisse zu liegen kommen, so fällt der Mittelpunct C der erstern in D, wenn wir $BD = BC$ machen, der Punct H in P, wenn wir aus F die Senkrechte PQ auf GB ziehen, und OP der Hypothenuse OQ eines rechtwinkligen Dreieckes gleich machen, dessen Catheten OI und IH sind; die beiden Tangenten endlich bleiben Tangenten PM und PF, aus P zu dem Kreise vom Halbmesser $DM = CE$ beschrieben. Die Grundrisse der beiden Berührungspuncte M und F müssen nothwendig in der aus ihnen auf GB gezogenen Senkrechten liegen, und finden sich, wenn wir BM und Bn gleich RM und SF machen, in den Durchschnitten der aus m und n mit BG gezogenen Gleichlaufenden und den Senkrechten MR und SF, in T und V. Offenbar haben nun die beiden durch AH (die Berührungspuncte, deren Grundrisse T und V sind) geführten Ebenen mit jenen der Grund-

risse die Puncte gemein, welche die Verlängerung in IT und IV in ihren Durchschnitten mit BG geben; diese beiden Puncte a und γ geben daher, mit A vereinigt, in Aa und $A\gamma$ die beiden horizontalen Tracen der gesuchten Ebenen.

Die Bestimmung ihrer Aufrifs-Tracen, oder ihres Durchschnittes mit der Ebene der Aufrisse, unterliegt nunmehr nicht der geringsten Schwierigkeit.

§. 32. Die von uns im Laufe dieser Abhandlung gegebenen analytischen sowohl als rein geometrischen Verfahrungsarten zur Bestimmung der gleichbeleuchteten Linien, finden ihre Anwendung auch bei Oberflächen, welche ihre hohle Seite dem Lichtstrahle zuwenden; da es auch bei diesen sich nur darum handelt, jene Puncte derselben auszumitteln, von welchen die Lichtstrahlrichtung mit der tangirenden Ebene den verlangten Einfallswinkel macht.

Nur mufs man nicht unterlassen, den Schatten im Innern der Oberfläche, von ihrem Rande geworfen, besonders zu construiren, um durch ihn die gleichbeleuchteten Linien gehörig abzugränzen.

Fig. 27. Für den Aufrifs der hohlen Halbkugel $ABCDE$, unter der gewöhnlichen Lichtstrahlrichtung, wird dieser Schatten eine halbe Ellipse, deren eine halbe Achse der unter 45° mit der Achse der x und z gezogene Halbmesser OC, die andere aber OF ein Drittel eben dieses Halbmessers ist. Von den gleichbeleuchteten Linien derselben sind dann nur die Theile $1a$, $2b$, $3c$, $4D$, $5e$, ... zu verzeichnen, welche der angeführte Schatten abschneidet. Auch hier kann man die Berührungspuncte der elliptischen Bögen mit dem Umfange des Kreises CDF, den leuchtenden Punct etc., besonders nach denen in den §. 14. und §. 9. angeführten Verfahren bestimmen.

II.

Berichtigung meiner Ansicht über die Theorie der Parallellinien;

vom

Dr. und Prof. *Joseph Knar.*

In einem kleinen Aufsatze, welchen das vierte Heft des dritten Bandes dieser Zeitschrift enthält, habe ich versucht, meine Ansicht über die Theorie der Parallellinien darzulegen. Allein ich bin durch sehr schätzbare Bemerkungen, welche mir darüber von mehreren Seiten zugekommen sind, überzeugt worden, daſs ich mich dort nicht durchgängig so unzweideutig ausgedrückt habe, um bedeutenden Miſsverständnissen vorzubeugen: vielmehr konnte vorzüglich die Nichtunterscheidung der entgegengesetzten Richtungen einer geraden Linie und die Unbestimmtheit in dem Begriffe des Dazwischenliegens zu Folgerungen aus meiner aufgestellten Erklärung des Winkels Veranlassung geben, welche nach meiner Ansicht durchaus nicht darin liegen sollen. Ich halte es daher für nothwendig, die erforderliche Berichtigung hier beizufügen.

Meine Absicht ging in jenem Aufsatze zunächst dahin, die Ursache zu erforschen, warum bisher noch keine, völlig genügende, Theorie der Parallellinien gefunden worden sey. Hiebei ging ich von dem, schwerlich zu verwerfenden, Satze aus, daſs sich in einer nicht empirischen Wissenschaft, wie die Mathematik ist, die Eigenschaften der, darin zu betrachtenden, Gegenstände aus ihren Erklärungen vollständig herleiten lassen müssen, daſs daher, sobald eine solche vollständige Herleitung nicht möglich seyn soll, nothwendig in einer, zum

Grunde liegenden, Erklärung ein Mangel unterlaufe. Bei der Theorie der Parallellinien werden nun zunächst nur die Erklärungen einer geraden Linie und eines (geradlinigen) Winkels gebraucht: diese beiden Erklärungen müssen daher vor Allem auf das Sorgfältigste untersucht werden. Sollte sich darin kein wesentlicher Mangel finden; so wird die Schuld des beständigen Miſslingens aller Versuche zur Vervollständigung jener Theorie lediglich an den bisherigen Bearbeitern liegen, und man darf sicher erwarten, daſs durch Fortsetzung dieser Versuche endlich eine vollständige Theorie zum Vorscheine kommen werde: trifft man hingegen in einer von jenen beiden Erklärungen einen wesentlichen Mangel an; so muſs vor allem andern diesem Mangel abgeholfen werden, weil erst dann ein günstiger Erfolg zu hoffen seyn kann.

Von der, allgemein üblichen, Erklärung der geraden Linie glaube ich nicht, daſs man derselben mit Recht einen Vorwurf machen dürfe, worauf sich die Unmöglichkeit einer, völlig befriedigenden, Theorie der Parallellinien gründen könnte. Nicht so vorwurfsfrei aber scheint mir die Erklärung des Winkels zu seyn. Den Winkel, als die Neigung zweier, in einem Puncte zusammentreffender, gerader Linien, zu bestimmen, kann nicht gestattet seyn, weil dabei erst angegeben werden müſste, was man unter *Neigung* zu verstehen habe, da doch die Worte *Winkel* und *Neigung* eigentlich einerlei bezeichnen, und daher durch einander wechselseitig nicht erklärt werden können. Auch die andere noch übliche Erklärung, nämlich: *Winkel ist die Abweichung der Richtungen zweier, in einem Puncte zusammentreffender* (besser: *von einem Puncte ausgehender*) *gerader Linien*, befriediget nicht vollkommen, weil sie, wenn man nicht dem Worte *Abweichung* eine Bedeutung unterle-

gen will, welche sich erst mit Hülfe des Begriffes eines Winkels angeben läſst, über die Beschaffenheit des Winkels eigentlich nichts weiter aussagt, als daſs er durch zwei verschiedene, von einem Puncte ausgehende, gerade Linien entstehe, ohne irgend eine Eigenschaft desselben anzugeben, woraus sich alle übrigen ableiten lassen könnten. Nun muſs jede Erklärung die Vorstellung, welche wir uns von dem zu erklärenden Gegenstande machen, ausdrücken. Geschieht dieser Ausdruck so vollständig, daſs sich daraus *alle* Eigenschaften des Gegenstandes ableiten lassen; so ist die Erklärung vollkommen genügend, und bedarf keines weiteren Zusatzes; ist hingegen jener Ausdruck noch unvollständig; so muſs man denselben ergänzen, d. h. es muſs ein bestimmter Satz ausgesprochen werden, welcher uns über die Beschaffenheit der Vorstellung von dem erklärten Gegenstande erst gänzlich aufklärt. Es ist übrigens der Wesenheit nach ganz gleichgültig, ob man einen solchen Satz in die Erklärung selbst verflechten, oder, was vielleicht zuweilen zur Deutlichkeit beitragen dürfte, abgesondert hinstellen will; nur muſs man auch im letzteren Falle nicht auſser Acht lassen, daſs er stets nur als Vervollständigung der Erklärung angesehen werden dürfe.

Wenn man die obige Erklärung des Winkels aus diesem Gesichtspuncte betrachtet, wird man leicht zugeben, daſs sie nicht der vollständige Ausdruck der Vorstellung sey, welche wir uns von einem Winkel machen. Die Nothwendigkeit einer Ergänzung ist zwar bisher noch nicht ausdrücklich anerkannt worden: deſswegen war sie aber nicht weniger vorhanden und fühlbar, wie man sich sogleich überzeugen kann, wenn man nur bemerken will, daſs in keinem Lehrgebäude der Geometrie bei irgend einem Satze eine Berufung auf jene Erklärung Statt findet; woraus sich ergibt, daſs die Eigenschaf-

ten des Winkels nicht aus der aufgestellten Erklärung desselben hergeleitet werden konnten, sondern dafs dazu ein anderer Satz, als Grundlage, erforderlich war, welcher freilich nicht immer ausdrücklich angegeben wird.

Gesteht man die Nothwendigkeit einer Ergänzung zu der Erklärung des Winkels zu, dann kömmt es nur noch darauf an, zu bestimmen, worin dieselbe bestehen soll. Man hat dafür bisher allgemein folgenden Satz gebraucht: *Jeder Winkel kann aus den beiden Winkeln bestehend gedacht werden, welche seine Schenkel mit einer, zwischen ihnen, durch den nämlichen Punct, und in der nämlichen Ebene gezogenen, Geraden bilden.* Dieser Satz ist nur ein einzelner Fall eines andern, in weit gröfserer Allgemeinheit wahren, Satzes. Was soll uns nun abhalten, sogleich diesen allgemeineren Satz auszusprechen, und zur Grundlage der Theorie des Winkels anzunehmen? Wodurch sollen wir gezwungen werden, da schon eine Annahme nothwendig ist, uns auf jenen einzelnen Fall zu beschränken? Diese Beschränkung kann nur in dem Umstande ihren Grund finden, dafs man vielleicht schon mit Hülfe jenes, in dem angegebenen Satze enthaltenen, einzelnen Falles in den Stand gesetzt ist, die Eigenschaften des Winkels vollständig herzuleiten, und das darauf beruhende Gebäude der Geometrie zu errichten. Dieser Umstand ist aber keineswegs eingetroffen, denn bisher ist es noch Niemanden gelungen, aus jenem beschränkten Satze die, darauf beruhende, Theorie der Parallellinien mit Strenge und Consequenz abzuleiten, obgleich sich seit *Euklid* so viele und so ausgezeichnet scharfsinnige Männer, welchen man oft in andern, ungleich schwieriger zu behandelnden, Zweigen der Mathematik die wichtigsten Entdeckungen verdankt, mit dieser Ableitung beschäftiget haben. Hieraus folgt, dafs Niemand, der überhaupt mit

Strenge und Consequenz in der Mathematik zu Werke gehen will, die Annahme jenes, nur angedeuteten, allgemeineren Satzes, als Ergänzung zur Erklärung des Winkels, zurück zu weisen ein Recht habe, wenn er nicht entweder auch aus dem angegebenen, eingeschränkteren Satze die Theorie der Parallellinien vollständig abzuleiten vermag, oder wenigstens beweisen kann, daſs diese Ableitung, obgleich sie bisher noch nicht gelungen ist, dennoch möglich seyn müsse. Daſs keiner von diesen beiden Bedingungen bisher Genüge geleistet wurde, ist wohl bekannt genug: ich glaube aber sogar zu der Behauptung einen Grund zu haben, daſs es gar nicht möglich sey, aus jenem beschränkten Satze die Theorie der Parallellinien vollständig herzuleiten.

Durch die Annahme jenes Satzes wird nämlich der Winkel allerdings als eine Gröſse, und daher als ein Object der Mathematik dargestellt. Allein mit Hülfe desselben lassen sich nur Winkel unter einander vergleichen, welche entweder einerlei Scheitel haben, oder wenigstens als solche gedacht werden können, kurz Winkel, deren Scheitel *gegeben* sind. Will man aber von Winkeln handeln, deren Scheitel noch nicht gegeben sind; so reicht jener Satz durchaus keinen Anhaltspunct dar, um darüber irgend etwas auszusagen. Es lassen sich also daraus nur *einige*, nicht aber *alle* Eigenschaften der Winkel herleiten. Dieſs zeigt sich bei der Theorie der Parallellinien sehr deutlich. Werden zwei gerade Linien von einer dritten dergestalt geschnitten, daſs zwei innere Winkel zusammen genommen zweien rechten gleich sind; so sind die Scheitel aller dadurch entstehenden Winkel bereits gegeben, und es läſst sich daher ganz leicht erweisen, daſs sich jene zwei Linien nicht schneiden können. Sind hingegen zwei innere Winkel kleiner, als zwei rechte; dann sollen jene Li-

nien unter einander selbst einen Winkel bilden, welcher die beiden andern zu zwei rechten Winkeln ergänzt, und dessen Scheitel noch nicht gegeben ist: hier tritt also wirklich der Fall ein, in welchem der obige eingeschränkte Sa z nicht mehr zureicht, und deſswegen ist es nicht möglich, daraus den so berühmten eilften Grundsatz *Euklid's* vollständig zu erweisen.

Man wird dagegen hoffentlich nicht einwenden, daſs man anstatt des eilften *Euklid'*schen Grundsatzes leicht einen andern Satz aufstellen könnte, aus welchem, wenn er erwiesen wäre, sich die Theorie der Parallellinien ohne Schwierigkeit ableiten lieſse, und bei welchem die Scheitel aller Winkel gegeben sind, z. B. den Satz, daſs die drei Winkel eines jeden Dreieckes zusammen genommen zweien rechten Winkeln gleich seyen. Denn eben der Umstand, daſs ein solcher Satz und der eilfte Grundsatz *Euklid's* dergestalt von einander abhängen, daſs sich jeder von ihnen aus dem anderen herleiten läſst, beweist hinlänglich, daſs die Schwierigkeit, oder vielmehr Unmöglichkeit, welche sich bei dem Beweise des einen darstellt, auch bei dem anderen vorhanden seyn müsse, und nur auf irgend eine Art verdeckt werde.

Bisher habe ich zu erweisen versucht, daſs es zur vollständigen Begründung der Theorie der Parallellinien nothwendig sey, anstatt des oben angegebenen Satzes eine allgemeinere Annahme für die Beschaffenheit des Winkels zu machen: sollte man aber auch die *Nothwendigkeit* einer solchen Annahme nicht zugeben wollen, so kann man doch die *Zulässigkeit* derselben so lange nicht bestreiten, bis man nicht einer von den beiden früher aufgestellten Bedingungen Genüge geleistet haben wird. Ich will nun diesen allgemeineren Satz selbst nach meiner Ansicht darzustellen suchen.

Die gerade Linie, welche von einem Puncte zu ei-

nem anderen gezogen werden kann, bezeichnet die *Richtung* von dem ersteren gegen den letzteren Punct: die Richtung von dem letzteren gegen den ersteren Punct heifst der vorigen *entgegengesetzt*. Denkt man sich nun die gegenseitigen Richtungen zweier Paare von Puncten der nämlichen geraden Linie, so werden diese Richtungen paarweise bald zusammen fallen, und dann beständig mit einander vereinigt bleiben, so weit man dieselben auch fortgesetzt sich denken mag. Jede gerade Linie bezeichnet daher nur zwei einander entgegengesetzte Richtungen, und es ist ganz gleichgültig, ob man dieselben von dem nämlichen, oder von verschiedenen Puncten anfangend sich vorstellen will, da ohnehin auf die Länge der Linie dabei keine Rücksicht genommen wird. Gehen aber von einem Puncte zwei verschiedene gerade Linien aus, so sagt man, ihre Richtungen weichen von einander ab. Diese Abweichung kann, wenn man gleich von jeder Linie nur eine ihrer Richtungen betrachtet, auf zweifache Weise genommen werden. Denn jede gerade Linie hat zwei Seiten, daher kann auch die Abweichung der Richtung einer geraden Linie von einer zweiten entweder von der einen oder der andern Seite der letzteren betrachtet werden. Es entstehen also durch die Abweichung zweier Richtungen jederzeit nicht blofs ein, sondern zwei Winkel. Derjenige von diesen Winkeln, bei welchem die Abweichung eines Schenkels auf der nämlichen Seite des andern genommen wird, auf welcher jener Schenkel selbst liegt, heifst der concave (hohle), der andere aber der convexe (erhabene oder erhobene) Winkel. Es ist bekannt, dafs man in der Regel den hohlen Winkel zu verstehen habe, wenn es nicht entweder ausdrücklich bemerkt wird, oder sich von selbst aus der Natur der Sache ergibt, dafs der andere Winkel gemeint sey.

Setzen wir nun, dafs von der nämlichen Richtung einer geraden Linie A, in der nämlichen Ebene, jedoch auf verschiedenen Seiten derselben, die Richtungen zweier andern geraden Linien, B und C, abweichen. In einem solchen Falle können die Richtungen B und C selbst wieder von einander abweichen. Man kann sich daher vorstellen, dafs die Richtung C zuerst nach A, und dann die A noch weiter nach B abgewichen sey, so dafs die Abweichung der B von C entsteht, indem zu der Abweichung der A von C noch die Abweichung der B von A hinzu kömmt, oder mit andern Worten, man nimmt die Abweichung der B von C für so grofs an, als die Abweichungen der A von C und der B von A zusammen genommen. Dieser Satz gibt die Beschaffenheit der Vorstellung an, welche wir von der Abweichung der Richtungen gerader Linien haben, und hieraus müssen sich alle übrigen Eigenschaften des Winkels herleiten lassen, wenn er auch, wie man leicht selbst sehen wird, vollkommen zureichend ist, wenn er nur in seiner ganzen hier ausgesprochenen Allgemeinheit genommen, und nicht blofs auf den, schon oben angeführten, einzelnen Fall beschränkt wird.

Dem Gesagten gemäfs kann die Erklärung des Winkels sammt ihrer, für nothwendig befundenen, Ergänzung auf folgende Art ausgedrückt werden: *Die Abweichung der Richtungen zweier, von einem Puncte ausgehender, gerader Linien bildet einen Winkel; die abweichenden Linien selbst heifsen die Schenkel desselben. Diese Abweichung stellt man sich dergestalt vor, dafs sie auch, nach und nach entstanden, gedacht werden kann, wenn von dem einen Schenkel in der nämlichen Ebene eine andere gerade Linie, und von dieser auf der andern Seite derselben erst der zweite Schenkel abweicht.*

Ich habe bis jetzt hoffentlich deutlich genug ge-

zeigt, wie nach meiner Ansicht die Vordersätze, welche der Theorie der parallelen Linien zum Grunde liegen, vorgetragen werden sollen. Man mag nun diese Ansicht für richtig anerkennen, oder nicht; man wird sie wenigstens nicht so leicht mifsverstehen können. Die Folgerungen daraus sind so einfach, dafs sie Jedermann leicht selbst ableiten kann.

Es bleibt mir nur noch übrig, die Bedeutung des Ausdruckes: *etwas liege zwischen den Schenkeln eines Winkels*, anzugeben, um die daraus entsprungenen Irrungen aufzuklären.

Man sagt, etwas liege in einer Ebene zwischen zwei geraden Linien, wenn es auf derjenigen Seite einer jeden von diesen zwei Geraden liegt, auf welcher die andere gelegen ist. Hieraus ist es leicht, zu beurtheilen, ob ein Punct oder eine Linie zwischen den Schenkeln eines Winkels liege, oder nicht. Will man nun behaupten, dafs eine von den Richtungen einer geraden Linie zwischen den Schenkeln eines Winkels liege; so ist es offenbar nicht genug, wenn nur ein Stück jener Geraden dazwischen liegt, weil sonst die Richtung, weiter fortgesetzt, immer noch aufserhalb fallen könnte, sondern diese Richtung mufs, von irgend einem Puncte angefangen, man mag sie so weit fortgesetzt denken, als man will, ganz zwischen den Schenkeln des Winkels liegen.

In der eben erklärten Bedeutung sind diese Ausdrücke auch in meiner früheren, hieher gehörigen, Abhandlung gebraucht worden; wobei ich nur noch bemerken mufs, dafs ich unter dem Ausdrucke: *eine gerade Linie sey zwischen den Schenkeln eines Winkels gezogen*, verstanden haben wollte, eine ihrer Richtungen liege dazwischen, was freilich sehr leicht mifsverstanden werden konnte, da man nicht immer diese bestimmte Be-

deutung mit jenem Ausdrucke verbindet, worin eben auch die Ursache liegt, aus welcher ich jenen Ausdruck bei der vorhergehenden Darstellung meiner Ansicht gänzlich übergangen habe. Aus diesem Gesichtspuncte betrachtet ist es zwar allerdings wahr, daſs jede Seite eines Dreieckes zwischen den Schenkeln des gegenüber stehenden Winkels liege: allein keine der Richtungen jener Seite kann dazwischen liegen, daher fallen alle Folgerungen von selbst weg, welche man unter dieser Voraussetzung aus meiner, in der früheren Abhandlung aufgestellten, Erklärung des Winkels ziehen wollte. Deſswegen erlaube ich mir auch nicht, die Geduld des Lesers noch ferners in Anspruch zu nehmen, um diese Folgerungen genauer zu betrachten, und das darin liegende, nach meiner Ansicht Irrige aufzudecken.

III.

Über die Grundgesetze der Wärme, und über das wahre Maſs der Temperaturen;

von

Joseph Schitko,

k. k. Bergrath und Professor zu Schemnitz.

Die Ausdehnung der Körper durch die Wärme wird als eine Grundwirkung der Wärmethätigkeit betrachtet. Allein das allgemeine Gesetz, nach welchem sich diese Wirkung richtet, ist noch immer nicht bekannt. Die Kenntniſs dieses Gesetzes muſs uns aber um so wichtiger erscheinen, als nicht nur die Theorie über die Wärme, sondern auch die Thermometer, die Höhenmessungen durch Barometer, die astronomische Strah-

lenbrechung, die Kraft der Dämpfe, und die Wärme-Correctionen bei verschiedenen Messungen davon abhängen. Die Wichtigkeit dieses Gegenstandes ist durch die vielfältigen Bemühungen, die man bisher darauf verwendete, ohnehin anerkannt. Als ich eine Untersuchung über die Kraft der Dämpfe anstellte, wurde ich bald gewahr, daſs es dabei vor Allem auf eine genaue Bestimmung der Ausdehnung durch die Wärme, und auf ein richtiges Maſs der Temperaturen ankomme; und ich fand mich genöthigt, meine Untersuchung erst auf diese Gegenstände zu richten, bevor ich die Erforschungen über die Dämpfe fortsetzen konnte. Das, was ich dabei gefunden zu haben glaube, will ich hiemit zu weiterer Beurtheilung mittheilen. Ich will mich aber in die Darstellung von allen dem, was bisher in dieser Hinsicht geleistet wurde, nicht einlassen. Man findet es ohnehin in dem neu bearbeiteten physikalischen Wörterbuche von *Gehler* zusammengestellt. Es wird für die gegenwärtige Absicht zureichen, wenn ich hier nur andeute, daſs man im Allgemeinen die Ausdehnung der Körper durch die Wärme als gleichförmig, und mit den Unterschieden der Temperaturen verhältniſsmäſsig betrachte; daſs sich auf diese Annahme die Eintheilung der Thermometer-Scalen in gleiche Grade gründe; daſs es aber nicht an Beobachtungen fehle, die eine Ungleichheit in der Ausdehnung zu beweisen scheinen, und daſs schon *Dalton* die Hypothese aufstellte, nach welcher alle permanent elastischen Flüssigkeiten sich in einer geometrischen Progression ausdehnen sollen, wenn die Wärme in einer arithmetischen wächst; dagegen sollen alle homogenen Flüssigkeiten vom Puncte des Gefrierens oder ihrer gröſsten Dichtigkeiten sich um Gröſsen ausdehnen, welche sich wie das Quadrat der Temperaturen verhalten.

Wenn man berechtigt wäre, die Ausdehnung eines gegebenen Körpers als gleichförmig anzunehmen: so dürfte man nur die durch Versuche gefundene Raumvergrösserung durch die Anzahl der Wärmegrade, bei der sie Statt gefunden hat, dividiren, um die Raumvergrösserung für einen Grad zu erhalten. Würde man finden, dafs sich ein gegebener Körper, dessen Rauminhalt beim natürlichen Gefrierpuncte gleich Eins gesetzt wird, bei dem ersten Wärmegrade um den $\frac{1}{m}$ ten Theil seines ursprünglichen, zur Einheit angenommenen Raumes ausdehnt: so liefse sich dessen Volumen bei y Wärmegraden über den Gefrierpunct aus der Formel $1 + \frac{y}{m}$ berechnen. Allein die Versuche, die man über die Ausdehnung fester, tropfbar flüssiger, und expansibler Körper angestellt hat, scheinen diese Annahme wenig zu begünstigen. Sie beschränken sie höchstens nur noch auf kleine Temperatursabstände. Die Ausdehnung fester Körper, insbesondere schwer schmelzbarer Metalle, will man innerhalb der beiden festen Puncte des Thermometers gleichförmig gefunden haben; indefs behauptet *De Luc*, eine Ungleichheit in der Ausdehnung des Glases wahrgenommen zu haben. *Hallström* hat ebenfalls eine zunehmende Ausdehnung beim Eisen innerhalb der fixen Puncte des Thermometers gefunden. Dafs aber eine zunehmende Ausdehnung aller festen Körper in weit über den Siedepunct hinausgehenden Temperaturen Statt finde, ist durch die neuesten Versuche, welche *Dulong* und *Petit* mit grofser Sorgfalt angestellt haben, erwiesen. Bei tropfbaren Flüssigkeiten findet eine so bedeutende Abweichung von der angenommenen Gleichförmigkeit Statt, dafs man für eine jede eine besondere Formel aufzusuchen genöthigt war. Die Ausdehnung expansibler

Flüssigkeiten will *Gay-Lussac* innerhalb dem Gefrier- und Siedepuncte regelmäſsig, und mit dem Quecksilber übereinstimmend gefunden haben. *Dalton* gibt dagegen an, daſs innerhalb dieser Puncte ein Luftthermometer etwa um einen Grad, uud zwar um die Mitte der Scala vorauseile, dann aber beim Siedepuncte mit dem Quecksilberthermometer wieder zusammentreffe. In hohen Temperaturen sind nur wenige Versuche angestellt worden, und die Ergebnisse dieser Versuche begünstigen das Gesetz der gleichförmigen Ausdehnung nicht. *Dulong* und *Petit* haben hierüber die zuverläſsigsten Versuche angestellt, die in *Annales de Chimie et de Physique, VII.*, 138, oder in *Gilbert's* Annalen der Physik, LVIII., 254, oder in *Schweigger's* Journal der Physik und Chemie, XXV., 304, mitgetheilt erscheinen.

Wenn erwogen wird, daſs sich die beobachtete Gleichförmigkeit nur auf enge Gränzen der Temperaturen und nur auf solche Körper beschränkt, die ihren Aggregatzustand erst in weit entlegenen Temperaturen ändern, so wird man geneigt seyn zu glauben, daſs vielmehr die Ungleichförmigkeit in der Ausdehnung vorherrsche, und daſs sie nur da, wo die Ausdehnung gegen ihren weit entfernten Endpunct langsam fortschreitet, innerhalb enger Gränzen nicht bemerkbar erscheine. Allein nicht nur die Beobachtungen, sondern auch die Theorie spricht sich gegen die Annahme einer gleichförmigen Ausdehnung aus. Es ist nicht einzusehen, warum sich ein gegebener Körper für jeden Wärmegrad um einen und denselben aliquoten Theil seines ursprünglichen, das ist, bei einer bestimmten Temperatur zur Einheit angenommenen Raums, ausdehnen solle, und warum dieser aliquote Theil nicht vielmehr auf den Raum bezogen werden sollte, den der Körper bei jedem vorausgehenden Wärmegrade behauptete. Wenn sich ein

gegebener Körper, dessen anfängliches Volumen etwa beim natürlichen Gefrierpunct v ist, um den $\frac{1}{m}$ Theil dieses Raumes bei dem ersten Wärmegrade ausdehnt; so muſs dann sein Rauminhalt $v' = v\left(1 + \frac{1}{m}\right)$ seyn. Wird dieser Körper, dessen Volumen nun v' ist, abermals um einen gleichen Grad in seiner Temperatur erhöhet; so wird er aus einem gleichen Grunde, wie vorhin, den Raum

$$v'' = v'\left(1 + \frac{1}{m}\right) = v\left(1 + \frac{1}{m}\right)^2,$$

und überhaupt bei x Wärmegraden den Raum $v\left(1 + \frac{1}{m}\right)^x$ einnehmen müssen. Wird der anfängliche Raum beim natürlichen Gefrierpuncte zur Einheit gesetzt; so hat man das Volumen des Körpers $= \left(1 + \frac{1}{m}\right)^x$. Bezieht sich der ursprüngliche Raum nicht auf den natürlichen Gefrierpunct, sondern auf irgend einen andern Wärmegrad x', so wird der Rauminhalt des Körpers bei x Graden $= \left(1 + \frac{1}{m}\right)^{x-x'}$ seyn.

Diese Vorstellungsart setzt aber voraus, daſs die Körper der ausdehnenden Kraft der Wärme entweder keinen, oder einen sich immer gleich bleibenden Widerstand entgegensetzen. Diese Voraussetzung kann nur bei expansibeln Flüssigkeiten Statt finden. Tropfbare Flüssigkeiten und feste Körper lassen einen ungleichen Widerstand vermuthen, der mit der zunehmenden Raumvergröſserung abnimmt. So wie nun dieser Widerstand geringer wird, muſs die Ausdehnung für jeden Wärmegrad gröſser ausfallen, als sie bei constantem Widerstande seyn würde. Man kann sich aber unbeschadet der Sache vorstellen, als würden die Incremente, um

welche sich der Körper wegen des abnehmenden Widerstandes mehr ausdehnt, durch einen vermehrten Einfluſs der Wärme entstehen, und es kommt nur darauf an, zu bestimmen, um was die Wärmegrade x vermehrt werden müssen, um die gesammte Ausdehnung des Körpers zu erhalten. Nach der Analogie des *Newton*'schen Gesetzes für die Gravitation glaubte ich annehmen zu können, daſs die Incremente der Wärme, welche in der Wirkung mit dem abnehmenden Widerstande gleichgeltend seyn sollen, das quadratische Verhältniſs befolgen werden. Wenn nun ein solches Increment mit a bezeichnet, und wenn ferner angenommen wird, daſs ein gegebener Körper bei constantem Widerstande für den ersten Wärmegrad den Raum $v = 1 + \frac{1}{m}$ einnehmen würde, so müſste dieser Raum wegen des nachgelassenen Widerstandes in

$$v' = v\left(1 + \frac{1}{m}\right)^{a} = \left(1 + \frac{1}{m}\right)^{1+a}$$

übergehen. Bei dem zweiten Wärmegrade würde der Körper den Raum

$$v'' = v'\left(1 + \frac{1}{m}\right) = \left(1 + \frac{1}{m}\right)^{2+a}$$

einnehmen, wenn der Widerstand unverändert derselbe bliebe, wie er zu Ende des ersten Wärmegrades war; da er aber wieder nachläſst, und dadurch die Ausdehnung so gewinnt, als wenn die Temperatur um $3a$ erhöht worden wäre; so wird das eigentliche Volumen desselben

$$v''' = v''\left(1 + \frac{1}{m}\right)^{3a} = \left(1 + \frac{1}{m}\right)^{2+4a}$$

seyn. Aus gleichem Grunde erlangt der Körper bei dem dritten Grade den Raum $\left(1 + \frac{1}{m}\right)^{3+9a}$, und über-

haupt bei x Wärmegraden den Raum $v = \left(1 + \frac{1}{m}\right)^{x + ax^2}$

Will man $\frac{1}{m} = \mu$ setzen, so hat man

$v = (1 + \mu)^{x + ax^2}$ und $\log. v = (x + ax^2) \log. (1 + \mu)$.

Diefs wäre nun das allgemeine Gesetz, nach welchem sich die Körper durch die Wärme ausdehnen.

Um aber die Gröfsen a und μ für jeden gegebenen Körper zu bestimmen, sind zwei durch Versuche gegebene Fälle erforderlich. Es sey nun bekannt, dafs das Volumen eines gegebenen Körpers bei x und X Wärmegraden v und V sey, so ist

$$\log. v = (x + ax^2) \log. (1 + \mu) \text{ und}$$
$$\log. V = (X + aX^2) \log. (1 + \mu),$$

woraus sich $\log. (1 + \mu) = \frac{\log. V}{X + aX^2}$ oder

$$= \frac{\log. v}{x + ax^2} \text{ und } a = \frac{x \log. V - X \log. v}{X^2 \log. v - x^2 \log. V}$$

ergibt.

Um nun zu sehen, wie dieses aufgestellte Gesetz mit den über die Ausdehnung verschiedener Körper angestellten Versuchen übereinstimmen werde: mufs vor allen auf die Beschaffenheit der Thermometer Rücksicht genommen werden, weil diese allen Beobachtungen über die Wärme und über die durch dieselbe bewirkte Ausdehnung zu Grunde liegen.

Nach dem Grundsatze, dafs die Ausdehnung des Quecksilbers mit der Zunahme der Temperatur gleichförmig fortschreitet, theilt man die Thermometerscale in vollkommen gleiche Theile oder Grade ein. Indefs wollen einige Physiker, namentlich *Roy*, eine zunehmende Ausdehnung des Quecksilbers wahrgenommen haben. *Robinson* hat diese Behauptung als giltig angesehen. *De Luc* vermuthete dasselbe, weil das Quecksil-

berthermometer in Mischungen aus Wasser von verschiedenen Temperaturen nicht das arithmetische Mittel beider, sondern stets etwas weniger zeigte. Derselbe hat auch Thermometer, die mit verschiedenen Flüssigkeiten gefüllt waren, verglichen, aber keine Übereinstimmung der Wärmegrade bei gleichen Temperaturen gefunden. Dafs nach *Dalton's* und *Dulong's* Beobachtungen zwischen einem Quecksilber- und Luftthermometer auch keine genügende Übereinstimmung Statt finde; ist bereits früher erwähnt worden.

Schon der Umstand, dafs die verschiedenen Thermometer unter sich nicht völlig übereinstimmen, gibt deutlich zu erkennen, dafs die Eintheilung der Thermometerscalen in gleiche Theile oder Grade das wahre Mafs der Temperaturen nicht abgeben könne. Das von mir angegebene Gesetz verlangt offenbar eine ungleiche Eintheilung der Thermometerscale. Es kommt nur darauf an, ob hiedurch die angestellten Beobachtungen in eine nähere Übereinstimmung gebracht werden. Bei dieser Untersuchung mufs man von einem bestimmten Körper ausgehen. Die Luft scheint sich dazu besonders zu eignen; denn bei dieser ist es wahrscheinlich, dafs sie der ausdehnenden Kraft der Wärme keinen, oder wenigstens keinen ungleichen Widerstand entgegensetzt. Für diese Annahme spricht vorzüglich der Umstand, dafs bei keinem andern Aggregatzustande der Körper eine vollkommenere Übereinstimmung in der Ausdehnung, als bei den expansibeln Flüssigkeiten, gefunden wurde. Ein Luftthermometer würde daher die Wirkung der Wärme rein, und abgesondert von dem Einflusse einer andern Kraft darstellen. Da aber das Quecksilberthermometer mehr im Gebrauche ist, und beinahe allen Beobachtungen über die Ausdehnung zu Grunde liegt, so werde ich vor der Hand von diesem ausgehen, und das Luftther-

mometer damit in Übereinstimmung zu bringen suchen. Sowohl das Quecksilber- als das Luftthermometer müssen in Bezug auf die alte und neue Eintheilung der Scalen von einem und demselben Wärmegrade, als einem ursprünglichen gleichen Maſsstabe, ausgehen. Ich nehme zu diesem Ende den ersten Wärmegrad einer hunderttheiligen Scale des Quecksilberthermometers an. Nach genauen, durch *Dulong* und *Petit*, angestellten Versuchen dehnt sich das Quecksilber vom natürlichen Gefrierpuncte bis zum Siedepuncte um 0,018018, mithin für den ersten Grad um 0,00018018 des beim Gefrierpuncte zur Einheit angenommenen Raumes aus. Es wird daher diese Gröſse, die ich der Kürze wegen μ' nennen will, zu Grunde gelegt. Wenn man nun die Wärmegrade der hunderttheiligen Scale mit y, und die eigentlichen wahren Grade für dieselbe Temperatur mit x bezeichnet, so muſs

$$1 + \mu' y = (1 + \mu)^{x + ax^2} \quad \text{und}$$
$$\log. (1 + \mu' y) = (x + a x^2) \log. (1 + \mu)$$

seyn; woraus sich dann die gegebenen Grade der Centesimal-Scale in die eigentlichen Temperaturs grade übersetzen lassen, wenn μ und a bekannt seyn werden.

Beim Luftthermometer ist $a = 0$, und daher

$$1 + \mu' y' = (1 + \mu)^x \quad \text{und}$$
$$\log. (1 + \mu' y') = x \log. (1 + \mu);$$

wo aber unter y' die gemeinen Grade des Luftthermometers zu verstehen sind. Nach *Gay-Lussac's* genauen Versuchen dehnen sich die Luftarten zwischen den beiden fixen Puncten des Luftthermometers im Mittel um 0,375 aus.

Wird nun diese Gröſse unter hundert Grade gleichförmig vertheilt, so ergibt sich $\mu' = 0,00375$. Der Werth von μ muſs insbesondere bestimmt werden.

Da die Ausdehnung des Quecksilbers für den ersten Centesimalgrad bekannt ist, indem sie als Maſsstab der Eintheilung zu Grunde liegt; da ferner die Gröſsen, um welche sich das Quecksilber und die Luft beim Siedepuncte, und nach *Dulong's* und *Petit's* Versuchen auch in höhern Temperaturen ausdehnen, gegeben sind: so lassen sich aus diesen Daten die Werthe von α und μ leicht bestimmen. Ich finde für das Quecksilber

$\alpha = 0{,}0029991969$ und $\log.(1+\mu) = 0{,}0000780101$,

für die Luft

$$\alpha = 0 \text{ und } \log.(1+\mu) = 0{,}0017255612.$$

Werden nun diese Werthe in die gegebenen Gleichungen für das Quecksilber- und Luftthermometer substituirt; so ergeben sich die Formeln, nach welchen sich die gemeinen hunderttheiligen Grade in die eigentlichen Temperaturgrade übersetzen lassen. Es ist nämlich für das Quecksilberthermometer:

$$x = \frac{-1 + \sqrt{1 + 153{,}7850506 \log.(1 + 0{,}00018018 y)}}{0{,}00599839},$$

und für ein Luftthermometer:

$$x = \frac{\log.(1 + 0{,}00375\, y')}{0{,}00172556}.$$

Aus den nachstehenden Tafeln ist zu ersehen, wie das aufgestellte Gesetz mit den Beobachtungen, die man über die Ausdehnung verschiedener Körper angestellt hat, übereinstimme. Die erste Columne enthält die gemeinen Centesimalgrade des Quecksilberthermometers, bei welchen die Versuche vorgenommen wurden. In der zweiten sind diese Grade auf die eigentlichen wahren Temperaturgrade übersetzt, die ich mit W^{0} bezeichnet habe. Die dritte Columne enthält die Ergebnisse der Versuche nebst den Namen der Beobachter; in der vierten Spalte sind die Resultate eingetragen, die sich

durch Berechnung nach dem aufgestellten Gesetze $v = (1 + \mu)^{x + \alpha x^2}$ ergeben haben; die fünfte Columne endlich gibt die Differenzen zwischen der Beobachtung und Berechnung an. Die Gröfsen α und μ, oder log. $(1+\mu)$, sind aus zwei gegebenen Fällen nach der früher angegebenen Art berechnet worden.

Ausdehnung der Luft.

$\alpha = 0$; log. $(1 + \mu) = 0{,}00172556$.

Quecksilberthermometer		Volumen der Luft.			Differenzen.
Centesimalgrade.	W°	Beobachtet.		Berechnet.	
0	0	1,0000		1,0000	0
25	23,38133	1,0965	Lux.	1,0973	+ 0,0008
50	44,09769	1,1900	Lux.	1,1915	+ 0,0015
75	62,87235	1,2860	Lux.	1,2838	— 0,0022
100	80,14940	1,3750		1,3750	0
150	111,13111	1,5576	*Dulong.*	1,5551	— 0,0025
200	139,07656	1,7389	*Dulong.*	1,7377	— 0,0012
250	165,39838	1,9189	*Dulong.*	1,9293	+ 0,0104
300	187,56359	2,1094	*Dulong.*	2,1069	— 0,0025
360	213,35688	2,3125	*Dulong.*	2,3343	+ 0,0218

Da die Differenzen abwechselnd positiv und negativ erscheinen, so dürften sie den möglichen Beobachtungsfehlern zuzuschreiben seyn. Diefs wird um so wahrscheinlicher, als diese Versuche besonders in hohen Temperaturen aus Mangel eines festen Punctes nicht leicht zu bewerkstelligen sind. Auch sollen *Dulong* und *Petit* die angesetzten Gröfsen nicht unmittelbar, sondern durch ein einfaches Interpoliren gefunden haben. (*Gilbert's* Annalen, 58. Band, Seite 264.)

Wenn man die berechnete Ausdehnung bei 50 Cent.° auf die gemeinen Centesimalgrade reducirt; so erhält man $\frac{0{,}1915}{0{,}00375} = 51{,}0667^0$, also gerade das, was *Dalton*

beobachtet haben will, nämlich daſs das Luftthermometer um die Mitte der Scale um einen Grad voreile. Die durch *Dalton* und *Gay-Lussac* aufgestellte Behauptung, daſs alle Dämpfe ohne Unterschied sich genau wie die permanenten Gasarten ausdehnen, stimmt mit dem aufgestellten Gesetze vollkommen überein; denn da bei diesen eben so wenig, wie bei allen übrigen expansiblen Flüssigkeiten, ein Widerstand Statt finden kann: so muſs auch hier die Wärme rein und ungehindert wirken. Es muſs daher auch bei Dämpfen $\alpha = o$ und $v = (1 + \mu)^x$, oder $\log. v = x \log. (1 + \mu)$ seyn. Zufolge der Versuche dehnt sich der Dampf vom natürlichen Gefrierpuncte bis zum Siedepuncte ebenfalls um 0,375 aus. Es ist daher eben so wie bei der Luft $\log. (1 + \mu) = 0{,}00172556$ zu setzen. Es lassen sich hiernach die Räume, welche der Dampf in verschiedenen Temperaturen annimmt, aus $\log. v = 0{,}00172556\,x$ leicht berechnen.

Ausdehnung des Quecksilbers.

$\alpha = 0{,}0029991969$; $\log. (1 + \mu) = 0{,}0000780101$.

Luftthermometer.		Volumen des Quecksilbers.		Differenzen.
Cent.°	W°	Beobachtet.	Berechnet.	
200	140,8426	1,0363	1,0366	+ 0,0003
300	189,7073	1,0552	1,0549	— 0,0003

Dulong und *Petit* haben die Versuche über die Ausdehnung des Quecksilbers, im Vergleich mit der Luftausdehnung, angestellt, und aus mehrern Versuchen das Mittel gezogen. Sie sind in *Schweigger's* Journal, Band 25, Seite 314, enthalten.

Die Wärmegrade des Luftthermometers habe ich nach der Formel $x = \frac{\log. (1 + \mu' y)}{\log. (1 + \mu)}$, $\mu' = 0{,}00375$ und

$\log.(1+\mu) = 0{,}00172556$ in die eigentlichen Temperaturen übersetzt, und hierauf die Ausdehnung des Quecksilbers aus $\log. v = (x + \alpha x^2) \log.(1+\mu)$ berechnet.

Ausdehnung des Wassers.

$\alpha = 2{,}53970053$; $\log.(1+\mu) = 0{,}000001296$.

Quecksilbertherm.		Volumen des Wassers.			Differenzen.
Cent.°	W^o	Beobachtet.		Berechnet.	
4	3,96279	1,00000	Gilpin.	1,00000	0,00000
5	4,94000	1,00001		1,00001	0,00000
10	9,73749	1,00027		1,00027	0,00000
15	14,40382	1,00086		1,00086	0,00000
20	18,94886	1,00176		1,00175	— 0,00001
25	23,38133	1,00292		1,00292	0,00000
100	80,14942	1,0466	Dalton.	1,04497	+ 0,00002
		1,0433	Kirwan.		
		1,04495	Durchschnitt		

Da das Wasser nach *Hallström's* Beobachtungen bei 4,004 C° die gröſste Dichtigkeit annimmt; so habe ich dessen Volumen bei 4 Cent.° zur Einheit gesetzt, und von da die Ausdehnung für die angesetzten Temperaturen berechnet. Die Werthe von α und $\log.(1+\mu)$ sind aus den bei 10 und 25 C° gefundenen Resultaten bestimmt worden. Die *Gilpin*'schen Beobachtungen habe ich aus *Gilbert's* Annalen der Physik, Band 58, Seite 287, entlehnt.

Ausdehnung des Eisens.

$\alpha = 0{,}01116219$; $\log.(1+\mu) = 0{,}00000399$.

Quecksilbertherm.		Längenausdehnung des Eisens.			Differenzen.
Cent.°	W^o	Beobachtet.		Berechn.	
0	0	1,000000	Hallström.	1,000000	—
20	18,94886	1,000211		1,000211	0,000000
40	36,07627	1,000453		1,000465	+0,000012
60	51,81133	1,000734		1,000751	+0,000017
80	66,43649	1,001063		1,001063	0,000000
100	80,14942	—		1,001396	—

Die Versuche, die *Hallström* über die Längenausdehnung des Eisens angestellt hat, habe ich aus *Gilbert's* Annalen, Band 36, Seite 64, entnommen, und die Grössen α und log. $(1+\mu)$ aus den Versuchen des 20sten und 80sten Wärmegrades berechnet.

Ausdehnung des Kupfers.

$\alpha = 0{,}00336067$; log. $(1+\mu) = 0{,}000007317$.

Quecksilbertherm.		Längenausdehnung des Kupfers.		Differenzen.
Cent.°	*W*°	Beobachtet.	Berechnet.	
0	0	1,000000	1,000000	0,000000
25	23,38133	1,000425 *Horner.*	1,000425	0,000000
50	44,09769	1,000844 *Horner.*	1,000852	+0,000008
75	62,87235	1,001284 *Horner.*	1,001284	0,000000
100	80,14942	1,001722 *Lavoisier.*	1,001730	+0,000008

Ausdehnung des Zinks.

$\alpha = 0{,}0046175$; log. $(1+\mu) = 0{,}0000116$.

Quecksilbertherm.		Längenausdehnung des Zinks.		Differenzen.
Cent.°	*W*°	Beobachtet.	Berechnet.	
0	0	1,000000	1,000000	0,000000
25	23,38133	1,000696 *Horner.*	1,000696	0,000000
50	44,09769	1,001408 *Horner.*	1,001418	+0,000010
75	62,87235	1,002154 *Horner.*	1,002169	+0,000015
100	80,14942	1,002954 *Horner.*	1,002954	0,000000

Ausdehnung des Glases.

$\alpha = 0{,}07722248$; log. $(1+\mu) = 0{,}000000764$.

Quecksilberthermom.		Längenausdehn. d. Glases.		Differenzen.
Cent.°	*W*°	Beobachtet.	Berechnet.	
0	0	1,000000	1,000000	0,000000
10	9,737497	1,000000	1,000030	0,000000
20	18,94886	1,000081	1,000082	+ 0,000001
30	27,70893	1,000153	1,000153	0,000000
100	80,14942	—	1,001014	—

Die Versuche über die Ausdehnung des Glases sind von *Hallström* angestellt worden. Ich entlehnte sie aus *Poggendorf's* Annalen der Physik, Band 77, Seite 159. Es wird aber nicht angegeben, mit welcher Glassorte sie vorgenommen wurden. Auch erstrecken sich siese Versuche nicht über den 30sten Cent.°. Die Berechnung gibt nach diesen Anhaltspuncten die Längenausdehnung des Glases beim Siedepuncte 1,001014. Diefs kommt dem von *Berthoud* gefundenen Resultate 1,000991 ziemlich nahe.

Um aus der linearen Ausdehnung die kubische, und umgekehrt aus dieser jene zu erhalten, mufs, wie leicht einzusehen ist, die entsprechende Gröfse log. $(1+\mu)$ im ersten Falle mit 3 multiplicirt, und im zweiten mit 3 dividirt werden.

(Die Fortsetzung folgt.)

IV.

Über eine vortheilhafte Darstellung des Digitalins, oder des wirksamen Princips der Blätter der *Digitalis purpurea*;

von

Joh. N. Planiawa.

Unter den vielen eigenthümlichen Bestandtheilen der Pflanzen, welche sich in chemischer Hinsicht theils alkalisch, theils aber indifferent gegen die Säuren verhalten, und im ersten Falle mit dem passenden Namen Alkaloide (Pflanzenalkaloide) belegt werden, erfreuen sich bereits mehrere einer Aufnahme in die Zahl der Heilmittel, weil der denkende Arzt von dem richtigen

Grundsatze ausgeht: »dafs in dem eigenthümlichen Bestandtheile der Pflanze auch ihre eigenthümliche Wirkung vorhanden seyn müsse, und dafs dieser eigenthümliche Stoff seinen Zwecken um so entsprechender sey, als er durch ihn blofs die beabsichtigte Wirkung, ohne alle oft so lästigen Nebenwirkungen, welche bei Anwendung des ganzen Pflanzentheils unausbleiblich sind, im kranken Organismus hervorzubringen vermöge.« Unter diese eigenthümlichen Pflanzenstoffe gehört nun auch das seit einiger Zeit in Anwendung gekommene Digitalin, welches *Aug. Le Royer* durch Behandlung trockener Digitalisblätter mit Äther in einem Autoclave, Verdünstung der erhaltenen Flüssigkeit, Auflösung des Rückstandes mit Wasser, Behandlung dieser wässerigen Lösung mit Bleioxydhydrat, neuerliche Verdünstung der Flüssigkeit zur Trockne und Behandlung des Rückstandes mit Äther, und endliche Verdünstung dieses ätherischen Auszuges zur Trockne, als eine braune, schmierige Masse erhielt, welche die ursprüngliche Farbe des Lackmus langsam bläute, an der Atmosphäre zerflofs, sich folglich sehr leicht im Wasser, aber auch im Alkohol und Äther löste, und in sehr kleinen Gaben gereicht die giftigen Wirkungen der *Digitalis purpurea* hervorbrachte.

Angeführte Darstellungsmethode ist sehr kostspielig, und liefert in einigen Fällen sogar nur 80 Gran aus 16 Unzen Blätter.

Da ich indessen die sehr grofse Löslichkeit dieses Stoffes im Wasser, so wie jene seiner Verbindung, in welcher es in den Digitalisblättern vorkommt, besonders auffafste: so fühlte ich mich veranlafst, diesen Stoff auf eine viel einfachere und weniger kostspielige Weise darzustellen, und fand, dafs auch die Quantität desselben bei Anwendung der nachstehenden Bereitungsart, im

Verhältnifs gegen *Le Royer's* seine, bei weitem gröfser ausfalle.

5 Pfund Digitalisblätter wurden zwei Mal mit destillirtem Wasser, jedes Mal durch einige Stunden, gekocht, sämmtliche abgeklärte Flüssigkeit zur Consistenz eines flüssigen Extracts verdünstet, und dieses hierauf mit Äther übergossen. Unter öfterem Umschütteln blieb das Ganze durch einige Tage in mäfsiger Temperatur stehen, worauf der überschwimmende, nun grüngefärbte Äther abgezogen wurde. Seiner Farbe nach enthielt er Chlorophyl, und mufste auch die Digitalinverbindung der angewandten Pflanzenblätter enthalten. Er wurde, mit 4 Unzen Wassers versetzt, der Destillation unterworfen, die rückständige ganz ätherfreie Flüssigkeit von dem ausgeschiedenen Chlorophyl getrennt, mit einigen Unzen Wassers verdünnt, und hierauf mit Bleioxydhydrat behandelt. Die abgeklärte Flüssigkeit wurde abgegossen, das rückständige, durch etwas Chlorophyl grün gefärbte Bleioxydhydrat mit reinem Wasser ausgewaschen, dieses der ersteren Flüssigkeit zugesetzt, und hierauf verdünstet. Die erhaltene Masse wurde nun von Neuem mit Äther ausgezogen, worin sie sich bis auf einen geringen Rückstand löste, und liefs nach Verdünstung des Äthers 2,5 Unzen eines schönen hellbraunen Digitalins zurück, welches alle von *Le Royer* angeführten Eigenschaften besafs, und drei Mal so viel als nach seiner Methode betrug.

Dafs man auf diesem Wege eine gröfsere Quantität des Digitalins erhalten müsse, geht schon aus theoretischen Gründen hervor; denn die extractiven, schleimigen und gummigen Bestandtheile der Digitalisblätter, welche darin innigst gemengt mit dem Digitalin vorkommen, verhindern zum Theil den Äther, dasselbe, oder vielmehr seine Verbindung mit der eigenthümlichen

Säure, die ich jedoch nicht untersucht habe, aufzulösen.

Da ich vermuthete, dafs dieser Stoff, eben so wie die anderen eigenthümlichen Pflanzenalkaloide, seine Farbe einem damit verbundenen extractiven Färbestoffe verdanke, so versuchte ich, ihn zu entfärben. Zu diesem Ende löste ich einen Theil desselben in Äther, und liefs die Lösung längere Zeit hindurch mit reiner Stickstoffkohle in der Wärme unter öfterem Umschütteln stehen. Obwohl das Quantum der Stickstoffkohle so grofs war, dafs man eine vier Mal so grofse Menge eines anderen eben so intensiv gefärbten Körpers hätte entfärben können, so fand doch gar keine Farbenzerstörung Statt, und ich überzeugte mich, dafs auf diesem Wege keine Entfärbung des Digitalins möglich sey. Ist nun diese braune Farbe diesem Stoffe, der sich durch sein Verhalten gegen Säuren als ein Alkaloid erweiset, wirklich eigenthümlich? Oder vermag die Stickstoffkohle, wenn ersteres nicht der Fall ist, den Färbestoff des Digitalins nicht zu zerstören oder zu binden, wie sie diefs bei anderen thut? Vertritt hier vielleicht eben dieser Färbestoff bei dem Digitalin die Stelle einer Säure? — Fragen, deren Beantwortung ich, aus Mangel an schicklicher Gelegenheit, meinen ferneren Forschungen über diesen Gegenstand vorbehalten mufs, oder Anderen überlasse.

V.

Fortschritte der Physik in der neuesten Zeit.

A. Electricität.

I. Über die Umstände, welche die Richtung und Stärke des electrischen Stromes in einem *Volta*'schen Elemente bestimmen. Von *La Rive.*

(*Annal. de Chim. Tome 37, p. 225, e. s.*)

La Rive hat am 20. August 1827 der helvetischen Gesellschaft der Naturwissenschaften ein Mémoire vorgelesen, das zum Zwecke hat, die Umstände anzugeben, welche die Richtung und Stärke des electrischen Stromes in einem *Volta*'schen Elemente bestimmen. Der Inhalt desselben steht mit den Arbeiten *Marianini's*, *Nobili's* und Anderer, die in dieser Zeitschrift bereits mitgetheilt worden sind, in so naher Berührung, daſs er schon deſshalb angeführt werden müſste, wenn es auch nicht die Absicht der Herausgeber wäre, alle litterarischen Producte des Auslandes den deutschen Lesern im Wesentlichen vorzulegen.

Nach einer Einleitung, worin von den Differenzen zwischen den Ansichten des Verfassers und denen anderer Physiker, vorzüglich *Marianinis*, die Rede ist, geht er zum eigentlichen Gegenstande seiner Abhandlung über, in dem wir ihm meistens wörtlich folgen wollen.

1. Umstände, welche die Richtung des electrischen Stromes bestimmen.

Nach *Volta's* Theorie, der auch *Marianini* beistimmt, wird die Richtung des electrischen Stromes in einem Plattenpaare, oder die Natur der jedem Elemente die-

ses Paares eigenen Electricität, einzig und allein durch die Berührung der zwei heterogenen Metalle bestimmt; der flüssige Zwischenkörper wirkt nur durch seine Leitungsfähigkeit, und hat daher auch nur Einfluſs auf die Intensität des Stromes. *H. Davy* nahm zwar *Volta's* Theorie zur Grundlage an, ging aber hierin weiter, hielt zum Entstehen eines electrischen Stromes eine chemische Wirkung für nothwendig, und gestattete ihr auch einen Einfluſs auf die Stärke dieses Stromes; aber die Natur der in jedem Metalle angehäuften Electricität hing nach seiner Meinung allein von der Berührung der zwei heterogenen Metalle, und von der Kraft ab, welche *Volta* die electromotorische nannte. Endlich nach *Fabroni*, *Wollaston* und anderen Gelehrten ist die chemische Wirkung der Flüssigkeit auf die Metalle die alleinige Ursache, welche die Erzeugung der Electricität bestimmt, und die Berührung ist nur das Mittel, wodurch diese Wirkung deutlich hervortritt. Man kann als Stütze dieser Theorie die unwiderspreohliche Thatsache anführen, daſs die chemische Wirkung selbst Electricität erregt, und insbesondere, daſs ein starker electrischer Strom eintritt, wenn man in eine Flüssigkeit zwei Stücke desselben Metalls taucht, die von ihr angegriffen werden; eine Erscheinung, die weder nach *Volta's* noch nach *Davy's* Theorie erklärt werden kann.

Ich versuchte, ob es möglich sey, den electrischen Strom eines Plattenpaares durch verschiedene flüssige Leiter abzuändern. Eine einzige Thatsache, welche zeigt, daſs dasselbe Metall in Berührung mit einem anderen positiv- oder negativ-electrisch wird, je nachdem die dazwischen befindliche Flüssigkeit beschaffen ist, reicht hin, zu beweisen, daſs der electrische Zustand dieser zwei Elemente wenigstens nicht ausschlieſslich von der Berührung abhänge; aber um eine andere Theo-

sie zu begründen, braucht man eine grofse Anzahl von Thatsachen. Daher haben die folgenden Untersuchungen zum Zweck, zu zeigen: 1) dafs der electrische Zustand eines *Volta*'schen Plattenpaares nicht von der Berührung, ohne Rücksicht auf die Flüssigkeit, abhängt; 2) dafs dieser Zustand durch das Verhältnifs der beiden Metalle zur Flüssigkeit bestimmt wird; 3) dafs dieses Verhältnifs von der Art ist, dafs das Metall, welches von der Flüssigkeit am meisten angegriffen wird, gegen das andere negativ-electrisch erscheint.

In den folgenden Versuchen habe ich mich eines Galvanometers bedient, dessen Empfindlichkeit, ohne gerade sehr grofs zu seyn, dennoch hinreichte, die Wirkungen, um die es sich handelte, zu studiren, und ich erhielt in allen Fällen eine deutliche Ablenkung der Magnetnadel (fast immer zwischen 50° — 90°), so dafs mir weder über das Vorhandenseyn, noch über die Richtung des electrischen Stromes der geringste Zweifel übrig bleiben konnte. Endlich war jeder Versuch mehrere Male wiederholt, und zwar theils von mir selbst in Gegenwart einiger Freunde, theils von den Eleven der Academie ohne mein Beiseyn, und die Resultate stimmten immer vollkommen mit einander überein.

Beim ersten Versuche, der mir in den Sinn kam, wurde Ammoniak, das bekanntlich auf Kupfer stärker wirkt, als auf viele Metalle, welche von den andern Stoffen mehr angegriffen werden, zum flüssigen Leiter gewählt. Ich nahm ein Plattenpaar aus Kupfer und Zinn, welches, in eine salzige oder saure Lösung getaucht, einen starken, vom Kupfer zum Zinn gerichteten Strom erzeugte. Im Ammoniak gab es aber einen Strom, der vom Zinn zum Kupfer ging, so dafs das Kupfer positiv, das Zinn negativ war, während bei Anwendung saurer oder salziger Leiter das Gegentheil Statt hatte. Der Un-

terschied kommt nach meiner Meinung daher, daſs die saure oder salzige Lösung eine stärkere chemische Wirkung auf das Zinn ausübt, als auf das Kupfer, das Ammoniak aber umgekehrt das Kupfer mehr angreift als das Zinn. Hier wäre also das am stärksten angegriffene Metall gegen das andere positiv. Man kann die Wirkung nicht der Berührung der Metalle mit dem Alkali zuschreiben; denn Zink, welches in der Reihe der Electromotoren mehr positiv ist als Kupfer und Zinn, müſste gegen diese im Ammoniak negativ werden, wenn die Berührung mit einem Alkali die electromotorische Reihe der Körper sollte umkehren können; es ist aber dieses Metall mit beiden anderen positiv, weil auch die chemische Wirkung des Ammoniaks darauf stärker ist. Ferner, käme die Wirkung auf Rechnung der Berührung mit Alkalien, so müſste eine Kalilösung eine ähnliche Erscheinung hervorbringen, und doch ist Kupfer in einer solchen Lösung negativ, Zinn aber positiv, wie in einer sauren oder salzigen Flüssigkeit. Eisen mit Kupfer statt des Zinnes zu einem Paare verbunden, zeigte genau dieselben Phänomene, es war positiv in einer salzigen oder sauren Auflösung, hingegen negativ im Ammoniak. — — —

Die verschiedene Wirkung concentrirter und verdünnter Säuren auf einige Metalle lieferte mir mehrere merkwürdige Beispiele einer ähnlichen Umkehrung der Polarität. So ist in verdünnter Salpetersäure das Kupfer gegen Blei negativ, in concentrirter aber gegen dasselbe positiv; aber man weiſs auch, und es ist leicht sich zu überzeugen, daſs die chemische Wirkung der verdünnten Säure auf das Blei stärker ist, als auf das Eisen, und daſs das Gegentheil mit der concentrirten Statt findet. Eine Thatsache, welche sehr wohl beweist, daſs nur die stärkere chemische Wirkung ein Metall zum positiven

macht, besteht darin, daſs, wenn man Eisen und Blei in die concentrirte Säure taucht, das Eisen im ersten Augenblick negativ erscheint, weil noch keine chemische Wirkung Statt findet; wartet man aber, bis die chemische Wirkung beginnt, oder bringt man das eingetauchte Stück einen Augenblick in die Luft, so erlangt dasselbe Eisen einen sehr merklichen positiven Zustand. Ich hatte Gelegenheit, dieselbe Beobachtung am Kupfer zu machen, das in concentrirter Salpetersäure anfangs negativ ist, gegen Blei aber stark positiv wird, wenn die chemische Wirkung eingetreten ist. Ich baute auch eine Säule von Blei und Kupfer, deren Pole ich durch Eintauchen in concentrirte Salpetersäure umkehren konnte. Die Zersetzung des Wassers und der Salze, und alle magnetischen und electro-dynamischen Wirkungen traten in beiden Fällen ein, aber in entgegengesetztem Sinne. Demnach kann dieselbe Flüssigkeit nach Verhältniſs ihres Concentrationsgrades die Natur der an jedem Pole einer Säule angehäuften Electricität abändern; ein scheinbar sehr sonderbares Factum, das aber ganz in der Ordnung der Dinge zu liegen scheint, wenn man bedenkt, daſs der Concentrationsgrad auch die chemische Wirkung gänzlich abzuändern vermag.

Ich übergehe das Detail der Versuche, die ich mit concentrirter und verdünnter Schwefelsäure angestellt habe, und beschränke mich darauf, die Ordnung anzugeben, in welcher die Metalle, mit denen ich Versuche anstellte, in Hinsicht ihrer electromotorischen Kraft auf einander folgen, je nachdem man sich dieser Säure in einem oder dem anderen Zustande als flüssigen Leiter bedient. Jede der in den zwei Tafeln folgenden Substanzen ist positiv gegen jede vorausgehende, und negativ gegen jede folgende:

In concentrirter Salpetersäure.	In verdünnter Salpetersäure.
Oxydirtes Eisen,	Silber,
Silber,	Kupfer,
Quecksilber,	oxydirtes Eisen,
Blei,	Eisen,
Kupfer,	Blei,
Eisen,	Quecksilber,
Zink,	Zinn,
Zinn.	Zink.

Jedes einzelne Metall nimmt in jeder Tafel einen anderen Platz ein; welcher wäre denn nun der wahre nach der Theorie der Berührung? Es scheint mir dieser Umstand mit dieser Theorie unvereinbarlich zu seyn; er erklärt sich aber leicht, wenn man annimmt, daſs die Wirkung von der relativen Energie der chemischen Wirkung abhängt. Andere Metalle und einige andere Säuren, insbesondere sehr concentrirte und verdünnte Schwefelsäure, gaben Resultate, welche mit den mittelst Salpetersäure erhaltenen vollkommen analog waren, nämlich stets im Verhältniſs mit der Stärke der chemischen Wirkung standen. Im Vorbeigehen will ich bemerken, daſs bei keinem der Versuche, die mit derselben, aber verschieden concentrirten Säure vorgenommen wurden, der Einwurf gemacht werden kann, die Änderung der Polarität rühre von der Berührung der Flüssigkeit und des Metalles her, denn die Flüssigkeit ist in beiden Fällen dieselbe. Ohne mich mit der Beschreibung aller dieser verschiedenen Resultate aufzuhalten, die ich noch zu vervielfältigen gedenke, um mich fest zu überzeugen, daſs sich ohne Ausnahme das Factum bewähre, es hänge die Richtung des electrischen Stromes von der chemischen Wirkung ab, will ich nur noch drei den vorigen analoge Facta anführen, die mir in Betreff der angewen-

deren Substanzen und der dabei obwaltenden Umstände sehr geeignet scheinen, den Einfluſs der chemischen Wirkung zu zeigen.

Die Kohle ist gegen Platin in kalter oder bis 100° — 150° erwärmter concentrirter Schwefelsäure stark positiv, und ich fand sie noch stärker negativ gegen dasselbe Metall im wenig erwärmten Königswasser; aber im ersten Falle wurde die Kohle, im zweiten das Platin stark angegriffen. Beide Versuche wurden oft mit demselben Stücke Kohle und Platin wiederholt; man muſs nur dafür sorgen, daſs zur Erlangung eines ziemlich starken Stromes dieses Metall in beiden Säuren eine groſse Oberfläche erhalte; ich bediente mich eines Platintiegels, goſs die Flüssigkeit darein, und tauchte in diese die Kohle. Arsenik und Eisen geben ein anderes Beispiel einer Umkehrung der Pole. In einer verdünnten Säure ist das Eisen sehr stark positiv gegen Arsenik, und dieses wird auch sehr wenig angegriffen; taucht man sie aber in durch starkes Lampenfeuer geschmolzene Pottasche, so wechseln sie ihre Rolle, das Arsenik wird stark vom Kali angegriffen, und erscheint positiv, das Eisen hingegen, worauf fast keine Wirkung erfolgt, negativ. Gold und Eisen geben ein Plattenpaar, wovon das erstere gewöhnlich negativ ist. Quecksilber, als leitende Flüssigkeit gebraucht, konnte die Richtung des electrischen Stromes nicht umkehren, und durch seine Wirkung auf das Gold dieses Metall gegen Eisen, auf das es nicht wirkt, positiv machen. Ist aber die Bildung eines Amalgams eine wahre chemische Wirkung, und kann man Quecksilber als flüssigen Leiter brauchen? Diese Zweifel sollten gehoben werden; ein deſshalb angestellter Versuch gab kein entscheidendes Resultat; als man aber das Gold leicht vor dem Eintauchen in Quecksilber mit Salpetersäure befeuchtete, erhielt man einen

sehr starken Strom, bei welchem das Gold positiv, das Eisen negativ war. Hat wohl hier die Salpetersäure die Bildung des Amalgams durch eine directe Wirkung auf das Quecksilber erleichtert? Daran liegt wenig; in allen Fällen war Gold positiv gegen Eisen, und dieses ist das Entgegengesetzte dessen, was mit einer salzigen oder sauren Lösung erfolgt.

Aus allem Bisherigen scheint mir zu folgen, daſs die Richtung des electrischen Stromes nicht allein von der Natur der zwei Metalle, sondern vom Verhältnisse dieser zur Flüssigkeit abhänge. Das ist Thatsache, ich gehe aber weiter, und stelle eine sehr wahrscheinliche Hypothese auf. Wenn ich sage, das Verhältniſs der Flüssigkeit zu den Metallen sey von der Art, daſs das mehr angegriffene positiv, das andere negativ sey, so ist dieses bloſs eine Hypothese; denn wornach können wir denn genau über die Stärke einer chemischen Wirkung urtheilen? Ist jene die stärkste, bei welcher das stärkste Aufbrausen und die gröſste Wärmeentwicklung Statt findet, und steht diese Stärke mit der Affinität im Verhältnisse? Ich glaube, man hätte Unrecht, dem ersten dieser Criterien zu trauen, und daſs man auch durch das zweite oft getäuscht würde; denn dieselbe Säure wirkt nach Verhältniſs ihrer Concentration bald auf dieses, bald jenes Metall stärker. Wie es immer seyn mag, ich werde in der Folge ein von jeder Hypothese unabhängiges Verhältniſs angeben, das zwischen der Flüssigkeit und den Metallen eines Plattenpaares in Betreff der Natur ihrer Electricität stets Statt findet. Gibt man zu, daſs ein electrischer Strom eintritt, so oft es eine Differenz in der von der Flüssigkeit auf die beiden Metalle ausgeübten Wirkung gibt, so erklärt man sehr wohl die Electricitätsentwickelung bei allen chemischen Wirkungen, besonders das Entstehen eines Stroms mit

zwei Platten desselben Metalls; denn stets wird, entweder wegen der gröfseren Oberfläche, oder wegen späterem Eintauchen, oder wegen anderen zufälligen Umständen eine der zwei Platten mehr angegriffen werden als die andere. Es frägt sich aber hier, kann man durch Vergröfserung der Oberfläche des am wenigsten angegriffenen Metalls die stärkere Wirkung der Flüssigkeit auf das andere Metall ersetzen, oder sie gar übertreffen machen? Ich habe bemerkt, dafs dieses angeht, wenn die Differenz vermöge der Natur der Flüssigkeit oder der Metalle sehr gering ist, dafs aber in allen anderen Fällen, die bei weitem die zahlreicheren sind, die Summe einer grofsen Anzahl sehr schwacher chemischer Kräfte nie einer sehr starken Kraft gleich werden, oder sie gar übertreffen kann, wenn diese auch auf eine möglichst kleine Ausdehnung wirkt. So bleibt Kupfer, es mag auch eine gegen Zink sehr grofse Oberfläche haben, in einer verdünnten Säure oder einer Salzauflösung stets negativ.

Eine andere Folge der Grundsätze, die ich eben angeführt habe, besteht darin, dafs von den zwei Metallen eines Paares, deren jedes in eine verschiedene Flüssigkeit getaucht wird, welche aber mittelst eines feuchten Leiters mit einander communiciren, stets dasjenige als positiv gefunden wird, welches von der Flüssigkeit, in der es sich befindet, am meisten angegriffen ist. Die einfachste Art, sich davon zu überzeugen, besteht darin, eine umgekehrte heberförmig gekrümmte Röhre anzuwenden, in einen Schenkel concentrirte, in den anderen verdünnte Schwefelsäure zu giefsen. Diese zwei Flüssigkeiten berühren einander, ohne sich zu vermischen, weil sie verschieden specifisch schwer sind. Taucht man zwei Theile desselben Metalls, oder zwei verschiedene Metalle in jede dieser Flüssigkeit, so fin-

det man im Allgemeinen das in der verdünnten Säure befindliche positiv; doch gibt es Ausnahmen, und da man es mit zwei sehr verschiedenen chemischen Wirkungen zu thun hat, so ist es schwer, vorhinein anzugeben, welche derselben die stärkere seyn wird. Man kann diese Versuche verschieden abändern, und dieselbe Säure von verschiedener Stärke, oder zwei verschiedene Flüssigkeiten anwenden. Ich habe eine Menge solcher Versuche angestellt, und alle schienen mir den vorigen Grundsatz zu bestätigen. Aus dem Vorhergehenden erklärt man auch das von *Becquerel* erhaltene Resultat, der eine von zwei zu einem Paare verbundene Kupferplatten in starkes, die andere in schwaches Salzwasser eintauchte, und die letztere positiv, die erstere negativ fand, und daraus den sonderbaren Schluſs zog, Salzwasser mache durch Berührung das Kupfer negativ-electrisch. Diese Wirkung kommt daher, daſs eine Seesalzlösung das Kupfer im verdünnten Zustande stärker angreift, als im concentrirten, wie es *H. Davy* bewiesen hat. Auch mehrere von *Marianini* beschriebene Phänomene lassen sich aus demselben Satze erklären. Die Wirkung der Oxydation, wodurch ein Metall gegen dasselbe nicht oxydirte negativ wird, flieſst aus derselben Quelle. Der merkwürdige Einfluſs der Wärme kommt gröſstentheils eben daher, und nicht bloſs von einer Erhöhung der Leitungsfähigkeit der Flüssigkeit, wie *Marianini* glaubt; daſs die Verstärkung des Stromes durch Erwärmung der Platten von einer Steigerung der chemischen Wirkung auf das Metall herrührt, ist um so wahrscheinlicher, da dieser Strom nur wenig durch eine Temperaturerhöhung verstärkt wird, wenn die Flüssigkeit schon im kalten Zustande eine starke chemische Wirkung ausübet, während er eine groſse Verstärkung erfährt, wenn diese Wirkung der Flüssigkeit nur gering ist, was auch *Ma-*

rianini bemerkt hat. Nichts desto weniger ist es richtig, dafs unter gewissen Umständen die Leitungsfähigkeit der Flüssigkeiten durch Wärme erhöht wird; zu diesem Resultate gelangten schon vor Langem *Gay-Lussac* und *Thenard*, da sie in derselben Zeit und unter gleichen Umständen an den Polen einer Säule viel mehr Gas erhielten, wenn die Flüssigkeit, in welche die Drähte reichten, warm war. Ich habe oft bei verschiedenen Flüssigkeiten dieselbe Beobachtung gemacht, doch schien mir diese Wirkung der Wärme bedeutender, wenn die leitende Flüssigkeit in einer weniger als einen Zoll weiten Röhre enthalten war, als wenn sie sich in einem gröfseren Gefäfse befand, und dieses macht mich glauben, dafs bei *Marianini's* Versuchen fast die ganze Wirkung von der gröfseren chemischen Action herrühre. Was das Factum betrifft, dafs dieselbe Flüssigkeit mehr leitet, wenn sie dieselbe Temperatur beim Abkühlen erreicht, als wenn sie beim Erwärmen dahin gelangt, könnte man sie wohl vielleicht von einer geringen Zinkoxydschichte herleiten, welche die Flüssigkeit mit Hülfe der Wärme auflösen konnte, und wodurch ihre Leitungsfähigkeit gesteigert wurde? — — — — —

Eine andere Folge dieses Satzes ist, es sey nicht unmöglich, dafs die thermo-electrischen Ströme von derselben Ursache herrühren, wie die Ströme, wobei ein feuchter Leiter im Spiele ist. Die Wärme hat Einflufs auf den Grad der chemischen Wirkung, welche das Oxygen der Luft auf die Metalle ausübt, und wir sehen fast immer, dafs das wärmere Metall gegen das andere positiv ist *); selbst die Anomalien, welche die Bildung dieser Ströme begleiten, sind mehr geeignet,

*) Man vergleiche hiermit die Arbeit *Nobili's* S. 350 dieses Bandes. — *B.*

diesen Satz zu bestätigen als umzustoſsen. Das Eisen, z. B. welches bis zur Rothglühhitze gegen Kupfer positiv ist, und bei der Hellrothglühhitze gegen dasselbe negativ wird, gibt einen Beweis dafür; denn man weiſs, daſs die Affinität dieses Metalls zum Sauerstoffe einen ähnlichen Gang nimmt. Mir scheint, man kann auf dieselbe Weise durch Wirkung des Oxygens und der in der Luft befindlichen Dünste die immer sehr schwache Spannung bei zwei heterogenen, ohne feuchten Leiter sich berührenden Metallen erklären, wenn man bedenkt, daſs stets eines dieser Metalle oxydirbarer ist als das andere.

Ich will nun nur noch einiges sagen, wie ich mir den Einfluſs der chemischen Wirkung auf die Richtung des electrischen Stromes vorstelle. Wenn ein Metall durch einen tropfbaren oder gasförmigen Stoff angegriffen wird, so erlangt die angegriffene Oberfläche positive Electricität, und diese verbreitet sich im Gas oder in der umgebenden Flüssigkeit. Das negative von dieser Oberfläche vertriebene Fluidum sucht aus dem Metalle durch alle guten Leiter zu entkommen, die daran gelöthet sind, und sowohl mit ihrer Oberfläche als mit ihrem Inneren communiciren. Die Intensität der zwei entwickelten Principe hängt von der Stärke der chemischen Wirkung ab. Taucht man nun zwei feste Körper in dieselbe Flüssigkeit, so wird jeder in diesen Zustand versetzt, und wenn man mit einem metallenen Leiter (der hier nicht Erreger ist) die hervorragenden Enden der Platten verbindet, so gestattet man dem negativen und positiven Fluidum jeder Platte sich zu vereinigen, und sich zu neutralisiren. So ist jede Platte die Quelle eines Stromes und die Leiterin des Stromes einer anderen, und der bestehende Strom ist durch die Differenz der Energie beider entgegengesetzter Ströme gebildet. Ist

die chemische Wirkung auf beide Metallflächen gleich grofs, so heben sich beide Ströme einander auf; wird keines der Metalle afficirt, so gibt es gar keinen Strom etc. etc. . . . .

Diese Art, die Electricitätsentwicklung zu erklären, scheint mir alle von verschiedenen Physikern erhaltenen Resultate zu erklären, besonders die auf die Natur der durch Berührung der Metalle und Flüssigkeiten entwickelten Electricität Bezug habenden, worüber *Becquerel* viele Thatsachen kennen gelehrt hat. Ich will mich mit diesen allein abgeben, weil sie mit meinem Satze im Widerspruche zu stehen scheinen, während sie ihn doch bestätigen. *Becquerel* stellte ein mit einer Flüssigkeit gefülltes metallenes Gefäfs auf einen Condensator, tauchte in die Flüssigkeit ein anderes Metall, welches er am anderen Ende hielt, und fand, dafs der Condensator bald positive, bald negative Electricität zeigte. Beim genauen Erwägen dieser Resultate schienen sie immer daher zu kommen, dafs die Flüssigkeit bald auf das eingetauchte Metall, bald auf das Gefäfs stärker wirkte. — — — —

Nach dieser Theorie hängt die Electricitätserzeugung in einem *Volta*'schen Elemente nicht von einem dem Körper eigenen electrischen Principe und von dessen Natur ab, sondern von der Differenz der Action, welche das chemisch wirkende auf der Oberfläche des festen Körpers ausübt; diese trennt die zwei electrischen Fluida von einander, wie die Reibung und der Druck, und jede mechanische Behandlung, wodurch Electricität in Umlauf gesetzt wird. Verhält sich dieses so, und bewirkt die Berührung keine Electricitätsentwicklung, so kann man behaupten, dafs diese Entwicklung nie ohne eine chemische Action vor sich gehe. Kann man nun die electro-chemische Theorie, nach welcher die Affinitäten der Körper zu einander das Resultat ihres verschiedenen

electrischen Zustandes sind, mit dem Vorhergehenden, besonders mit den Thatsachen vereinbaren, daſs ein Körper bald positiv, bald negativ gegen einen anderen ist? Ich füge zu den schon angeführten Fällen dieser Änderung noch ein Beispiel, das mir *Nobili* mittheilte, und das beweiset, daſs der Zustand der Festigkeit des oberflächlich angegriffenen Körpers die Intensität der entwickelten Electricität erhöht. Dieses Beispiel besteht darin, daſs Kalk im festen Zustande, in Salpetersäure getaucht, einen Strom erregt, in welchem er stark positiv erscheint, während er in Wasser aufgelöset mit derselben Säure nur einen sehr schwachen Strom erzeugt, dessen Richtung der des vorigen oft entgegengesetzt ist. Die electro-chemische Theorie scheint mir vorzüglich auf zwei Thatsachen zu beruhen: erstlich, daſs die Körper eine eigene Electricität besitzen, die durch Berührung aufgeregt wird, die Unrichtigkeit dieser habe ich bereits gezeigt; zweitens, daſs in einer mittelst der *Volta*'schen Säule bewirkten Zersetzung der eine Bestandtheil zum positiven, der andere zum negativen Pole übergeht. Aber ich habe in einem anderen Mémoire gezeigt, daſs die Zersetzung nicht durch die electrische Spannung und die sie begleitende Anziehung erzeugt wird, indem diese Zersetzung desto schneller vor sich geht, je besser die Flüssigkeit leitet, und je geringer daher die Spannung ist. Darum scheinen mir diese zwei Voraussetzungen nicht zuläſsig zu seyn, und die electro-chemische Theorie nicht auf fester Basis zu ruhen. Ich bin weit entfernt, zu läugnen, daſs bei der Verbindung zweier Körper, mithin bei einer chemischen Action, Electricität frei wird, denn ich gehe ja von diesem Grundsatze aus. Es ist aber wohl möglich und sehr wahrscheinlich, daſs von dieser Electricität die Wärme und das Licht herrührt, welche die chemische Wirkung be-

gleiten; daſs aber die Kraft, wodurch die chemische Wirkung erregt wird, die den Körpern eigene Electricität, und demnach die Affinität das Resultat der gegenseitigen Anziehung der zwei electrischen Principe sey, ist mir weder wahrscheinlich, noch mit den erwähnten Erfahrungen vereinbarlich.

2. Umstände, welche die Stärke des electrischen Stromes bestimmen.

Die Umstände, welche auf die Stärke des electrischen Stromes Einfluſs haben, lassen sich auf folgende drei zurückführen: 1) Auf die Differenz in der Stärke der chemischen Wirkung, welche die Flüssigkeit auf jedes Element eines Plattenpaares ausübt. Je gröſser diese Differenz ist, desto intensiver ist der Strom. 2) Auf den Grad der Leichtigkeit, womit der electrische Strom von einem festen Elemente des Plattenpaares in die dazwischen befindliche Flüssigkeit übergeht. Ich habe schon früher gezeigt, daſs die Electricität beim Übergang von einem Leiter in einen anderen stets einen Verlust erleidet, und werde zeigen, daſs die Gröſse dieses Verlustes von der Natur des festen und flüssigen Leiters abhängt. 3) Von der gröſseren oder kleineren Leichtigkeit, womit die Electricität von einem Theilchen der Flüssigkeit in das andere übergeht, d. h. von der Leitungsfähigkeit der Flüssigkeit. Man könnte vom theoretischen Gesichtspuncte aus auch noch die den Metallen eigene Leitungsfähigkeit berücksichtigen, aber in der Erfahrung zeigt sich der Einfluſs dieser gegen die drei vorhergehenden Einflüsse unmerklich. Es kann also die Stärke des electrischen Stromes als Function von drei, oder theoretisch genommen von vier veränderlichen Gröſsen angesehen werden, deren Form bestimmt werden soll; oder mit anderen Worten: die Auflösung der

Frage besteht darin, die allgemeinen Gesetze (wenn es welche gibt), unter denen die Ursachen der Änderung der Intensität stehen, und die beständigen Coefficienten für jeden besonderen Fall, wo möglich, zu bestimmen. Darum muſs man jeden dieser Umstände isolirt untersuchen, und dann auf die aus ihrer vereinten Wirkung resultirende Stärke des Stromes schlieſsen.

Zuerst hängt die Stärke des Stromes von der Differenz der chemischen Wirkung ab. Diese Differenz kann von der Heterogeneität der festen Bestandtheile eines Paares, oder wenn diese homogen sind, davon abhängen, daſs die angegriffene Oberfläche des einen kleiner, oder diese weniger oxydirt oder aus einem anderen Grunde besser angegriffen ist, als die andere. Bei heterogenen Körpern ist der Strom desto stärker, je verschiedener die zwei festen Elemente in Beziehung auf die chemische Wirkung der Flüssigkeit sind. Daher gibt Eisen, das in verdünnter Schwefelsäure weniger angegriffen wird als Zink, und mehr als Kupfer, mit jedem dieser Metalle bei Anwendung dieser Säure einen schwächeren Strom, als Kupfer und Zinn mit einander. Es gibt zwar mehrere scheinbare Ausnahmen von diesem Gesetze, sie erklären sich aber vollkommen, wenn man zugleich die anderen Ursachen, die den Strom bestimmen, berücksichtiget. Z. B. Platin gibt mit Zink einen schwächeren Strom als Kupfer, und doch ist der Unterschied zwischen der chemischen Wirkung auf Zink und auf Platin gröſser, als zwischen der auf Zink und Kupfer; die Folge wird aber zeigen, daſs der Electricitätsverlust beim Übergang vom Platin in das Fluidum grösser ist, als beim Übergang vom Kupfer in dasselbe. Ich muſs hier vorläufig zum Beweise der Richtigkeit dieser Erklärung sagen, daſs die Leichtigkeit, womit der electrische Strom von einem Metall in die Flüssigkeit über-

geht, nicht bloſs von der Natur dieser zwei Körper, sondern auch von der mit der Flüssigkeit in Berührung stehenden Fläche abhängt. Man kann daher diese Fläche beim Platin gröſser machen, als beim Kupfer, so daſs der Strom im ersten nicht mehr verliert, als im zweiten. Das Verhältniſs dieser Flächen bei Platin und Kupfer ist demnach so, daſs die Änderung des Leiters in beiden eine gleiche Wirkung erzeugt *).

Macht man aber mit zwei vollkommen gleichen Zinkflächen zwei Plattenpaare, bei deren einem das Platin, beim anderen das Kupfer negativ seyn soll, und gibt ihren Oberflächen das genannte Verhältniſs, so findet man, wie ich mich oft überzeugt habe, daſs das Paar mit Platin einen stärkeren Strom gibt, als das mit Kupfer, denn da wirkt immer mehr der Unterschied der chemischen Action, um deren Einfluſs es sich handelt. Auf solche Weise erklärt man auch die Anomalien, die *Marianini* bemerkte, als er die Stärke des Stromes in Plattenpaaren aus verschiedenen Metallen untersuchte. Man würde auf dieselben scheinbaren Unregelmäſsigkeiten stoſsen, wenn man verschiedene Flüssigkeiten zu Leitern wählte; denn die Flüssigkeit, deren Wirkungsunterschied auf die Metalle gröſser ist, als der einer anderen, kann doch einen schwächeren Strom erzeugen, wenn sie der Electricität beim Übergange in sie ein gröſseres Hinderniſs in den Weg stellt. Man kann es daher als Grundsatz gelten lassen, daſs bei übrigens gleichen Umständen die Stärke des electrischen Stromes von

*) Da dieses Verhältniſs für Electricität von verschiedener Stärke verschieden ist, so muſs man es für den Fall, um den es sich handelt, mit einem Strom bestimmen, der nahe eben so stark ist, wie derjenige, den man mit dem gleich darauf anzuwendenden Plattenpaare erhält.

der Differenz der chemischen Wirkung der Flüssigkeit abhänge.

So oft der electrische Strom von einem festen Leiter in einen flüssigen übergeht oder umgekehrt, verliert er einen Theil seiner Stärke, und dieser Theil ist von der gröfseren oder kleineren Leitungsfähigkeit der zwei Substanzen ganz unabhängig. Dieses habe ich in einem frühern Mémoire bewiesen, indem ich in der Flüssigkeit metallene Querstücke anbrachte, durch welche die Electricität gehen mufste. Ein Galvanometer zeigte unter diesen Umständen stets eine Verminderung des electrischen Stromes an, die nach Umständen gröfser oder kleiner war *). Da der Weg, den die Electricität bei einem Plattenpaare nehmen mufs, immer durch verschiedene Leiter führt, so mufs dieser Einflufs immer Statt finden. Um ihn näher kennen zu lernen, wollen wir das Phänomen selbst von verschiedenen Seiten betrachten, und zuerst die allgemeinen Gesetze aufsuchen, nach denen er sich richtet, und die unabhängig sind von der Natur der festen und flüssigen Leiter, und hierauf das näher betrachten, was von der Natur dieser Leiter abhängt.

Ich habe in meinem früheren Mémoire zwei Gesetze aufgestellt. Nach dem ersten ist der Verlust der Electricität, wenn diese einige Male von einem festen Leiter in einen flüssigen übergeht, desto kleiner, je gröfser ihre Intensität ist, und demnach nicht immer derselbe aliquote Theil der ursprünglichen Stärke des Stromes; nach dem zweiten verliert von zwei gleich starken Strömen derjenige, welcher am öftesten das Mittel gewechselt hat, durch einen neuen Wechsel weniger als der andere. Nach diesem war es mir leicht, einige Folge-

*) *Annals de Chim. et de Phys. Tome* 28, *p.* 208.

rungen, die Wirkungen einer Säule mit großsen oder vielen Platten betreffend, abzuleiten, die ich auch durch directe Versuche bekräftigte.

Fast gleichzeitig kam *Marianini* auf einem ganz anderen Wege zu ähnlichen Resultaten; insbesondere hat er den Grundsatz aufgestellt, daſs die theilweise Schwächung beim Übergange von einem Plattenpaare zum anderen desto geringer ist, je öfter der Strom schon von einem Paare in die Flüssigkeit übergegangen ist; doch scheint es mir nicht, als hätte er angegeben, es folge aus seinen Versuchen, die Verminderung der Electricität bei einem Wechsel des Mittels sey desto geringer, je intensiver diese aus was immer für einer Ursache selbst ist. *Marianini* setzt ohne Beweis voraus, ein unvollkommener Leiter wirke wie ein System abwechselnd auf einander folgender mehr oder weniger leitender Substanzen, und erklärt daraus die physischen und physiologischen Wirkungen der Säulen mit vielen Platten. Auch muſs ich bemerken, daſs die allgemeinen Folgerungen, zu denen *Marianini* gelangt, aus Versuchen gezogen wurden, die so sehr im Kleinen angestellt wurden, daſs man an ihrer Genauigkeit zweifeln könnte, wenn man sie nicht auch bei gröſseren wahrgenommen hätte; auch weiſs ich nicht, ob der Ablenkungswinkel einer Magnetnadel in demselben Verhältnisse gröſser wird, in welchem die Intensität der Ströme wächst. Man darf nicht übersehen, daſs die Formel, die nach *Marianini* die Wirkung einer *Volta*'schen Säule ausdrückt, nur für einen sehr schwachen Strom richtig ist, nämlich da, wenn es sich um Fälle handelt, auf welche die Formel sich stützt, daſs sie aber für energisch wirkende Apparate immer weit von der Wahrheit abweicht, welches, wie ich glaube, daher kommt, daſs *Marianini* als Grundsatz die Proportionalität zwischen starken und schwachen Wir-

kungen der Electricität angenommen hat. Die oben angeführten zwei Gesetze beziehen sich nur auf die Beschaffenheit der Electricität, und auf die Zahl der Abwechslungen. Ich wollte aber auch den Einfluſs der Ausdehnung der Oberfläche der Platten, welche die Flüssigkeit berührt, bestimmen. Man weiſs schon aus *Gay-Lussac's* und *Thenard's* Arbeiten, daſs der Strom desto stärker wirkt, je gröſser diese Berührungsfläche ist; ich wollte aber ausmitteln, nach welchem Gesetze die Stärke des Stromes mit der Einsenkungsfläche zunimmt. Zu diesem Ende tauchte ich in ein mit einem flüssigen Leiter gefülltes Gefäſs zwei Platinplatten mit einem Quadratzoll Oberfläche, deren eine von der anderen 4 L. abstand; ich will diesen Apparat ein einfaches System nennen. In zwei andere ganz gleiche Gefäſse, welche dieselbe Flüssigkeit enthielten, tauchte ich auch zwei Platinplatten in derselben Entfernung von einander, die aber nur mit einer Fläche von $^1/_2$ Quadratzoll mit der Flüssigkeit in Berührung standen; ich brachte zwei und zwei der Platten, die in verschiedenen Gefäſsen standen, in metallinische Berührung. Diesen Apparat will ich ein Doppelsystem nennen, und ein Tripelsystem jenen, wo sechs nur auf $^1/_3$ Z. eingetauchte Platten zu zwei und zwei in drei verschiedenen Gefäſsen eben so verbunden wurden. In allen diesen Systemen war die Totalsumme der mit der Flüssigkeit in Berührung stehenden Oberflächen dieselbe; auch die Entfernung der gegenüberstehenden Platten war allenthalben gleich groſs, nämlich gleich 4 L.; der einzige Unterschied bestand, wenn man die verschiedenen Systeme einzeln in den *Volta*'schen Kreis brachte, darin, daſs der Strom im ersten von einer Platte zur anderen ging, im zweiten sich zwischen zwei mit einander leitend verbundene und mit einem Pol communicirende Platten theilte, oder in die

zwei anderen entgegengesetzten, eben so verbundenen und mit dem anderen Pol communicirenden überging, endlich dafs er sich im dritten unter drei Platten vertheilte, die auch metallinisch sich berührten, um in die drei entgegengesetzten überzugehen. Ist die Stärke des Stromes der Gröfse der Berührungsfläche der Flüssigkeit direct proportionirt, so müssen diese drei Systeme gleich gut leiten; denn dann leitet die Summe der zwei gleichen Theile des Doppelsystems wie das einfache System allein, und die Leitungsfähigkeit jedes ist immer die Hälfte von der des einfachen Systems. Eben so, wenn die Summe der drei gleichen Theile des Tripelsystems wie das einfache leitet, so heifst es, dafs die Leitungsfähigkeit jedes ein Drittel von der des einfachen ist, und da die Oberfläche jedes Theils des Systems ein Drittel von der des einfachen beträgt, so finden wir auch hier obige Proportionalität. So ist es aber nicht. Mehrere Versuche, die ich mit verschiedenen Flüssigkeiten, wie z. B. mit verdünnter und concentrirter Salpetersäure, und mit Strömen von verschiedener Stärke anstellte, haben gezeigt, dafs bald dieses, bald jenes System am besten leite, und dafs dieser Unterschied der Leitungsfähigkeit von einem einzigen Umstande, nämlich von der Stärke des Stromes abhänge. So war für einen schwachen Strom das einfache System ein besserer Leiter, als das Doppel- und Tripelsystem, für einen stärkeren Strom übertraff das Tripelsystem das einfache; endlich für einen noch stärkeren hatte das einfache System die geringste Leitungsfähigkeit. Wie es sich immer verhalten mag, so kann man doch allgemein behaupten, dafs ein einfaches System einen schwachen Strom, ein mehrfaches aber einen bedeutenden besser leitet. Es gibt einen Strom von bestimmter Stärke, für welchen beide Systeme gleich gute Leiter sind; für einen stärkeren ist

es das mehrfache, für einen schwächeren das einfache, das beim Wechsel des Mittels die geringste Schwächung desselben bewirkt.

Es ist Schade, dafs man für Electricität nicht ein ähnliches Instrument hat, wie das Thermometer für die Wärme, nämlich ein Vergleichungsinstrument. Wir fühlen hier schon die Nothwendigkeit, den Grad der Stärke der Electricität anzuzeigen; wir können sie aber nicht anders anzeigen, als z. B. durch die Anzahl der Plattenpaare, die zur Erzeugung dieses Effectes nöthig sind; aber die Kraft eines solchen Apparates hängt von so vielen Umständen ab, dafs eine solche Anzeige unzulänglich seyn mufs. Ich kann daher für jetzt, wie bisher, die Sache nur allgemein bezeichnen; nur will ich bemerken, dafs eine Säule von zehn Plattenpaaren mit 40 Theilen Wasser, 1 Theil Schwefelsäure und 1 Theil Salpetersäure, Electricität von allen zur Erzeugung der erwähnten Phänomene nöthigen Graden liefert, wenn man ein, zwei, drei u. s. w. Paare derselben braucht. Ich erhielt sie auch mit einer schwachen Säule von vierzig Plattenpaaren; bei Anwendung von zwanzig derselben hatten alle drei Systeme gleiche Leitungsfähigkeit, bei zehn oder vierzig war diese für das eine oder das andere gröfser. Endlich, um noch ein Beispiel anzuführen, leitete bei Anwendung concentrirter Salzsäure das einfache System besser als das Tripelsystem, wenn der Strom nach seinem Durchgange durch das erste die Nadel des Galvanometers um 60° ablenkte, während bei einer Ablenkung von 65° unter denselben Umständen alle gleich gut leiteten, und wenn der Ablenkungswinkel 70° oder gar 75°—85° betrug, leitete das Tripelsystem besser als das einfache, und die Ablenkung betrug 10° zu Gunsten des erstern. Welchem Electricitätsgrade die Anzeigen meines Galvanometers entsprechen, konnte

ich vor der Vergleichung der Intensitäten der Ströme nicht angeben. Um die relative Leitungsfähigkeit der zwei Systeme zu bestimmen, brauchte ich eine Säule, deren Wirkung während der Dauer des Versuches als constant angesehen werden konnte, und ich brachte abwechselnd eines oder das andere System in die Kette, verglich in beiden Fällen die Ablenkung der Magnetnadel des Galvanometers, und konnte so leicht beurtheilen, in welchem Falle der Strom am wenigsten verloren hatte. Ich habe mich aber auch oft des doppelten Galvanometers bedient, wie ihn *Becquerel* *) zur Vergleichung der Leitungsfähigkeit der Metalldrähte brauchte. Man ist beim Gebrauche dieses Instrumentes von den Änderungen der Säule ganz unabhängig, weil die zwei Körper oder Körpersysteme, deren Leitungsfähigkeit verglichen werden soll, zugleich im Kreise sich befinden. So lange beide gleich gut leiten, ruht die Nadel, sobald einerseits der Strom stärker ist als andererseits, erfolgt eine Bewegung derselben, und die Richtung derselben zeigt, wo der stärkere sich befindet. Es ist begreiflich, daſs dieser Apparat die kleinsten Unterschiede der Leitungsfähigkeit anzeigt; man muſs sich aber vor dem Gebrauche dieses Instrumentes sorgfältig versichern, daſs im Falle zweier ganz gleicher Leitungen kein Strom von was immer für einer Stärke eine Bewegung an der Magnetnadel erzeugt. Beide Methoden haben mich genau zu demselben Ziele geführt, die letztere gab aber präcisere und mehr constante Resultate. Diese scheinen auf den ersten Blick etwas bizarr, doch halte ich sie für erklärbar, wenn man sie genau überlegt. Sie scheinen anzuzeigen, daſs für einen schwachen Strom die Zunahme der Intensität bei der Vergröſserung der Oberfläche schneller

*) *Annal. de Chim. et de Phys. Tome* 32, *p.* 420. Diese Zeitschrift, Bd. III. S. 106.

wächst, als diese Vergröſserung, und daſs für einen starken Strom das Gegentheil Statt findet; denn wir sehen, daſs die ganze Oberfläche im ersten Falle eine mehr als doppelte Leitungsfähigkeit besitzt, im zweiten Falle aber eine geringere. Aber die Einwirkung der Oberfläche auf die Erleichterung des Durchganges der Electricität muſs bei einem schwachen Strom kräftiger als bei einem starken seyn, weil schwache Electricität nach dem ersten Gesetze eine im Verhältniſs zu ihrer Stärke gröſsere Schwierigkeit findet, das Mittel zu wechseln. Alle diese Thatsachen finden in der Bemerkung *Wollaston's* eine Bestätigung, nach welcher in einer Säule die Stärke des Stromes durch Vergröſserung der Kupferfläche gesteigert wird. *Marianini* hat gefunden, daſs diese Steigerung nur Statt findet, bis die Kupferfläche die des Zinkes sieben oder acht Mal übertrifft. Da wird durch Vergröſserung der Kupferfläche das ersetzt, was durch die Schwierigkeit des Übergangs vom Kupfer in die Flüssigkeit entgeht. Bei einem starken Strom muſs aber der Einfluſs der Vergröſserung der Oberfläche viel geringer seyn, wovon ich mich auch überzeugte. Ich lieſs zu diesem Ende zwei sehr groſse *Volta*'sche Elemente bereiten, an einem hatte das Zink nur die Hälfte, am anderen nur $^1/_4$ der Fläche des Kupfers, die Fläche dieses war aber in beiden gleich groſs. Diese beiden Apparate gaben, in dieselbe Flüssigkeit getaucht, keine merklich verschiedene Wirkung, wie der Strom schwach war; so wie man aber eine stärkere Flüssigkeit brauchte, und der Strom stärker wurde, gab die Säule, bei welcher die Zinkfläche gröſser war, stärkere Wirkung. Dieses kommt offenbar davon her, daſs im Falle einer grossen Intensität die Erleichterung des Übergangs durch Vergröſserung der Fläche verhältniſsmäſsig kleiner ist. Aus allem Vorausgehenden folgt daher: 1) Daſs die Ver-

größerung der Oberfläche den Übergang des Stromes erleichtert; 2) daſs die daraus hervorgehende Steigerung des Stromes in einem gröſseren Verhältnisse wächst, als die Oberfläche selbst, wenn der Strom schwach ist; 3) daſs das Gegentheil eintritt, wenn der Strom stark ist; 4) daſs es ohne Galvanometer unmöglich ist, anzugeben, wie groſs die Stärke der Electricität ist, bei welcher dieses Verhältniſs anfängt, sich zu ändern, eine Stärke, die übrigens veränderlich ist, und von der Natur des Metalls und der Flüssigkeit abhängt; 5) daſs (nach 2 und 3) man durch Vermehrung der Metallfläche bei schwacher Electricität mehr gewinnt, als bei sehr starker.

Die Stärke des electrischen Stromes hängt übrigens noch von der relativen Beschaffenheit der festen und flüssigen Substanzen ab, durch welche der Strom geht, und sie ändert sich, wenn man bei demselben Metalle die Flüssigkeit wechselt, oder bei derselben Flüssigkeit andere Metalle anwendet; sie erleidet sogar eine Verminderung bei ihrem Übergange von einer flüssigen Substanz in eine andere unmittelbar daran grenzende, oder beim Durchgange durch einen aus zwei heterogenen Metallen bestehenden Leiter. Bei den erhaltenen Resultaten wurden immer die Differenzen berücksichtiget, welche von der eigenen Leitungsfähigkeit jeder Substanz und von anderen Ursachen herrühren, auſser der, welche von der Änderung des Leiters stammt. Bei Versuchen muſste man einen sehr schwachen Strom anwenden, weil da die Differenzen am merklichsten werden. Ich stelle deren mit verschiedenen Metallen, als Platin, Gold, Silber, Quecksilber, Kupfer, Eisen, Blei, Zink und Zinn an, so wie mit verschiedenen Flüssigkeiten, wie mit Salpeter-, Schwefel- und Salzsäure im reinen und verdünnten Zustande, mit essigs. Ammoniak, Pott-

asche, einigen Salzlösungen, wie mit Kochsalz, Salmiak, und schwefels. und salpeters. Salzen. Diese Versuche wurden mit Säulen von verschiedener Stärke, von einem Elemente bis zu 120 Plattenpaaren angestellt, und endlich in jedem Falle die Wirkung mehrerer Metallsalze in der Flüssigkeit vorgenommen. Die Zahl der wechselnden Metalle belief sich bis auf 8, selten darüber; es ist mir aber unmöglich, hier nur einen Theil der Resultate, die mir mit Fleiſs angestellte, über ein Jahr fortgesetzte Versuche dieser Art gaben, anzuführen. Für jetzt will ich nur einige Resultate, die ich beim Vergleich der Leitungsfähigkeit mehrerer aus demselben Metall und verschiedenen Flüssigkeiten, oder aus derselben Flüssigkeit und mehreren Metallen bestehenden Systemen erhielt, mittheilen. Ich bediente mich, wie vorhin, des einfachen Galvanometers, und nahm einen Versuch nach dem anderen vor, oder des Doppelgalvanometers (*Nobili's* Multiplicators, *B.*), der gleichzeitig mehrere Versuche anzustellen gestattete, und bei welchem die Vergleichung genauer wird, besonders wenn man einen Strom anwendet, der vermöge seiner Natur schnelle Veränderungen erleidet, wie z. B. ein sehr starker und durch eine kleine Plattenzahl bewirkter Strom. Ich begann diese Versuche mit mehreren Flüssigkeiten und Platin, einem fast unangreifbaren Metall. Zu diesem Behufe bediente ich mich kleiner, cylindrischer, einen Zoll und weniger weiter Gläser mit der Flüssigkeit, und zweier einander parallel darein gestellter Platinplatten, die um 4 L. von einander entfernt waren. Jede Platte war auf einen Quadratzoll, oder, wenn man beide innere Seiten berücksichtiget, auf zwei Quadratzoll in die Flüssigkeit getaucht. Wollte man die Wirkung mehrerer Abwechslungen von Platin und Flüssigkeit untersuchen, so nahm man mehrere neben einander stehende Gläser,

die mit gekrümmten Platinstreifen mit einander verbunden waren, welche in jede Flüssigkeit vertical auf einen Quadratzoll grofse Oberfläche eingetaucht waren.

Alle diese Metallbögen waren hierauf mittelst einer gefirnifsten Holzleiste verbunden, damit die zu zwei Bögen gehörigen, und in dasselbe Glas getauchten Platten immer einerlei Entfernung behielten, und der ganze Apparat vollkommen fest war. Man konnte leicht zwei, vier, sechs, acht und mehr Platten mittelst kleiner, kupferner, angelötheter Querstäbe mitten an jedem Bogen, und senkrecht auf die Holzleiste in den Strom bringen; der Apparat glich daher in seiner Zusammensetzung einem Trogapparate, nur mit dem Unterschiede, dafs die Metalle homogen waren.

Ich brauchte aber zwei vollkommen ähnliche Apparate, um ein Metall mit zwei Flüssigkeiten gleichzeitig versuchen zu können. Unter allen Flüssigkeiten verminderte die Salpetersäure, wenn sie sich zwischen der Platinplatte befand, den electrischen Strom am wenigsten, doch war der Verlust merklich; nach dieser folgt Salzsäure, und hierauf Schwefelsäure. Reine, aber stark verdünnte Salpetersäure vermindert den Strom mehr als concentrirte, verdünnte Schwefelsäure hingegen weniger als concentrirte. Nach den genannten Säuren folgen Pottasche und Ammoniak, die fast gleiche Wirkung ausüben, und die Salzlösungen, die den Strom weniger schwächen als die Alkalien, aber mehr als die Säuren. Diese Resultate sind frei von jedem Einflusse der Leitungsfähigkeit der Flüssigkeiten. Ich habe mich überzeugt, dafs der Strom, welcher durch jede der Flüssigkeiten gegangen war, deren ich mich bediente, nicht merklich geschwächt wurde, wenn man den in der Flüssigkeit zurückzulegenden Weg verlängerte, um so weniger, als diese Flüssigkeit im Querschnitt stets nur ei-

nen Quadratzoll hatte, und die zwischen den zwei Polen enthaltene Säule nicht über 1 F. lang war. Wenn es wahr ist, daſs eine Vermehrung der Anzahl der Moleculs des Flüssigen auf das Doppelte, Dreifache etc. die Intensität nicht schwächt, so muſs man daraus schliessen, daſs der Verlust der Electricität in diesem Falle Null oder fast Null ist, in so ferne er vom Leitungsvermögen abhängt, und daſs der Unterschied in der Leitungsfähigkeit einer ganz metallischen und einer gemischten Kette von der Schwierigkeit abhängt, mit welcher die Electricität vom festen Leiter in den flüssigen übergeht, nicht aber von den Hindernissen im flüssigen Leiter selbst. Einen noch frappanteren Beweis werden wir darin finden, daſs man einen gemischten Leiter von derselben Güte, wie einen metallischen, erhalten kann, wenn man den beim Wechsel des Leiters erfolgenden Verlust verschwinden macht. Wir werden sehen, daſs dieses der gewöhnlichen Ansicht ganz entgegen ist, nach welcher man die Verminderung der Electricität der unvollkommenen Leitungsfähigkeit der Flüssigkeiten zuschreibt, deren gröſster Theil nur von dem Wechsel des Leiters herrührt. Dieses kann man dadurch beweisen, daſs man in den Kreis mittelst gleich langer und gleich dicker Platindrähte Schwefel- und Salpetersäure in sehr reinem Zustande bringt, und dafür sorgt, daſs die Säuren in ganz gleichen Röhren sich befinden; da findet man, daſs die Schwefelsäure viel weniger leitet als die Salpetersäure, und daſs eine Verminderung in der Länge der ersteren, statt den Unterschied auszugleichen, keinen merklichen Einfluſs darauf ausübt. Taucht man aber die Platindrähte in Salpetersäure, bevor sie in die Schwefelsäure kommen, so gleicht sich die Leitungsfähigkeit beider fast aus, so lange die dünne Salpetersäureschichte nicht ganz verschwunden ist, welches beweiset, daſs

der zuerst bemerkte grofse Unterschied nur von der Schwierigkeit des Mittelwechsels abhängt, die bei der Salpetersäure geringer ist als bei der Schwefelsäure. Will man sich gegen die kleinen von der Leitungsfähigkeit der Flüssigkeiten herrührenden Differenzen verwahren, so darf man nur die Gröfse des Querschnittes der Flüssigkeit beständig lassen, und allein die Anzahl der Abwechslungen vermehren. Ich habe in folgender Tafel die Resultate der Versuche angegeben, die ich mit 0, 1, 2, 3 Alternativen erhielt, wobei ich mit Alternative 0 den Fall bezeichne, wo die zwei Platinplatten in dasselbe Glas reichen, mit Alternative 1, wo sie in zwei verschiedene mit einer Platinalternative verbundene Gefäfse reichen, u. s. f. Die Wirkung ist durch die Gröfse des Ablenkungswinkels der Nadel am Galvanometer angegeben. Vergleichbar sind jene Resultate unter einander, wo die Ablenkung, mithin die Stärke des Stromes dieselbe oder fast dieselbe ist, so wie im Falle der Alternative 0. Diese sind zusammengestellt.

Versuche mit einer Säule von 40 Plattenpaaren.

Zahl d. Abwechslungen.	0	1	2	3
Concent. Salpetersäure	65°	61°	59°	57°
» Schwefelsäure	64	56	48	40
Verdünnte Schwefels.	62	59	52	44
Ammoniak	64	53	46	36
Essigsäure	61	47	38	29
Concentrirte Salpeters.	74	72	70	68
Verdünnte Schwefels.	74	70	67	62
Concentrirte Salpeters.	77	76	74	72
» Schwefels.	78	76	74	69

Versuche mit einer Säule von 20 Plattenpaaren.

Zahl d. Abwechslungen.	0	1	2	3
Concent. Salpetersäure	67°	61°	52°	41°
» Schwefelsäure	72	63	44	12
Ammoniak	64	45	34	23
Concentrirte Schwefels.	52	31	7	kaum merkl.
Verdünnte »	52	36	13	3
Concentrirte Salpeters.	78	74	69	61
Verdünnte »	78	73	67	53
Salzsäure	77	73	68	57

Diese Tafeln zeigen die schon bekannte Wahrheit, daſs der Verlust der Electricität verhältniſsmäſsig stärker ist, wenn sie von 20, als wenn sie von 40 Plattenpaaren kommt. Daher rührt es auch, daſs die von den Flüssigkeiten herstammenden Differenzen in der zweiten Tafel am merklichsten sind. Aber auch dieselbe Flüssigkeit, wie Ammoniak, welche in der ersten Tafel den Strom mehr schwächt als Schwefelsäure, vermindert ihn in der zweiten mit derselben Anzahl der Abwechslungen weniger als dieselbe Säure. Diese Anomalie ist nicht die einzige, auf welche ich stieſs. Eine andere noch mehr bizarre ist diese: Ich brauchte in einem Systeme von drei Abwechslungen mit concentrirter Schwefelsäure statt einem Gefäſs mit dieser Säure, eines mit Ammoniak, und glaubte dadurch die Leitungsfähigkeit des Systemes nicht zu ändern, weil ich mich vorher überzeugt hatte, daſs die Leitungsfähigkeit des Ammoniaks ohne Abwechslung der der Schwefelsäure mit einer Abwechslung gleiche, fand aber die Leitungsfähigkeit des gemischten Systemes viel gröſser, als die des reinen. Das-

selbe Resultat erhielt ich, wenn ich Ammoniak mit einer eben so leitenden Flüssigkeit ersetzte, z. B. mit sehr verdünnter Schwefelsäure. Man kann daraus den allgemeinen Satz ableiten, dafs ein Strom von bestimmter Intensität bei einer bestimmten Anzahl von Abwechslungen in einem geringeren Verhältnisse geschwächt wird, wenn er auf die beim Durchgange durch einen flüssigen unvollkommenen Leiter ohne Abwechslung vorhandene Stärke reducirt ist, als wenn er beim Durchgange durch einen guten Leiter oder eine bestimmte Anzahl von Abwechslungen dahin gebracht ist. Ein anderes sehr sonderbares Phänomen bot sich mir dar, als ich zwischen zwei in der Kette befindlichen Plattenblechen ein Gemische von zwei gleichen Theilen Salpetersäure und Wasser anbrachte. Diese Flüssigkeit gestattete einen schwächeren Strom, als wenn die Säure concentrirt gewesen wäre, aber die Magnetnadel wich um 5° mehr ab. Hier gab es keine Abwechslung, der Apparat bestand blofs aus zwei Plattinblechen, die in die verdünnte Säure reichten. Als ich den negativen Draht weggenommen, und einen Augenblick der Luft ausgesetzt, hierauf aber an seinen Platz gebracht hatte, war der Strom anfänglich nicht mehr so stark, und das Maximum der Abweichung stellte sich erst einen Augenblick darauf ein. Als ich den positiven Draht wegnahm, und wieder an seine Stelle brachte, erreichte der Strom gleich sein Maximum. Ich vermuthe, dieses komme von einer Anhäufung von etwas salpetriger Säure um den negativen Draht her, welche, indem sie am Metalle eine Schichte bildete, den Übergang des Stromes erleichterte. Ich prüfte diese Vermuthung, indem ich in dieselbe Säure den negativen Pol tauchte, bevor ich ihn in die leitende Flüssigkeit brachte, und wirklich erreichte die Nadel ihre gröfste Ablenkung, sobald diese Schichte ganz gebildet war.

Taucht man mehrere Abwechslungen von Platin in die mit Wasser verdünnte Säure, so gelangt die Nadel nicht gleich zu ihrer gröfsten Ablenkung, sondern durch eine von 5°—5° erfolgende sprungweise Bewegung, und die Zahl der Sprünge gleicht jener der Abwechslungen; und wirklich ist jede successive Vermehrung des electrischen Stromes durch eine Anhäufung einer Schichte von salpetriger Säure an jeder Metallfläche determinirt, woraus eine Erleichterung des Übergangs der Metalle in die Flüssigkeit hervorgeht. Ich habe, um diese Anomalien genau kennen zu lernen, ein Doppelgalvanometer und zwei Systeme von ähnlichen Platinabwechslungen in verschiedenen Flüssigkeiten gebraucht. Diese zwei Systeme wurden gleichzeitig in die Kette gebracht, und der Strom vertheilte sich in ihnen nach Verhältnifs ihrer Leitungsfähigkeit. In diesem Falle zeigte die Richtung der Ablenkung der Magnetnadel, durch welches System der Strom am leichtesten geht. Auf diesem Wege gelangte ich zu denselben Resultaten, wie durch einfache Vergleichung der Ablenkungswinkel der Nadel des einfachen Multiplicators. Dessen ungeachtet suchte ich eine gleiche Leitungsfähigkeit zweier Systeme zu erzielen, indem ich die gröfsere Leitungsfähigkeit des einen durch Verminderung der mit der Flüssigkeit in Berührung stehenden Metallfläche, oder durch Vermehrung der Anzahl der Abwechslungen, durch welche der Strom gehen mufste, abänderte. Die erste Art der Compensation führte mich nicht, oder nur sehr selten, zum Ziele, weil der Strom sehr stark war; so z. B. leitete das System mit Salpetersäure immer besser als das mit Schwefelsäure bei einer gleichen Anzahl von Abwechslungen, selbst wenn die Berührungsfläche im ersten zehn Mal gröfser war als im zweiten. Die andere Art der Ausgleichung gab entscheidendere Resultate. Hier folgen einige

Beispiele. Die zwei Flüssigkeiten, welche mit einander verglichen wurden, waren concentrirte Schwefel- und Salpetersäure, die Platinplatten waren in beide gleich eingetaucht. Bei einer Abwechslung ging der Strom ganz durch die Salpetersäure; mit einer Abwechslung in der Schwefelsäure, und zwei in der Salpetersäure, zeigte die Magnetnadel eine Ablenkung von 30°, und hierauf eine von 20° zu Gunsten der Schwefelsäure. Jedes System allein in den Kreis gebracht gab eine Ablenkung von 65°. Wurde die Anzahl der Abwechslungen verdoppelt, so wich die Nadel um 20° zu Gunsten der Salpetersäure ab, und der Strom bewirkte beim Durchgehen durch eines oder das andere der zwei Systeme eine Ablenkung von 20° — 30°. Hieraus folgt, daſs die zwei vereinten Abwechslungen in der Schwefelsäure schlechter leiten, als vier in der Salpetersäure, wiewohl eine Abwechslung der erstern Säure besser als zwei der zweiten leitet. Ich glaube die Erklärung dieser Anomalie darin zu finden, daſs der Strom im erstern Falle stärker ist als im zweiten, indem er durch die gröſsere Anzahl von Abwechslungen eine gröſsere Schwächung erlitten hat. Da man nun weiſs, daſs eine Differenz in der Stärke der Electricität das Verhältniſs zwischen der Leitungsfähigkeit ähnlicher Systeme abändert, so darf man sich nicht wundern, daſs dieses hier eintritt. Zur Begründung dieser Erklärung erwähne ich, daſs ich, als ein gleich ursprünglich schwächerer Strom angewendet wurde, fand, zwei Abwechslungen der Salpetersäure leiten besser, als eine der Schwefelsäure. Wir können daher den Schluſs ziehen, daſs jedes System, worin Schwefelsäure den flüssigen Leiter abgibt, verhältniſsmäſsig durch eine Differenz in der Stärke des Stromes mehr gewinnt oder verliert, als ein System mit Salpetersäure. Ich halte es für überflüssig, zu sagen, daſs

drei Abwechslungen in Salpetersäure weniger gut als eine, und besser als zwei in der Schwefelsäure leiten. Auch Salz- und Salpetersäure gaben immer bei der Vergleichung beider einige interessante Resultate. Mit einer Abwechslung in jeder erhielt ich 48° Ablenkung von Seite der Salzsäure, und der durch jedes einzelne System gehende Strom gab 75°; mit zwei, drei und vier Abwechslungen ergaben sich immer einige Grade mehr zu Gunsten der Salzsäure, aber mit fünf Abwechslungen hatte ich 15° von Seite der Salpetersäure; der durch jedes einzelne System gehende Strom gab 30°. Diese Versuche zeigen, dafs für eine gleiche Anzahl Abwechslungen die Salzsäure besser leitet als die Salpetersäure, falls die Electricität stark ist, und minder gut, wenn diese schwach ist. Dieses Phänomen bewährte sich bei der Anwendung sehr starker und sehr schwacher Ströme. Man kann den Versuch leicht wiederholen, indem man zwei Platinplatten oder Drähte in Salzsäure, und zwei andere in Salpetersäure taucht. Wenn die Electricität stark ist, geht der Strom leichter durch die Salzsäure, wenn sie schwach ist, leichter durch Salpetersäure.

Es bleibt mir nur noch übrig, von den zahlreichen Phänomenen zu sprechen, welche bei verschiedenen festen Leitern eintreten. Ich habe schon im vorigen Mémoire gesagt, dafs Kupfer den Strom leichter in eine Flüssigkeit übergehen läfst, als Platin, und Zink leichter als Kupfer; ich habe auch hinzugesetzt, dafs mir die Leichtigkeit dieser Transmission von der Stärke der auf das Metall ausgeübten chemischen Wirkung abzuhängen scheint. Eine Menge Versuche haben dieses bestätiget. Um die kleinsten Differenzen wahrzunehmen, ist es besser, sich eines sehr schwachen Stromes zu bedienen. Ich füllte zwei Gefäfse mit derselben Flüssigkeit, und tauchte in jedes ein *Volta*'sches Plattenpaar, das sich am

Ende des Drahtes eines Galvanometers befand. Wurden beide Flüssigkeiten mittelst Metallbögen von gleicher Gröſse und Oberfläche, aber verschiedener Natur, verbunden, so konnte ich leicht mit der Ablenkung der Magnetnadel die gröſsere oder kleinere Leichtigkeit beurtheilen, mit welcher der electrische Strom von der Flüssigkeit in jedes derselben übergeht. Der Platinbogen bewirkte mit verdünnter Säure eine Ablenkung von einigen Graden, Silber eine gröſsere, hierauf folgten Kupfer, Zinn, Eisen, Zink, und in dieser Ordnung scheinen mir auch die Metalle in Betreff der chemischen Wirkung auf einander zu folgen. Aber nicht bloſs die Ablenkung der Magnetnadel, sondern auch die Wasserstoffgasmenge, die sich am negativen Elemente entwickelte, variirte nach der Natur der Metallbögen, welche die zwei Gläser mit einander verbanden. Mit Platin war nichts davon bemerkbar, mit Gold fast nichts; sie wurde aber immer gröſser, so wie der Metallbogen mehr angreifbar war. Um zu zeigen, daſs die eigene Leitungsfähigkeit des Metalls darauf keinen Einfluſs nehme, nahm ich zur Verbindung beider Gläser bald einen 2 L. dicken Platindraht, bald einen Bleidraht von $^1/_4$ L. Dicke; im ersten Falle war die Ablenkung der Nadel kaum bemerkbar, im zweiten war der Strom sehr stark, aber selbst bei gleich dicken Drähten leitet Platin mehr als Blei, wie sich aus den Versuchen *Becquerel's* ergab, aber Blei wird von der Flüssigkeit angegriffen, nicht aber Platin. Ein eiserner Bogen gestattet einen stärkeren Strom als ein Kupferbogen, wenn man sie abwechselnd braucht, um die zwei Gefäſse, worin sich die Platten befinden, zu verbinden, wenigstens wenn sie eine verdünnte Säure oder eine Salzlösung enthalten; enthielten sie aber Ammoniak, so war der Strom kaum merklich beim Gebrauch eines Eisendrahtes, aber sehr sark, wenn man einen Kupferdraht

anwendete. Auch dieses ist eine Folge der chemischen Wirkung. Das Eisen leitet im ersten Falle, wo es mehr angegriffen ist, mehr als Kupfer, im zweiten, wo es weniger angegriffen ist, weniger. Will man sich nur an Thatsachen halten, so kann man folgende Relation zwischen der Eigenschaft eines festen Körpers, die Electricität in eine Flüssigkeit abzuleiten, und der Natur der Electricität, die er in dieser Flüssigkeit erlangt, aufstellen: Von zwei homogenen oder heterogenen in eine Flüssigkeit getauchten Metallflächen ist die, welche die Electricität mit dem geringsten Verlust leitet, in derselben Flüssigkeit, gegen die andere positiv, wenn beide zu einem *Volta'*schen Plattenpaare vereiniget sind. Man kann auch sagen, die Electricität bestimme diese beiden Phänomene; es ist auch wahrscheinlich, daſs es sich so verhält, aber das aufgestellte Gesetz ist von jeder Hypothese unabhängig. Ich könnte noch von den Versuchen sprechen, die ich mit stärkern Strömen über die Leitungsfähigkeit verschiedener Metalle und Flüssigkeiten angestellt habe, aber ich werde in einem folgenden Mémoire darauf zurückkommen, das die detailirte Untersuchung des dritten auf die Stärke der Electricität Einfluſs nehmenden Umstandes enthält. Ich kann aber nicht schlieſsen, ohne zu bemerken, daſs schon vor ein oder zwei Jahren mein Vater den Einfluſs der chemischen Wirkung der Flüssigkeit auf die darein getauchten Metallplatten bemerkt hat in Betreff der Erleichterung des Durchganges der Electricität nicht bloſs zur Erzeugung magnetischer, sondern auch anderer Wirkungen, besonders der Zersetzungen. Die Resultate der Versuche über den Einfluſs der relativen Natur des festen Leiters auf den untersuchten Gegenstand sind also:

1) Daſs die Schwächung der Electricität beim Übergange von Platin in eine Flüssigkeit von der Natur der

letzteren abhängt; 2) dafs auch die Stärke des Stroms darauf Einflufs hat, so dafs eine Flüssigkeit, die einen bestimmten Strom besser leitet als eine andere, einen stärkeren oder schwächeren besser oder schlechter leitet; 3) dafs die Electricität von irgend einem Metalle in irgend eine Flüssigkeit desto leichter übergeht, je leichter das Metall von der Flüssigkeit angegriffen wird; 4) dafs, unabhängig von der chemischen Wirkung, eine beständige Relation besteht zwischen der Erleichterung des Übergangs der Electricität in eine Flüssigkeit von einem Körper, und der Natur der Electricität, die er in Berührung mit einem anderen gibt.

2. Künstliche Blitzröhren.

(A. a. O. p. 319.)

Die französischen Academiker *Hachette*, *Savart* und *Beudant* versuchten es, Blitzröhren künstlich zu erzeugen. Zu diesem Ende wurde in einen Backstein ein Loch gemacht, mit zerstofsenem Glase gefüllt, und durch letzteres die Batterie aus *Charles* Cabinet, die stärkste in Paris vorhandene, entladen. Der Versuch glückte vollkommen. Sie erhielten bei einem Versuche eine Röhre von 25 Millim. Länge, deren äufserer Durchmesser unregelmäfsig von einem Ende zum anderen abnimmt, und 3 — 1 1/2 Millim. beträgt; der innere Canal ist 1/2 Millim. weit. Zwei andere Versuche lieferten kleinere und weniger gut gestaltete Röhren. Mit gepulvertem Feldspath und Quarz gelang der Versuch nicht. Übrigens waren die Röhren inwendig gebräunt, wahrscheinlich vom Eisenoxyd; doch haben sie bei weitem nicht die Festigkeit der von Dr. *Fiedler* gefundenen, welches wahrscheinlich von der verhältnifsmäfsig zu geringen electrischen Kraft bei den Versuchen herrührt.

B. Magnetismus.

1. Über den Magnetismus der Drähte eines Multiplicators. Von *Nobili*.

(Bibl. univ. Mai 1818, p. 79.)

Nobili machte die Bemerkung, dafs sich die Nadeln seines Multiplicators, wenn sie vollkommen gleiche magnetische Kraft hatten, und daher vollkommen astatisch waren, nie auf den Nullpunct der getheilten Scheibe unterhalb derselben einstellen liefsen, und dafs sie stets um 15° — 20° von dieser Linie abwichen. Er suchte die Ursache dieser Abweichung anfangs in einer magnetischen Eigenschaft der Scheibe und der Rahme, die beide aus Messing bestanden, oder in der Windung des Aufhängungsfadens. Er versuchte die Nadel einzustellen, nachdem er die Scheibe aus Papier, und die Rahme aus Holz gemacht hatte, und den Apparat auf dem Gestelle etwas wendete, um die Nadeln ohne Torsion des Fadens auf den Nullpunct zu bringen. Alles dieses führte nicht zum erwünschten Ziele, ja er konnte die Nadeln nicht einmal dann auf den Nullpunct der Scale bringen, als er den Aufhängungsfaden zum Drehen eingerichtet hatte. Nun blieb nichts mehr übrig, als anzunehmen, die Nadeln werden durch den Magnetismus des gewundenen Drahtes abgelenkt. Dieser Draht war so gewunden und in zwei Parthien getheilt, dafs er durch eine rhomboëdale Öffnung auf die getheilte Scheibe von oben herab zu sehen erlaubte. War er magnetisch, so befanden sich die Magnetnadeln in demselben Falle, als wenn sie zwischen zwei neben einander befindlichen parallelen Magnetnadeln schwebten. Die Nadeln sind zwar im Gleichgewichte, wenn sie sich mitten zwischen den zwei Magneten und parallel mit ihnen befinden, jedoch ist dieses Gleichgewicht labil, die kleinste Erschütterung hebt

es auf, und bringt sie in die stabile Lage, wo einer ihrer Pole gerade unter einem Pole der magnetischen Drähte sich befindet. *Nobili* fand diese Eigenschaft an allen Kupferdrähten, die er anwendete; keiner derselben enthielt einen merklichen Antheil an Eisen, wovon er sich dadurch versicherte, dafs er den Kupferdraht in Salpetersäure auflöste, und die Auflösung mittelst blausaurem Kali auf Eisen prüfte. Die magnetische Wirkung des Kupfers ist schon bei einer geringen Masse desselben sehr merklich. Sechs oder sieben Kupferdrähte von $^1/_4$ Millim. Dicke, mit einander vereiniget, nahmen zwei Magnetnadeln schon aus der Entfernung von 1 Millim. bei ihrer Bewegung mit sich fort, und lenkten sie um 15° — 20° ab, bevor sie selbe verliefsen. *Nobili* untersuchte auch Platin- und Silberdrähte. Platindrähte, zu einem Büschel vereiniget, übten zwar auf das System von Magnetnadeln eine kleinere Wirkung aus, als Kupfer, doch blieb diese hinreichend bemerkbar; Silberdraht hingegen blieb ohne solche Einwirkung. An einem Multiplicator mit Silberdraht liefsen sich die Magnetnadeln vollkommen auf den Nullpunct einstellen, und die Empfindlichkeit dieses Instruments war sechs und mehrmal grösser als mit Kupferdrähten. Ein Strom, der an einem Multiplicator mit Kupferdrähten eine Ablenkung von 1° — 2° hervorbringt, erzeugt bei einem mit Silberdraht eine Ablenkung von 6° — 12°.

2. Einrichtung des Sideroscops und mit demselben angestellte Versuche. Von *Le Baillif* und *Saigey*.

(*Bull. des scien. math. etc. Tome* 8 *et* 9.)

Schon im dritten Bande, S. 246 dieser Zeitschrift wurde ein Instrument unter dem Namen Sideroscop angezeigt, mittelst welchem man die bisher unerklärbare

Abstofsung, welche Spiefsglanz und Wismuth auf beide Pole eines Magnetes ausüben, bemerkt hat. Die Quelle, aus welcher diese Anzeige entlehnt war, gab die Einrichtung des genannten Instrumentes weder hinreichend detailirt noch ganz richtig an, auch ist von keinem anderen Versuche die Rede, als von der Abstofsung eines magnetischen Poles durch Spiefsglanz und Wismuth. Die oben angezeigte Quelle enthält aber eine vollständige Beschreibung dieses Instrumentes, und zugleich eine Reihe interessanter Versuche, welche damit angestellt wurden; daraus soll hier das Wichtigste mitgetheilt werden, um so mehr, da die neuesten in Frankreich erschienenen physikalischen Werke, nämlich die *Cours de Physique, par M. Gay-Lussac*, und *Élémens de Physique exp. et de Météorologie, par Pouillet*, dieses Instrumentes mit Beifall erwähnen.

Das genannte Bulletin enthält eine Beschreibung des Sideroscopes von *Le Baillif* (Tome 8, p. 87), und eine andere von *Saigey* (Tome 9, p. 89), es weichen aber beide in wesentlichen Puncten von einander ab. Wir wollen beide im Allgemeinen hören:

Nach *Le Baillif* besteht das Sideroscop aus einem sehr feinen reifen Strohhalm von 9 Z. Länge, der am einen Ende zwei magnetisirte Nähnadeln trägt, deren gleichnamige Pole entgegengesetzte Richtungen haben, und unter einem rechten Winkel gegen den Halm befestiget sind; am anderen hingegen ist eine einzige Magnetnadel angebracht, so dafs der ganze Apparat drei Magnete enthält. Der Halm sammt den Nadeln wird an einem ungezwirnten Seidenfaden von 12 Z. Länge in einem Glaskasten aufgehängt, wie dieses mit dem Hebel an *Coulomb's* electrischer Wage geschieht.

Der Halm kann von Hafer, Rocken oder Weitzen genommen werden, er mufs aber sehr fein und ganz

gerade seyn. Fast alle Halme sind krumm; um sie gerade zu richten, befestiget man an jedem Ende eines solchen einen Feilkloben, hält den Halm vertical, und belastet ihn unten mit einem Gewichte von 2 Pf., befeuchtet ihn, und streicht ihn der ganzen Länge nach mit einem heifsen Biegeleisen. Eine Nadel wird in das dünnere Ende des Strohhalms eingesteckt; sie soll 16 L. Länge, und ein Gewicht von etwa 1 $^1/_2$ Gr. haben, bis zur Sättigung magnetisirt seyn, und dann mit der Spitze bis nahe zur Hälfte ihrer Länge in den Halm hineinreichen. Am anderen Ende werden die Nadeln nicht unmittelbar angebracht, sondern man nimmt einen 2 Z. langen Halm, der in die Höhlung des längeren geschoben werden kann, und darin durch Reibung fest hält, und steckt 6 L. von einem Ende mitten und quer durch ihn eine etwa 1 Gr. schwere zur Sättigung magnetisirte Nadel, und 4 L. von dieser entfernt eine zweite mit der ersten parallele, und befestiget beide am Halme mittelst starkem Leim oder Gummiwasser. Dieses Halmstück wird nun in die Höhlung des dickeren Endes vom längeren Halm gesteckt, und dieser Halm mittelst einer papierenen Scheide an einem ungezwirnten Seidenfaden von 12 Z. Länge in einem Glaskasten so aufgehängt, dafs die zwei parallelen Nadeln genau eine horizontale Lage annehmen, und der Halm nach Belieben gehoben oder gesenkt werden kann, damit er, so lange man das Instrument nicht braucht, auf dem Boden des Kastens ruhe. Der Kasten bekommt ein 14 Z. langes, 6 Z. breites Bret zur Basis, welches nach der Länge und nach der Breite zwei parallele Furchen hat, die mit Seidenbändern ausgefüttert sind, und in welche der untere Rand des Glaskastens so genau pafst, dafs kein Luftzug auf den Halm wirken kann. An dieser Basis ist auf Papier mit gehörigem Radius ein getheilter Kreisbogen angegeben, dessen Nullpunct in die,

die Basis der Länge nach halbirende Linie fällt. Der Glaskasten wird mit 3 Z. Höhe angegeben; an dessen Decke erhebt sich eine Glasröhre, in welcher sich der Aufhängungsfaden befindet, und in gehöriger Entfernung davon ist eine Öffnung angebracht, deren Brennweite 3 Z. beträgt, und die sich genau über dem Nullpuncte der Theilung am Boden befindet. Ein im Gesichtsfelde gespannter Faden soll dem Nullpuncte der Scale entsprechen. An der schmäleren Seite des Kastens, welcher die einfache Nadel zugewendet ist, wird eine Vorrichtung angebracht, wodurch man die nöthige Öffnung erhält, um die Körper in den Kasten bringen zu können, deren Einwirkung auf die Magnetnadel man zu erfahren wünscht.

Saigey's Beschreibung des Sideroscopes weicht in manchem wesentlichen Puncte von der vorhergehenden ab. Die Länge des Halmes ist mit 42 Cent. (18 Z.) angegeben, und daher auch der Glaskasten 56 Cent. (21 Z.) lang, 21 Cent. (8 Z.) breit, und 17 Cent. (6 ½ Z.) hoch. Die darüber befindliche Glasröhre, welche den Coconfaden enthält, ist 36 Cent. (13 ½ Z.) hoch, und oben mit einem Stöpsel verschlossen, durch dessen Axe ein dünner Glasstab geht, der sich verschieben läfst, und in jeder Lage durch Reibung festhält. An seinem unteren Ende ist der Aufhängungsfaden befestiget, und durch Heben oder weiteres Hinabdrücken dieses Stabes läfst sich auch der Halm heben und senken. Die wesentlichste Abweichung dieses Instrumentes von dem *Le Baillif's* besteht darin, dafs hier nur zwei Magnete angewendet werden, jeder an einem Ende des Halmes mit der Längenrichtung desselben parallel, und so, dafs sie sich die gleichnamigen Pole zuwenden, und daher der ganze Apparat astatisch ist. Jeder Magnet ist cylindrisch und 1 Millim. (½ L.) dick, einer derselben 40.8 Millim.

(1 ½ Z.), der andere 42 Millim. (1.6 Z.) lang. Die Empfindlichkeit dieses Apparates hängt von dem mehr oder weniger astatischen Zustande desselben ab. Man kann ihn völlig astatisch machen, indem man einen Magnet dem anderen mehr oder weniger nähert.

Welche von beiden Einrichtungen verdient nun den Vorzug?

Gay-Lussac und *Pouillet* beschreiben in ihren oben genannten Werken das Sideroscop, wie es *La Beullif* angibt, doch bemerkt Letzterer, die zwei quer über den Halm angebrachten Nadeln sind unter sich astatisch, und könnten eben so gut ganz wegbleiben. Ich wäre sehr geneigt, der Einrichtung, wie sie *Saigey* angibt, den Vorzug zu ertheilen, weil er vollkommen astatisch gemacht, und daher für äufsere Einwirkungen ungemein empfindlich eingerichtet werden kann.

Das Sideroscop ist so leicht beweglich, dafs man beim Gebrauche desselben sehr leicht getäuscht werden kann. *Gay-Lussac* erinnert, dafs schon die Wärme der ziemlich ferne gehaltenen Hand durch die im Innern des Kastens erregten Luftströme eine Ablenkung des Halmes hervorbringt, und *Saigey* gibt mehrere äufsere Einflüsse an, welche störend beim Gebrauche dieses Instrumentes wirken, die sich fast alle auf die von *Gay-Lussac* angegebenen zurückführen lassen. Schon *Le Baillif* hat in mehreren Substanzen Magnetismus nachgewiesen, worin man ihn nicht vermuthete, oder doch nicht beweisen konnte. Er sagt, alle französischen und ausländischen, alten und neuen Münzen von Gold, Silber und Kupfer, besonders die in Italien geprägten Silbermünzen, ziehen das Sideroscop mächtig an; eben so wirken auf dasselbe alle Gattungen Asche, die mittelst Gummiwasser zu Würfeln von 3 — 4 L. Fläche zusammengeknetet sind, Zucker, der sich zu spinnen

anfängt, Chocolat, Bouteillenglas, grüner und schwarzer Turmalin, Granat, künstlicher venetianischer Avanturin, rhomb. Quarz, gelber Topas, grüner Talk, schwefelsaures und blausaures Eisen, phosphorsaure Kalkerde, vulcanischer Tuff und alle vulcanischen Producte, alle nicht chemisch reinen Metalle, messingene Nadeln, alle Aërolithen, gebranntes Kühhorn, calcinirtes Blut. *Saigey* hat an mehreren Eisenerzen und Eisenpräparaten einen selbstständigen, von ihrer Lage gegen die Weltgegenden unabhängigen, Magnetismus nachgewiesen, und sogar seine Intensität gemessen. Noch merkwürdiger ist es aber, daſs er mittelst des Sideroscopes nachgewiesen haben will, alle Körper üben in der Luft auf einander eine Abstoſsung aus. Daſs man eine solche Kraft am Wismuth und Spieſsglanz nachgewiesen hat, wurde schon früher in dieser Zeitschrift angegeben. *Saigey* bestätiget dieses nicht bloſs, sondern dehnt diese Abstoſsung auf alle Körper aus. Nähert man, sagt er, der Magnetnadel einen Körper, der eisenhältig ist, so soll eine Anziehung vermöge des Eisengehaltes, und eine Abstoſsung vermöge dieses allgemeinen Gesetzes erfolgen. Sind beide Wirkungen einander gleich, so bewegt sich die Nadel nicht; ist aber eine gegen die andere überwiegend, so erfolgt vermöge der Differenz der zwei Kräfte eine Abstoſsung oder Anziehung. Derselbe Körper kann auch alle drei Wirkungen ausüben, wenn man seine Oberfläche und Lage ändert, besonders gilt dieses von fast reinen Metallen. *Saigey* besitzt einen kleinen sehr durchsichtigen Turmalin, bei dem diese dreifache Wirkung nach Verschiedenheit seiner Lage gegen den Magnet eintritt.

Um die Wirkung zweier Metallstücke auf einander zu erforschen, wurden Stücke von den käuflichen Metallsorten zu kubischen Körpern von einem Kubikcenti-

meter Inhalt durch Schleifen an einem Schiefersteine geformt, und eben so prismatische Stücke von einer Quadratcentimeter-Fläche und 0.6 Millimeter Dicke, die sich in eine schweifförmige Verlängerung endigten. Mittelst dieser wurde ein solches Stück statt des magnetischen Cylinders (der mitten in den Halm hineingesteckt wurde) in den Strohhalm gebracht, der Würfel diesem gegenüber gestellt, und die Repulsion beobachtet. Nach fünf Minuten nahm der Strohhalm gewöhnlich eine fixe Position an. Nun wurde der Würfel vorgeschoben, und die neue Lage des Hebels beobachtet, und so fortgefahren, bis eine Reihe von fünf, zehn oder funfzehn Beobachtungen erhalten war. Nach diesem wurde der Würfel langsam zurückgezogen, und die Zeit abgewarten, wo der Halm wieder ruhig hing. Da man zu einer Reihe von Beobachtungen eine Stunde braucht, so änderte sich innerhalb dieser Zeit der Nullpunct der Nadel, und es mufste unter der Voraussetzung, dafs diese Variation gleichförmig erfolge, nach der von einer Beobachtung zur anderen verflossenen Zeit für jedes Resultat die nöthige Correction im Stande des Hebels angebracht werden. Die Resultate wurden in grofsem Mafsstabe graphisch dargestellt, und von den verschiedenen Ordinaten, welche zu derselben Abscissen gehörten, das Mittel genommen. Auf diese Weise wurden folgende Resultate erhalten, die mit allen Irregularitäten hier angegeben sind. Die Entfernung der Platte vom Würfel beim Beginne des Versuches, und nachdem die Abstofsung erfolgt war, ist in Millim. ausgedrückt. Die Abstofsungen, die der Bleiwürfel ausübt, sind aus 75 Beobachtungen zu 5 Reihen, die des Zinnwürfels aus 22 Beobachtungen zu 3 Reihen, die des Wismuthwürfels aus 46 Beobachtungen zu 7 Reihen, die des Antimons aus 40 Beobachtungen zu 6 Reihen, und endlich die des Zin-

kes aus 29 Beobachtungen zu 5 Reihen entnommen. Die Platte bestand aus Kupfer.

Entfernung.	Repulsion des Würfels aus				
	Blei.	Zinn.	Wismuth.	Antimon	Zink.
50	0.33	0.20	0.30	0.24	0.17
40	0.64	0.43	0.61	0.48	0.35
35	1.19	0.84	1.09	0.84	0.58
30	1.86	1.48	1.81	1.44	0.94
25	3.01	2.46	2.80	2.40	1.32
20	4.25	3.52	3.46	2.80	1.54
18	4.90	3.97	4.12	3.15	1.72
16	5.39	4.40	4.81	3.50	1.88
14	6.13	4.93	5.36	3.81	2.08
12	7.10	5.52	5.86	4.15	2.32
10	8.05	6.25	6.17	4.33	2.46
9	8.73	6.62	6.37	4.50	2.61
8	9.47	7.04	6.66	4.66	2.80
7	9.78	7.35	7.03	4.90	3.00
6	10.10	7.72	7.71	5.20	3.30
5	10.42	8.10	8.24	5.70	3.60
4	10.84	8.56	8.74	6.32	3.94
3	11.69	9.25	9.50	7.05	4.43
2	13.10	10.60	11.25	8.10	5.60
1	14.50	12.80	—	—	—

Drückt man die Gröfse der Abstofsung, welche jeder dieser Körper bei der Entfernung von 1 Mill. ausübt, durch 1 aus, theilt jede der folgenden Abstofsungen durch die bei 1 Mill. Abstand herrschende, und stellt die so gewonnenen Resultate in eine ähnliche Tafel zusammen; so stellen die Zahlen, welche nun die Repulsion ausdrücken, das Gesetz derselben bei verschiedenen Körpern dar. Mit Ausnahme kleiner Abweichungen, die bei so schwierigen Versuchen allerdings unvermeidlich sind, zeigt sich für alle Körper dasselbe Gesetz, mit denen die Versuche angestellt wurden. Dasselbe

Gesetz bewährte sich auch, als man die zwei Magnetstäbe wieder an ihren Platz im Strohhalme brachte, und einem derselben ein Stück reines Wismuth mehr oder weniger näherte.

Nun suchte *Saigey* zu beweisen, dafs diese Abstossung weder von einer Bewegung der Luft, noch von der gewöhnlichen oder von der galvanischen Electricität, und auch nicht von der Masse der Körper, oder von der Capillarität herrühre. Als Grundursache dieser Abstofsung wird die Wärme angenommen. Darauf, heifst es, deuten schon die gewöhnlichen Wirkungen hin, welche eine Entfernung der Theile der Körper von einander zur Folge haben; auch hat *Fresnel* schon früher nachgewiesen, dafs zwei Körper selbst im luftleeren Raume einander abstofsen, wenn sie durch concentrirtes Sonnenlicht erwärmt werden; endlich zeigt sich auch wirklich diese Repulsion desto gröfser, je höher die Temperatur der sich abstofsenden Körper ist. Die Wirkung des Bleies auf Kupfer variirte zwischen 1000 und 557, als die Temperatur zwischen 15° und 5° schwankte. *Saigey* hat diesen Einflufs der Körper auf einander noch auf einem anderen Wege zu erforschen gesucht, nämlich durch die Änderungen der Oscillation einer nicht magnetischen Nadel in der Nähe eines Stabes oder einer Scheibe von Metall, und zieht daraus Schlüsse, welche mit dem Magnetismus bewegter Körper in Verbindung stehen, über den er in einer folgenden Arbeit nähere Aufschlüsse zu geben verspricht.

VI.
Über das pankratische Ocular;

von

I. I. Littrow.

Da das von dem Londoner Arzte *W. Kitchiner* erfundene *Pancratic Eye-Tube* unter uns noch nicht sehr bekannt zu seyn scheint, so wird vielleicht Manchem eine kurze, nähere Anzeige desselben willkommen seyn. — Dieses Instrument ist von unseren gewöhnlichen terrestrischen Ocularen mit vier planconvexen Linsen nur wenig verschieden, sowohl in Beziehung auf die Gröſse und die Brennweiten, als auch auf die beiden äuſseren Distanzen der vier Linsen. Die beiden ersten, dem Auge nächsten, und eben so die beiden letzten Linsen sind in eine besondere Röhre gefaſst, so daſs die Distanzen jener sowohl, als dieser, unter sich unveränderlich sind. Diese beiden Röhren aber werden durch eine dritte verbunden, durch welche jene beiden ersten einander genähert oder von einander entfernt werden können. Das pankratische Ocular unterscheidet sich also von einem gewöhnlichen terrestrischen Oculare mit vier Linsen vorzüglich dadurch, daſs bei jenem die beiden äuſsersten Distanzen der Linsen constant, die mittlere Distanz aber variabel ist, während bei diesem alle drei Distanzen unveränderlich sind. Je mehr bei dem pankratischen Oculare diese mittlere Distanz vergröſsert wird, desto stärker wird die Vergröſserung des Fernrohres. Es liegt in der Natur der Sache, daſs diese Erweiterung der Distanz, und die daraus folgende Vergröſserung des Gegenstandes ihre Grenzen hat, jenseits welchen die Gegenstände schwach beleuchtet und matt erscheinen. Aber

der Vortheil dieser Einrichtung vor der gewöhnlichen besteht darin, daſs diese Grenzen bei einem gut construirten Fernrohre dieser Art sehr ausgedehnt sind. Ich habe ein solches von *Dollond* verfertigtes Ocular mit einem vortrefflichen *Fraunhofer*'schen Objective von sechs Zoll Öffnung verbunden, zu welchem *Fraunhofer* selbst ein gewöhnliches terrestrisches Ocular von 70maliger Vergröſserung gegeben hat, und dadurch die Vergrösserung bis auf 300 gebracht, bei welcher Saturn, und der Schatten seines Ringes noch sehr scharf begrenzt erschien, und feine Doppelsterne, wie Castor oder Bootis, ungemein deutlich dargestellt wurden. Das Ocular war selbst auf eine 600malige Vergröſserung eingerichtet, und man konnte bei 400 noch immer gut sehen, wenn der Gegenstand stark beleuchtet war; über dieser Grenze aber erschien er immer mehr farbig und verwaschen.

Nahe dasselbe leistete auch ein anderes pankratisches Ocular, welches Hr. *Plöſsl* nach dem Muster von jenem verfertigte, und dessen Vergröſserung ebenfalls von 100 bis 600 geht. Da bei unseren gewöhnlichen Ocularen das erste, so wie das zweite Linsenpaar in einer eigenen Röhre gefaſst ist, so kann man auch mit ihnen den Versuch anstellen, und diese beiden kleineren Röhren von einander entfernen, wodurch die mittlere Distanz der Linsen erweitert, und die Vergröſserung verstärkt wird; nur läſst sich hier nicht so weit gehen, da die mittlere Röhre fehlt, die man aber leicht ersetzen kann. Daſs die gröſste Wirkung des pankratischen Oculars nur bei den vollkommensten Objectiven mit starker Öffnung, und bei stark erleuchteten Gegenständen erwartet werden kann, ist für sich klar. Doch wird es auch bei einem gewöhnlichen, gut gearbeiteten und achromatischen Zugfernrohre angenehm und selbst nützlich

seyn, die Vergröſserung desselben von 30 bis 100 und selbst weiter zu bringen, um den verschiedenen Bedürfnissen zu entsprechen, und so auf Reisen u. dgl. mit einem einzigen kleinen Instrumente und mit einem leisen Zuge der Hand dasselbe zu leisten, was früher nur durch eine gröſsere Sammlung mehrerer verschiedener Fernröhre möglich gewesen wäre. — Nach einem erst vor Kurzem erhaltenen Briefe unseres trefflichen Astronomen *Santini* in Padua lassen sich ähnliche Wirkungen auch durch die Veränderungen der beiden anderen Distanzen der vier Ocularlinsen erreichen. Er wird die mir gefälligst mitgetheilte Theorie dieser Oculare in dem nächstens erscheinenden zweiten Bande seiner Optik bekannt machen, und ich begnüge mich daher, hier nur ein nach dieser Theorie berechnetes Beispiel anzuführen, in welchem zugleich auf die Farbenlosigkeit des Bildes gehörige Rücksicht genommen worden ist. Nimmt man die Brennweiten des Objectivs und der vier Oculare gleich 30.0, 2.0, 2.5, 3.0, 1.5 Zolle, und die Distanz der beiden dem Objective nächsten Oculare von einander, oder die erste Distanz gleich 2.9 Zoll, so lassen sich die *beiden* anderen Distanzen auf folgende Weise verändern, um dadurch die nebenstehenden Vergröſserungen zu erhalten:

Erste Distanz = 2.9 Zolle,

Zweite Distanz	2.5	4.0	5.0	6.0	7.0
Dritte Distanz	3.332	2.927	2.720	2.548	2.404
Vergröſserung	21.5	27.3	32.1	37.5	43.5

u. s. w.

Es scheint daher dieser Gegenstand einer besonderen Untersuchung sehr werth zu seyn, um unter allen hier möglichen Einrichtungen die vortheilhafteste und jedem besonderen Zwecke angemessenste Wahl zu treffen, und der ganzen bisher noch so wenig beachteten

Sache die Sicherheit zu geben, deren sich alle einer mathematischen Basis fähigen Gegenstände erfreuen sollten.

Nachschrift vom Herausgeber *A. v. Ettingshausen.*

Der Umstand, dafs die vier Ocularlinsen eines auf gewöhnliche Weise construirten terrestrischen Fernrohres, ohne Verletzung der Reinheit der Bilder, innerhalb gewisser Grenzen im Rohre verschoben werden dürfen, und dafs diese Willkürlichkeit ihrer Stellung zur Erzielung einer schicklichen Vergröfserung oder eines passenden Gesichtsfeldes sich benützen lasse, mufs wohl jedem Verfertiger solcher Fernröhre in die Augen fallen; man wird sich daher nicht darüber wundern, dafs vor Dr. *Kitchiner* Mehrere auf den Gedanken gekommen sind, die Ocularlinsen in verschiedene Auszugröhren zu setzen, um durch Veränderung ihrer Intervalle die Vergröfserung des Fernrohres nach Gefallen bis zu dem Maximum, welches ohne Nachtheil der Deutlichkeit der Bilder erreicht werden kann, zu steigern.

So hat, wie *Biot* im *Précis élémentaire de Physique* (s. 2te Auflage vom Jahre 1821, Tome II., p. 353) berichtet, der rühmlich bekannte Pariser Künstler *Cauchoix* in seinen *lunettes polyaldes* die erste und zweite Ocularlinse (vom Objectivglase an gezählt) beweglich gelassen, wodurch die Vergröfserung nahe auf das Doppelte getrieben werden konnte. Auch versichert unser trefflicher Optiker *Plöfsl*, bereits vor mehr als zehn Jahren Fernröhre, deren Oculare in zwei Auszugröhren vertheilt waren, gesehen zu haben.

Soll jedoch die hier erwähnte Einrichtung des Ocularapparates eines Fernrohres (vorausgesetzt, dafs das Objectiv mit hinreichender Vollkommenheit construirt worden ist, um sehr weit gehende Vergröfserungen ohne

Verzerrung oder Färbung der Bilder vertragen zu können) allen Nutzen, dessen sie fähig ist, gewähren, so müssen die unveränderlichen Elemente des Oculars dergestalt gewählt werden, daſs die Steigerung der Vergröſserung möglichst weit gehen könne, d. h. daſs ihre Grenze jener, an welche die zum deutlichen Sehen erforderliche Lichtstärke gebunden ist, so nahe als möglich liege. Dieſs ist die Aufgabe, mit welcher sich, wie aus dem 51sten Bande von *Bode's* astronom. Jahrbuche, S. 177 erhellet, Dr. *Kitchiner*, wie es scheint auf practischem Wege, mit günstigem Erfolge beschäftiget hat, und die auch die Aufmerksamkeit der Theoretiker in vollem Maſse verdient.

Ohne von den Bemühungen der so eben genannten Männer unterrichtet zu seyn, widmete demselben Gegenstande seit längerer Zeit ein würdiger, mit der Naturlehre gründlich bekannter, und insbesondere in der practischen Optik durch eigene Übung in der Construction verschiedener optischer Apparate, ja selbst im Schleifen der Gläser und Spiegel erfahrener Mann einen Theil seiner Muſse. Der gegenwärtige Lector der Physik an der Hausstudienanstalt der nord-tiroler Kapuzinerprovinz, P. *Peter Gruber* zu Botzen, ein geborner Tiroler, eröffnete mir nämlich bereits im Sommer des Jahres 1821, als ich noch die Stelle eines Professors der Physik an dem damaligen Lyceum zu Innsbruck bekleidete, daſs er im Besitze mehrerer Methoden sey, ohne Wechselung der Oculargläser an den Fernröhren stufenweise fortschreitende Vergröſserungen zu erzielen, und hiedurch diesen Instrumenten eine gröſsere Wirksamkeit zu geben. Allein erst vor wenigen Monaten setzte er mich in nähere Kenntniſs der von ihm erdachten Einrichtungen der Fernröhre. Ich erlaube mir hier öffentlich anzuführen, daſs eine (und zwar nach meiner

Meinung die vorzüglichste) derselben mit *Kitchiner's* Vorrichtung übereinstimmt, und deſshalb dem oben genannten P. *Peter Gruber* gleichfalls die Ehre der Erfindung eines in mehrfacher Hinsicht nützlichen Apparates zugeschrieben werden darf.

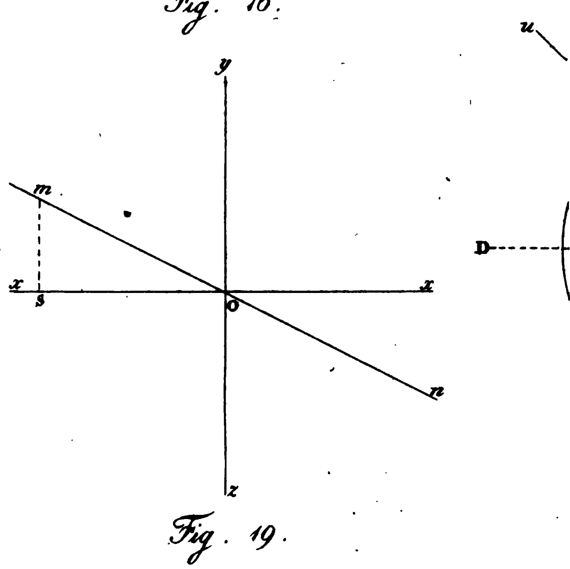
Interessante Ankündigung

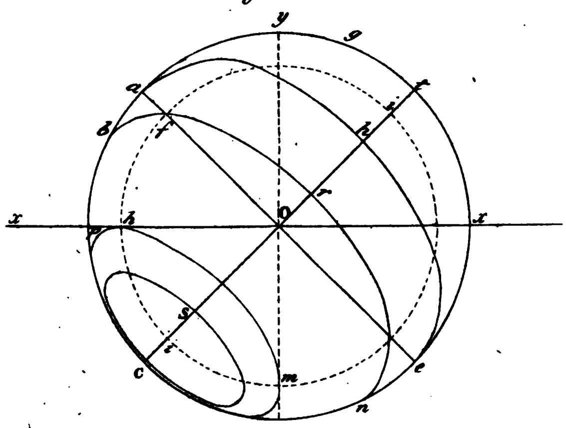
meines neuen Verzeichnisses, zweiter Theil, welcher in Kurzem die Presse verläſst. Dieses enthält die genaue Angabe der vollständigen Sammlung mathematischer, physikalischer und astronomischer Instrumente und Apparate, chemischer Geräthschaften und technologischer Modelle nach den neuern Einrichtungen und Verbesserungen verfertigt, welche im physikalischen Museum zu Frankfurt am Main aufgestellt sind, und die ich zu beigesetzten Preisen liefere. Dieses Verzeichniſs ist zum bequemen Nachschlagen systematisch geordnet, und stehet gegen portofreie Briefe Kennern und Liebhabern unentgeldlich zu Diensten.

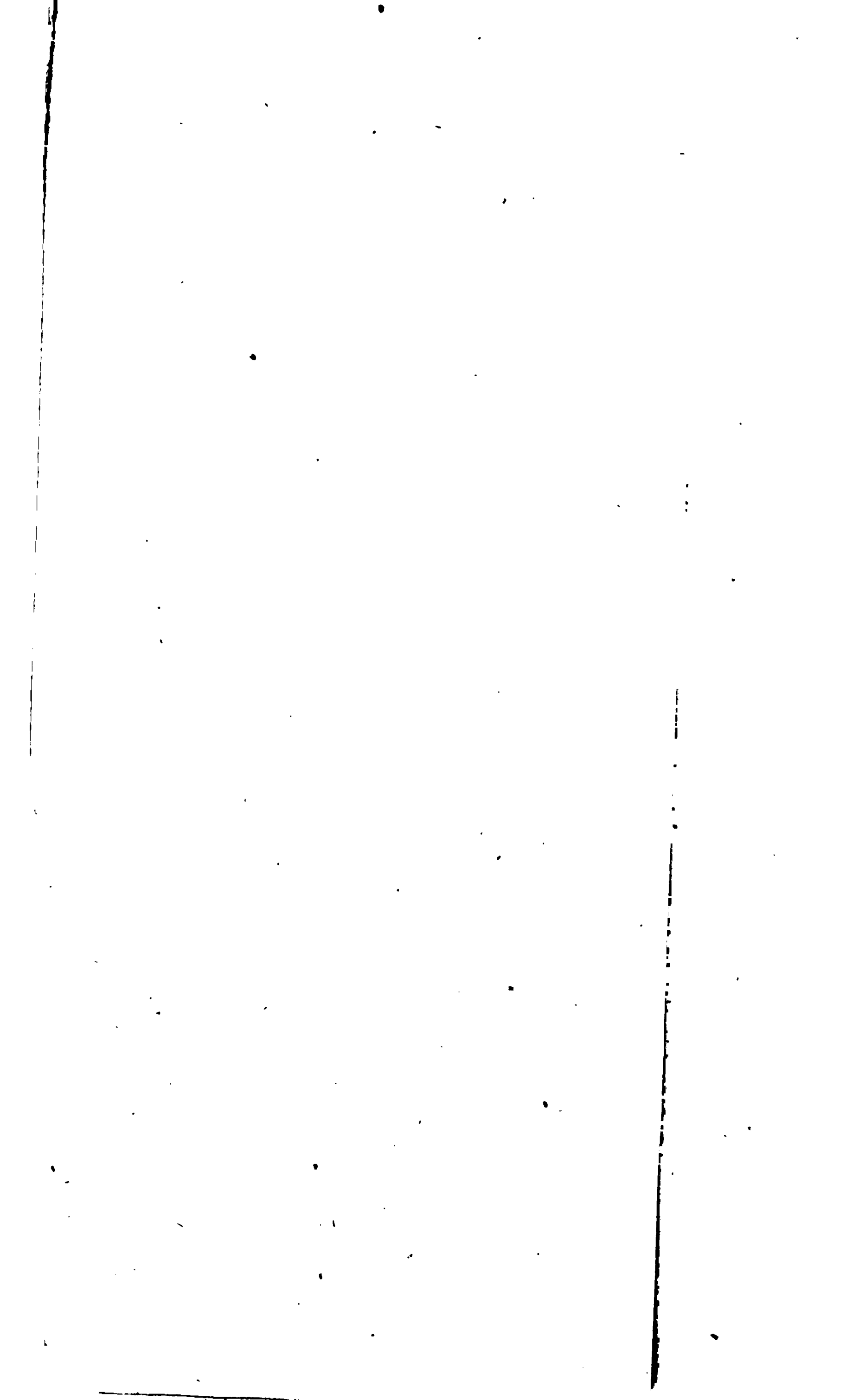
Joh. Val. Albert.

Verbesserungen.

Seite	Zeile	statt:	lies:
46	18	vorige	unbestimmte
—	29	3, 4, 5	2, 3, 4
227	3 v. u.	*farbi*	*furbi*
364	14 v. u.	immer	niemals


Fig. 16.
y
m
x
s
o
x
n
z
u
D


Fig. 19.
y
g
a
f
i
b
h
r
x
h
o
x
s
i
c
m
e
n



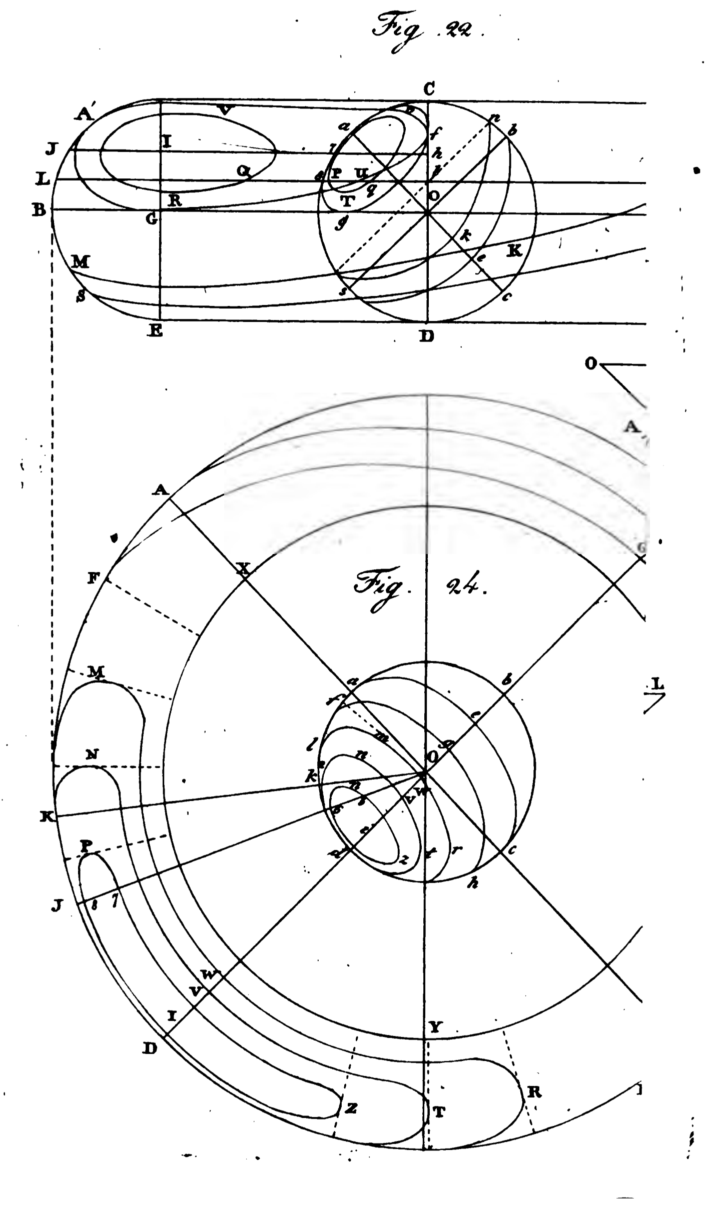


Fig. 22.
A′
J
L
B
C
V
I
Q
R
G
M
S
E
D
a
b
f
h
n
P
U
T
O
g
q
k
K
e
c
s
Fig. 24.
A
F
M
N
K
P
J
D
I
V
W
X
Y
Z
T
R
O
L
a
b
c
d
e
f
h
k
l
m
n
r
t
z

